PRUEBA DE AUTOEVALUACIÓN. Tema 2

Complementos Matemáticos de la Ingeniería Industrial. Máster en Ingeniería Industrial.

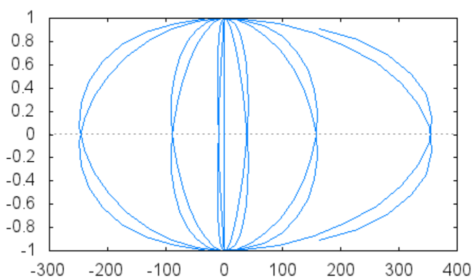
Pregunta 1. Asocie cada función con su gráfica:

Función 1 $\mathbf{x1}\,(t) = \left(\left(e^{\cos t} - 2\cos(4t) - \operatorname{sen}^5 \frac{t}{12}\right)\cos t, \left(e^{\cos t} - 2\cos(4t) - \operatorname{sen}\left(\frac{t}{12}\right)^5\right)\operatorname{sen} t\right)$ para $t \in [-\pi, \pi]$.

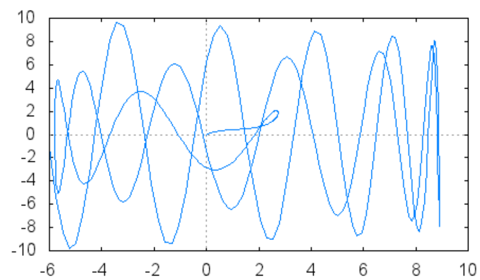
Función 2 $\mathbf{x2}\,(t) = \left(t^2 \cos t, \operatorname{sen} t\right)$ para $t \in [-20, 20]$.

Función 3 $\mathbf{x3}\,(t) = (t\cos t, \operatorname{sen} t)$ para $t \in [-20, 20]$.

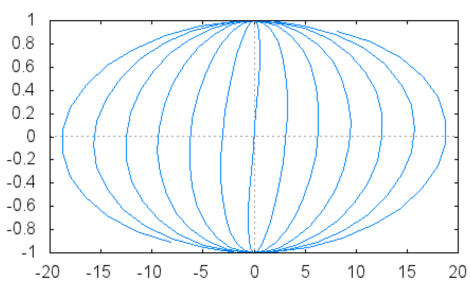
Función 4 $\mathbf{x4}\,(t) = \left((1+t)\operatorname{sen} t, t\cos(t^2 - 2t)\right)$ para $t \in [0, 10]$.



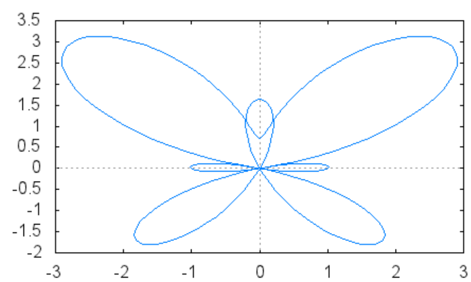
(a) Gráfica a



(b) Gráfica b



(c) Gráfica c



(d) Gráfica d

Solución: Es correcto:

Gráfica a, función 2,

Gráfica b, función 4,

Gráfica c, función 3,

Gráfica d, función 1.

Se puede comprobar con `Maxima`.

Pregunta 2. Sean $B_i^n\,(t)$ los polinomios de Bernstein. Entonces:

a. $B_0^n\,(t) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b. $B_n^n\,(1) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

c. $B_i^n\,(t)$ puede tener grado menor que n.

d. Ninguna de los anteriores.

Solución: Es correcta la opción b.

Sabemos que

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-1},$$

por eso es un polinomio de grado n siempre y la tercera opción no es correcta. Además:

$$B_0^n(t) = \binom{n}{0} t^0 (1-t)^n = (1-t)^n,$$
$$B_n^n(t) = \binom{n}{n} t^n (1-t)^0 = t^n,\ B_n^n(1) = 1.$$

Por eso es correcta la opción b e incorrecta la opción a.

Pregunta 3. Sea $\mathbf{x}(t)$ la curva de Bézier con polígono de control formado por $(-1,2)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(2,-1)$, $(4,0)$. Elija la o las opciones correctas:

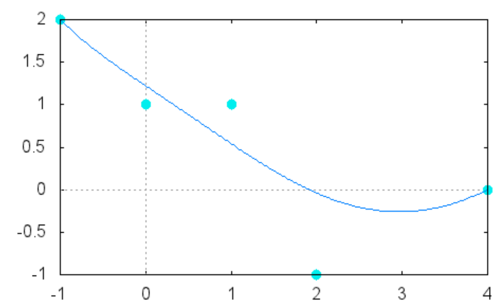
a. Su ecuación es $\left(t^4+4t-1, 8t^4-12t^3+6t^2-4t+2\right)$.

b. Sus componentes son polinomios de grado menor que 3.

