SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS DEL EXAMEN FINAL DE ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA DEL 25/01/2016.

1. Calcular la integral
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^4} dx.$$
Indicación: aplicar el teorema de los residuos integrando $f(z) = e^{iz}/(1+z^4)$ en el semidisco superior de centro 0 y radio R.

Solución: La función $f(z) = e^{iz}/(1+z^4)$ es meromorfa, con polos simples en $e^{\pi i/4}, e^{3\pi i/4}, e^{-\pi i/4}, e^{-3\pi i/4}$ (que son los puntos donde el denominador se anula, es decir, las raíces cuartas de -1). De estos polos sólo $e^{\pi i/4}$ y $e^{3\pi i/4}$ se encuentran en el semidisco $D_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R, \mathrm{Im}(z) > 0\}$, para todo $R > 1$. Los residuos de f en estos polos son:
$$\mathrm{Res}(f, e^{\pi i/4}) = \left.\frac{e^{iz}}{\frac{d}{dz}(1+z^4)}\right|_{z=e^{\pi i/4}} = \frac{e^{i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}{4\left(e^{\pi i/4}\right)^3} = \frac{1}{4}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}e^{i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)},$$
y análogamente
$$\mathrm{Res}(f, e^{3\pi i/4}) = \frac{1}{4}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}e^{-i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{9\pi}{4}\right)}.$$
Por el teorema de los residuos tenemos entonces
$$\int_{\partial D_R} \frac{e^{iz}}{1+z^4}dz = 2\pi i\left(\frac{1}{4}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}e^{i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)} + \frac{1}{4}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}e^{-i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{9\pi}{4}\right)}\right) =$$
$$\frac{\pi i}{2}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(e^{i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)} + e^{-i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{9\pi}{4}\right)}\right).$$

Por otro lado, si Γ_R denota la semicircunferencia superior, con su parametrización usual $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, tenemos
$$\int_{\partial D_R} \frac{e^{iz}}{1+z^4}dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{1+x^4}dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^4}dz.$$
La última de estas integrales podemos acotarla como sigue:
$$\left|\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^4}dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{it}}}{1+R^4e^{i4t}}Rie^{it}dt\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{e^{i(R\cos t + Ri\,\mathrm{sen}\, t)}}{1+R^4e^{i4t}}Rie^{it}dt\right|$$
$$\leq \int_0^{\pi} \frac{\left|e^{i(R\cos t+Ri\,\mathrm{sen}\, t)}\right| R}{R^4-1}dt = \int_0^{\pi} \frac{e^{-R\,\mathrm{sen}\, t}R}{R^4-1}dt \leq \frac{\pi R}{R^4-1},$$
ya que $\mathrm{sen}\, t \geq 0$ si $t \in [0, \pi]$, y entonces se deduce tomando límites cuando $R \to \infty$ que
$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^4}dz = 0,$$
y por tanto
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^4}dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{1+x^4}dx = \lim_{R\to\infty}\int_{\partial D_R} \frac{e^{iz}}{1+z^4}dz = \frac{\pi i}{2}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(e^{i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)} + e^{-i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{9\pi}{4}\right)}\right).$$
Puesto que
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^4}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^4}dx = +i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}\, x}{1+x^4}dx,$$

tomando partes reales deducimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^4} dx = \operatorname{Re}\left(\frac{\pi i}{2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(e^{i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)} + e^{-i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{9\pi}{4}\right)}\right)\right) =$$
$$\frac{\pi}{2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{9\pi}{4}\right)\right),$$

expresión que se simplifica, usando la fórmula del seno de la suma, en

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^4} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right).$$

2. Sean f una función holomorfa definida en un entorno de z_0. Supongamos que z_0 es cero de orden 4 de la derivada f', y pongamos $w_0 = f(z_0)$. Demostrar que:

1. Existe $\rho > 0$ tal que $f'(z) \neq 0$ y $f(z) \neq w_0$ para todo $z \in \overline{D}(z_0, \rho) \setminus \{z_0\}$.
2. Existe $\delta > 0$ tal que para todo $w \in D(w_0, \delta) \setminus \{w_0\}$, la ecuación $f(z) = w$ tiene exactamente 5 soluciones distintas en $D(z_0, \rho)$.

Solución: 1. Por el teorema de identidad sabemos que los ceros de la derivada f' son aislados en el dominio de f, luego existe $\rho_1 > 0$ tal que $f'(z) \neq 0$ si $z \in D(z_0, \rho_1) \setminus \{z_0\}$. Por la misma razón los ceros de $f(z) - w_0$ son aislados, luego existe $\rho_2 > 0$ tal que $f(z) - w_0 \neq 0$ si $z \in D(z_0, \rho_2) \setminus \{z_0\}$. Tomando $\rho = \text{mín}\{\rho_1, \rho_2\}$ se obtiene que

$$f'(z) \neq 0 \neq f(z) - w_0 \text{ para todo } z \in D(z_0, \rho) \setminus \{z_0\}.$$

