PRUEBA DE AUTOEVALUACIÓN. Tema 1

Complementos Matemáticos de la Ingeniería Industrial. Máster en Ingeniería Industrial.

Pregunta 1. Consideramos en el espacio de las funciones continuas en el intervalo $[0,1]$, $C[0,1]$, el producto escalar

$$< f, g >= \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$$

para $f, g \in C[0,1]$. Elija la o las opciones correctas:

a. Este producto escalar no proviene de una norma.

b. Las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = 3x - 2$ son ortogonales con este producto escalar.

c. Las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = 3x^2 - 2x$ son ortogonales con este producto escalar.

d. Ninguna de los anteriores.

Solución: Es correcta la opción b).

La opción a) es falsa, porque el producto escalar siembre define una norma El producto escalar de $f(x) = x$ y $g(x) = 3x - 2$ es

$$< f, g >= \int_0^1 x(3x-2)\, dx = \int_0^1 \left(3x^2 - 2x\right) dx = x^3 - x^2\Big|_0^1 = 1 - 1 = 0.$$

Por eso son ortogonales y b) es cierta. Las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = 3x^2 - 2x$ no son ortogonales con este producto escalar, porque no es 0:

$$< f, g >= \int_0^1 x\left(3x^2 - 2x\right) dx = \int_0^1 \left(3x^3 - 2x^2\right) dx = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}.$$

Pregunta 2. Se tiene la ecuación

$$x^4 + x^2y^3 - y^2 = 1.$$

Elija las opciones correctas:

a. Esta ecuación define a x como función implícita de y en un entorno de $(1,1)$.

b. Esta ecuación define a x como función implícita de y en un entorno de $(0,1)$.

c. Esta ecuación define a x como función implícita de y en un entorno de $(0,1)$.

d. Si g define a x como función implícita de y $(x = g(y))$ en un entorno de $(1,1)$, entonces $g'(1) = -\frac{1}{6}, g''(1) = \frac{43}{108}$.

e. Ninguna de los anteriores.

Solución: Es correcta la opción a).

El punto $(1,1)$ es solución de la ecuación, luego si definimos

$$f(x,y) = x^4 + x^2y^3 - y^2 - 1$$

se cumple

- $f(1,1) = 0$.
- f es una función polinómica y, por lo tanto, de clase ∞ en $\mathbb{R}^2$.
- Su jacobiano es

$$f'(x,y) = \left(4x^3 + 2xy^3, 3x^2y^2 - 2y\right),$$
$$f'(1,1) = (6,1).$$

  por lo que $\det\left(D_1 f(1,1)\right) = 6 \neq 0$.

Luego se cumplen las condiciones del Teorema de la Función implícita y existe un conjunto abierto U que contiene a $(1,1)$, un entorno abierto V de 1 y una función $h : V \to \mathbb{R}$ de clase infinito, tal que

- $\det\left(D_1 f\left(x,y\right)\right) \neq 0$ para $(x,y) \in U$.
- $\{(x,y) \in U : f\left(x,y\right) = 0\} = \{(x,y) \in U : y \in V, x = h\left(y\right)\}$.

Luego la ecuación define a x como función implícita de y en un entorno de $(1,1)$.

No es correcta la opción b) porque $(0,1)$ no es solución de la ecuación $f(x,y) = 0$.

La opción c) tampoco es correcta, porque si hacemos

$$g\left(y\right)^4 + g\left(y\right)^2 y^3 - y^2 - 1 = 0,$$

se tiene que

$$\begin{gathered}
4g\left(y\right)^3 g'\left(y\right) + 2g\left(y\right) g'\left(y\right) y^3 + 3g\left(y\right)^2 y^2 - 2y = 0, \\
12g\left(y\right)^2 g'\left(y\right)^2 + 4g\left(y\right)^3 g''\left(y\right) + 2g'\left(y\right)^2 y^3 + 2g\left(y\right) g''\left(y\right) y^3 + 12g\left(y\right) g'\left(y\right) y^2 + 6g\left(y\right)^2 y - 2 = 0.
\end{gathered}$$

Particularizando la primera igualdad en $y = 1, x = g\left(y\right) = 1$, se obtiene el valor de $g'\left(1\right)$:

$$\begin{aligned}
0 &= 4g\left(1\right)^3 g'\left(1\right) + 2g\left(1\right) g'\left(1\right) 1^3 + 3g\left(1\right)^2 1^2 - 2 \cdot 1, \\
&= 4g'\left(1\right) + 2g'\left(1\right) + 3 - 2 = 6g'\left(1\right) + 1 \Longrightarrow g'\left(1\right) = -\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Particularizando la segunda ecuación en $y = 1$, $x = g\left(y\right) = 1$, considerando que $g'\left(1\right) = -\frac{1}{6}$

$$\begin{aligned}
0 &= 12g\left(1\right)^2 g'\left(1\right)^2 + 4g\left(1\right)^3 g''\left(1\right) + 2g'\left(1\right)^2 1^3 + 2g\left(1\right) g''\left(1\right) 1^3 + 12g\left(1\right) g'\left(1\right) 1^2 + 6g\left(1\right)^2 1 - 2 \\
&= 12\left(-\frac{1}{6}\right)^2 + 4g''\left(1\right) + 2\left(-\frac{1}{6}\right)^2 + 2g''\left(1\right) + 12\left(-\frac{1}{6}\right) + 6 - 2 \\
&= \frac{1}{3} + 4g''\left(1\right) + \frac{1}{18} + 2g''\left(1\right) + 2 = 6g''\left(1\right) + \frac{43}{18} \Longrightarrow g''\left(1\right) = -\frac{43}{108}.
\end{aligned}$$

Pregunta 3. Sea f la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como

$$f(x,y) = (e^x - y, 2e^x + y).$$

Elija la o las opciones correctas:

a. Es localmente inversible en cada punto de $\mathbb{R}^2$.

b. Posee inversa global.

c. No posee inversa global.

d. Ninguna de los anteriores.