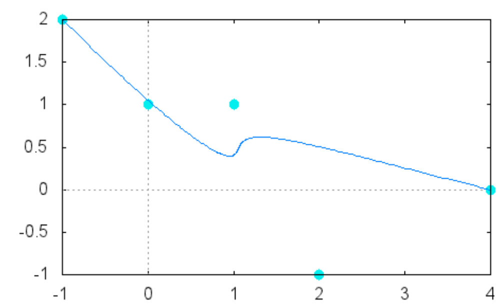
c. Su gráfica, con los puntos de control es la figura a.

d. Su gráfica, con los puntos de control es la figura b.

e. Ninguna de los anteriores.



(e) Figura a



(f) Figura b

Solución: Son correctas las opciones a y c. Como tenemos 5 puntos, el grado va a ser menor o igual que 4, en principio, aunque podría ser 3. Determinando la ecuación de la curva, vemos que es 4.

El polígono es

$$\mathbf{b}_0 = (-1,2),\ \mathbf{b}_1 = (0,1),\ \mathbf{b}_2 = (1,1),\ \mathbf{b}_3 = (2,-1),\ \mathbf{b}_4 = (4,0),$$

y la curva de Bézier cumple

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^{4} \mathbf{b}_i B_i^4(t),$$

para los polinomios de Bernstein

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i},\ B_i^4(t) = \binom{4}{i} t^i (1-t)^{4-i}.$$

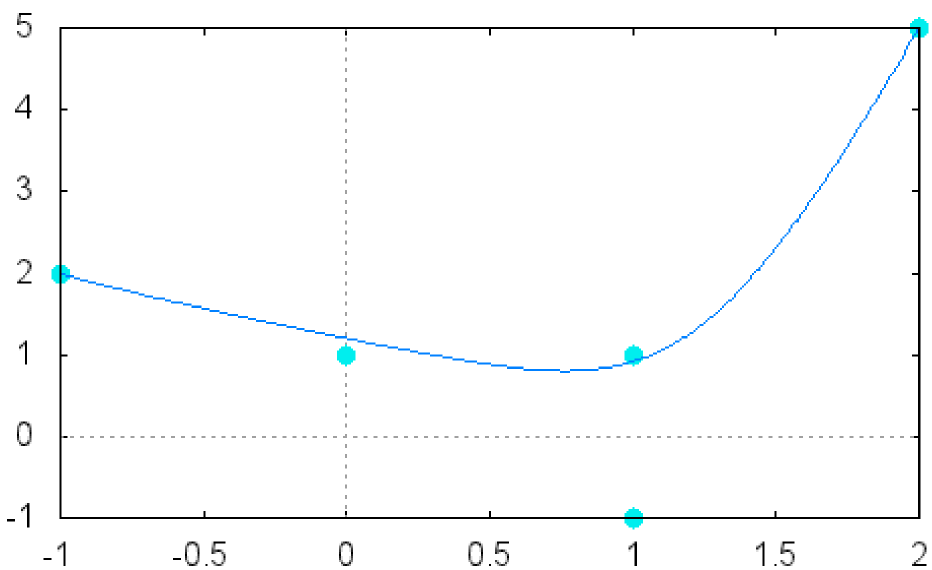
Entonces la curva de Bézier es

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= (-1,2)B_0^4(t) + (0,1)B_1^4(t) + (1,1)B_2^4(t) + (2,-1)B_4^4(t) + (4,0)B_4^4(t) \\
&= (-1,2)\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} t^0 (1-t)^4 + (0,1)\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} t^1 (1-t)^3 + (1,1)\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} t^2 (1-t)^2 \\
&+ (2,-1)\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} t^3 (1-t)^1 + (4,0)\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} t^4 (1-t)^0 \\
&= (-1,2)(1-t)^4 + (0,1)4t^1(1-t)^3 + (1,1)6t^2(1-t)^2 + (2,-1)4t^3(1-t)^1 + (4,0)t^4 \\
&= \left(4t^4 - (-t+1)^4 + 8t^3(-t+1) + 6t^2(-t+1)^2, 2(-t+1)^4 + 4t(-t+1)^3 - 4t^3(-t+1) + 6t^2(-t+1)^2\right) \\
&= \left(t^4 + 4t - 1, 8t^4 - 12t^3 + 6t^2 - 4t + 2\right).
\end{aligned}
$$

La representación gráfica, con Maxima se hace con

```
>>  wxplot2d([[discrete,[[-1,2],[0,1],[1,1],[2,-1],[4,0]]],
    ['parametric, t^4+4*t-1,8*t^4-12*t^3+6*t^2-4*t+2,                        .
     [t, 0, 1], [nticks, 300]]],[style, [points,3,0,1], [lines,1,1]],[legend,false])$
```

La curva es:



Si tomamos los puntos de control $(-1,2)$,$(2,-1)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(4,0)$, la gráfica resultante es y la ecuación de la curva es

$$\mathbf{x}(t) = \left(t^4 + 16t^3 - 24t^2 + 12t - 1, 8t^4 - 28t^3 + 30t^2 - 12t + 2\right).$$

Pregunta 4. Los puntos múltiples de la curva regular dada por las ecuaciones paramétricas

$$x(t) = t\cos t, \quad y(t) = \operatorname{sen} t$$

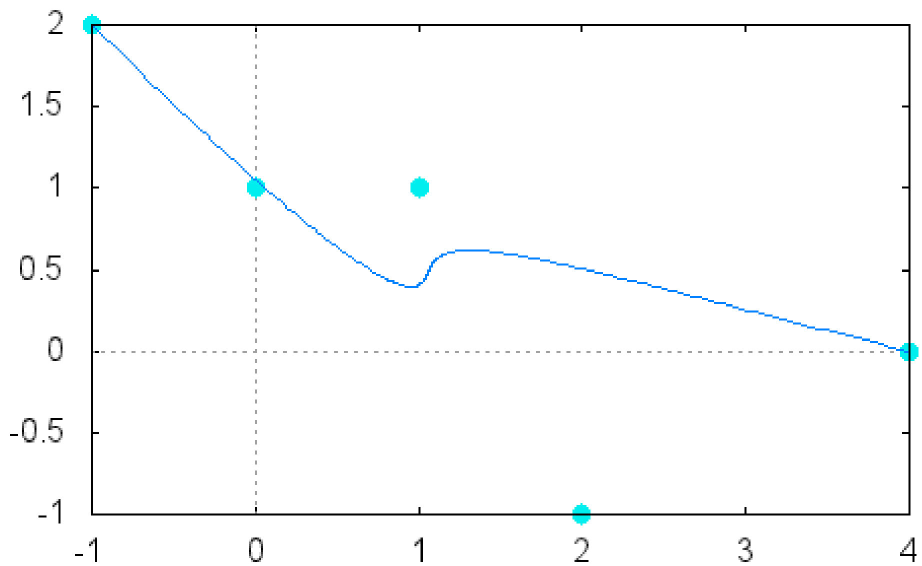
son

a. Todos sus puntos son simples.

b. Los puntos resultantes para $t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ son puntos múltiples.

c. El punto $(0,-1)$ es un punto múltiple. **d.** Ninguna de los anteriores.

Solución: Son correctas las opsicones b y c. Estudiamos cuándo no es $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ inyectiva para encontrar los puntos múltiples. Lo dividimos en 2 casos:



a) Si $x(t) = t\cos t = 0$, pero $t \neq 0$. Esto ocurre cuando $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$. En ese caso

$$y\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k.$$

Y así, para todos los valores de $t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ la imagen es $(0,1)$ y para los valores $t = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$ la imagen es $(0,-1)$, para $k \in \mathbb{Z}$. Ambos con punto múltiples de orden infinito.

b) Si $x(t) = t\cos t \neq 0$ pero $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t')$ entonces debe ser:

$$t\cos t = t'\cos t', \quad \operatorname{sen} t = \operatorname{sen} t'.$$

De la segunda igualdad resulta la relación $t = (2k+1)\frac{\pi}{2} - t'$, para $k \in \mathbb{Z}$. En estos puntos se cumple

$$x(t') = t'\cos t' = t'(-\cos t) = -\left((2k+1)\frac{\pi}{2} - t\right)\cos t = t\cos t - (2k+1)\frac{\pi}{2}\cos t \neq t\cos t$$

para todo k si $\cos t \neq 0$.

Por esto, los únicos puntos múltiples son los del apartado a.

Pregunta 5. Sea C la hélice circular de ecuaciones

$$\alpha(t) = (3\cos t, 3\operatorname{sen} t, 4t).$$

Elija la opción u opciones correctas:

a. La longitud de arco correspondiente a un paso (corresponde a $t \in [0, 2\pi)$ es 5π.

b. Está parametrizada por la longitud de arco.

c. Si se hace el cambio $t = \frac{s}{5}$, está parametrizada por la longitud de arco desde 0 y su ecuación es $\left(3\cos\frac{s}{5}, 3\operatorname{sen}\frac{s}{5}, 4\frac{s}{5}\right)$.

d. Ninguna de los anteriores.

Solución. Es correcta la opción c). Comenzamos calculando la longitud de arco desde $t_0 = 0$. Partimos de las ecuaciones

$$\alpha(t) = (3\cos t, 3\operatorname{sen} t, 4t).$$

Entonces:

$$\alpha'(t) = (-3\operatorname{sen} t, 3\cos t, 4),$$
$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(-3\operatorname{sen} t)^2 + (3\cos t)^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = 5.$$

Por eso, la longitud del arco determinado por $[0,t]$ es

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(t)\|\, dt = \int_0^t \sqrt{3^2+4^2} dt = \int_0^t 5dt = 5t.$$

Si hacemos el cambio de variable

$$t = \frac{s}{5},$$

la curva queda

$$\alpha(s) = \left(3\cos\frac{s}{5}, 3\mathrm{sen}\,\frac{s}{5}, \frac{4s}{5}\right)$$

y está parametrizada por la longitud de arco. Y se demuestra que la opción **c)** es correcta.

Un paso corresponde a $t \in [0, 2\pi)$. Por eso, la longitud de arco de esta hélice correspondiente a un paso es:

$$s(t) = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} 5dt = 10\pi,$$

y la opción **a)** no es correcta.