Solución: Son correctas las opciones a) y b).

Comprobamos que cumple las condiciones del teorema de la función implícita en cada punto. Cada una de las componentes son infinitamente derivables. Por eso, f es una función de clase infinito. Además, el determinante de la matriz jacobiana en un punto (x,y) es

$$\det f'\left(x,y\right) = \begin{vmatrix} e^x & -1 \\ 2e^x & 1 \end{vmatrix} = e^x + 2e^x = 3e^x.$$

Este determinante nunca vale es 0 y, por eso, la función tiene inversa local en cada punto de $\mathbb{R}^2$. Además, es inyectiva, porque nunca se cumple que $f(x,y) = f\left(x',y'\right)$ si $(x,y) \neq (x',y')$. Si esto ocurre, entonces debe ser:

$$e^x - y = e^{x'} - y' \text{ y } 2e^x + y = 2e^{x'} + y' \quad \Longleftrightarrow \quad e^x - e^{x'} = y' - y \text{ y } 2\left(e^x - e^{x'}\right) = y' - y.$$

Entonces debería ser

$$y' - y = e^x - e^{x'} = \frac{1}{2}\left(y' - y\right),$$

que sólo ocurre si $y' = y$. Pero si esto es así, entonces debe ser, además

$$e^x - e^{x'} = 0,$$

lo que significa que $x' = x$. Como $f(x,y) = f(x',y')$ sólo si se cumple que $(x,y) = (x',y')$, la función es inyectiva y tiene inversa global.

Pregunta 4. Sean los puntos $p_0 = (0,1,-1)$, $p_1 = (1,2,-1)$, $p_2 = (-1,1,0)$, $p_3 = (1,1,-1)$ una referencia afín. Entonces las coordenadas baricéntricas $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de un punto (x,y,z) respecto a esta referencia cumplen:

a. $\lambda_0 = 3 - 2z - 4y - x$,

b. $\lambda_1 = 1 + y$,

c. $\lambda_2 = z - 1 - 2y$,

d. $\lambda_3 = -2 + z + 3y + x$,

e. Ninguna de los anteriores.

Solución: Es correcta la opción **e)**. Como los vectores p_0p_1, p_0p_2 y p_0p_3 para $p_0 = (0,1,-1)$, $p_1 = (1,2,-1)$, $p_2 = (-1,1,0)$, $p_3 = (1,1,-1)$ Como

$$p_0p_1 = (1,1,0)\,, \quad p_0p_2 = (-1,0,1)\,, \quad p_0p_3 = (1,0,0)$$

son una base de $\mathbb{R}^3$, son una referencia afín.

Las coordenadas baricéntricas de un punto (x,y,z) son

$$\begin{aligned}(x,y,z) &= \lambda_0(0,1,-1) + \lambda_1(1,2,-1) + \lambda_2(-1,1,0) + \lambda_3(1,1,-1),\\ 1 &= \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3.\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}(x,y,z) &= \lambda_0(0,1,-1) + \lambda_1(1,2,-1) + \lambda_2(-1,1,0) + (1 - \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2)(1,1,-1)\\ &= (-2\lambda_2 + 1 - \lambda_0, \lambda_1 + 1, -1 + \lambda_2)\,.\end{aligned}$$

Por eso:

$$\left.\begin{array}{l} x = -2\lambda_2 + 1 - \lambda_0, \\ y = \lambda_1 + 1, \\ z = -1 + \lambda_2. \end{array}\right\}$$

Con la segunda y de la tercera ecuaciones tenemos

$$\lambda_1 = y - 1, \quad \lambda_2 = z + 1.$$

Por eso, considerando la primera ecuación, resulta:

$$x = -2\lambda_2 + 1 - \lambda_0 = -2z - 2 + 1 - \lambda_0 \Longrightarrow \lambda_0 = -2z - 2 + 1 - x.$$

Pregunta 5. Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

a. Define una isometría porque es su determinante es 1.

b. No determina una isometría porque no es una matriz ortogonal.

c. Determina una afinidad.

d. Ninguna de los anteriores.

Solución: Las opciones correctas son **b)** y **c)**.

Es cierto que sui determinante es 1, pero esta condición no es suficiente para que sea una isaometría. Las isometrías son las aplicaciones determinadas por una matriz ortogonal. Esta matriz no es ortogonal, porque $AA^t \neq I$:

$$AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por eso, la primera opción no es correcta y la segunda sí lo es.

Por otro lado, las isometrías son afinidades, y por eso, la tercera opción es correcta.

Pregunta 6. Después de ejecutar la sentencia `[1,3].[2,1]/(sqrt([1,3].[1,3])*sqrt([2,1].[2,1]));` en Maxima hemos obtenido

a. El ángulo formado por dos vectores.

b. Una derivada parcial.

c. El coseno del ángulo formado por dos vectores.

d. Ninguna de los anteriores.

Solución. Es cierta la opción c. Puesto que la expresión calcula $\frac{(1,3)(2,1)}{\|(1,3)\|\|(2,1)\|}$.