2. Definamos

$$\delta := \min_{z \in \partial D(z_0, \rho)} |f(z) - w_0|,$$

que es estrictamente positivo por ser $f(z) - w_0$ continua y no nula en el compacto $\partial D(z_0, \rho)$. Dado $w \in D(w_0, \delta) \setminus \{w_0\}$, consideremos

$$g(z) := f(z) - w = (f(z) - w_0) + (w_0 - w) := \varphi(z) + \psi(z).$$

Por la definición de δ se tiene que $|\psi| < \delta \leq |\varphi|$ en $\partial D(z_0, \rho)$. Entonces, por el teorema de Rouché, g tiene el mismo número de ceros que φ en el disco $D(z_0, \rho)$. Puesto que φ tiene un cero de orden 5 en z_0 y no tiene más ceros en $D(z_0, \rho)$, g debe tener 5 ceros en $D(z_0, \rho)$. Además, los ceros de g en $D(z_0, \rho)$, que se corresponden con las soluciones de la ecuación $f(z) = w$ en $D(z_0, \rho)$, son necesariamente distintos, ya que por un lado $g(z_0) = w_0 - w \neq 0$, y por otro lado, si g tuviera un cero de orden mayor o igual que dos en un punto de $D(z_0, \rho) \setminus \{z_0\}$, ese cero sería un cero de la derivada de g, que coincide con f', y f' no tiene ceros en $D(z_0, \rho) \setminus \{z_0\}$.

3. Sea $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ continua tal que f es holomorfa en $\mathbb{D}$, y supongamos que f es constante en $\partial\mathbb{D}$. Demostrar que entonces f es constante en $\mathbb{D}$.

Solución: Hay muchas formas de solucionar este problema. Una solución consiste en imitar la demostración del principio de reflexión de Schwarz para probar que existe un entorno abierto U de $\overline{\mathbb{D}}$ tal que f tiene una extensión holomorfa definida en U. Como dicha extensión es constante en $\partial\mathbb{D}$, se deduce del teorema de identidad que la extensión es constante en U, y en particular f es constante en $\mathbb{D}$. La desventaja de esta solución es que es larga de escribir, y su ventaja es que la misma estrategia permite demostrar algo más fuerte: basta que f sea constante en un arco de $\partial\mathbb{D}$ para obtener el mismo resultado (probando que existe un disco $D(z_0, r)$ centrado en un punto z_0 del interior relativo de dicho arco tal que f tiene una extensión holomorfa a $\mathbb{D} \cup D(z_0, r)$, y luego aplicando el teorema de identidad). No daremos los detalles de esa demostración.

Otra posible solución más avanzada es: llamemos c a la constante a la que es igual f en $\partial\mathbb{D}$. La parte real de f es una función armónica en $\mathbb{D}$ y por tanto es la solución del problema de Dirichlet en el disco $\Delta u = 0$ en $\mathbb{D}$, $u = \mathrm{Re}(f)$ en $\partial\mathbb{D}$. Como la función constante $\mathrm{Re}(c)$ es solución de este problema y el problema tiene solución única, se deduce que $\mathrm{Re}(f)$ es constante, igual a $\mathrm{Re}(c)$. Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, sabemos que esto implica que f es constante.

La solución quizás más natural, y la que yo esperaba que la mayoría de vosotros descubriera (como así ha sido, entre las soluciones correctas entregadas) es la siguiente: llamemos c a la constante a la que es igual f en $\partial\mathbb{D}$. Si $|z| < 1$, para todo r con $|z| < r < 1$, por la fórmula integral de Cauchy tenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{re^{it} - z} rie^{it} dt,$$

y tomando límites cuando $r \to 1^-$ obtenemos

$$\begin{aligned} f(z) &= \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{re^{it}-z} rie^{it} dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \lim_{r\to 1^-} \frac{f(re^{it})}{re^{it}-z} rie^{it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{e^{it}-z} ie^{it} dt \frac{c}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}-z} dt = \frac{c}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1}{\xi - z} d\xi = c\,W(\partial\mathbb{D}, z) = c, \end{aligned}$$

donde el intercambio de límite e integral puede justificarse diciendo que como la función $\xi \mapsto i\xi f(\xi)/(\xi - z)$ es uniformemente continua en el compacto $\{\xi \in \mathbb{C} : \frac{1+|z|}{2} \leq |\xi| \leq 1\}$ se tiene que

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{f(re^{it})}{re^{it}-z} ire^{it} = \frac{f(e^{it})}{e^{it}-z} ie^{it}$$

uniformemente en $t \in [0, 2\pi]$.

4. Sean Ω abierto de $\mathbb{C}$, y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ diferenciable en sentido real, con Df continua. Supongamos que

$$\int_{\partial D} f = 0$$

para todo disco cerrado D contenido en Ω. Demostrar que entonces f es holomorfa en Ω.

Solución: Como f es de clase C^1 en Ω, basta ver que $f = u + iv$ cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$(CR) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

para obtener que es holomorfa. Supongamos que existiera algún punto $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ en donde las ecuaciones (CR) no se cumplen; por ejemplo, supongamos que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) > \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

(el razonamiento es complétamente análogo en el resto de casos). Entonces, como $\partial u/\partial x$ y $\partial v/\partial y$ son continuas, existe un disco $D = D(z_0, r)$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} > 0$$

en $\overline{D}$, y por tanto

$$0 < \int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy. \qquad (*)$$

Por hipótesis tenemos $\int_{\partial D} f = 0$, y si $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a,b]$ es una parametrización de ∂D deducimos, usando el teorema de Green, que

$$0 = \int_\gamma f = \int_a^b \left(u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t))\right)\gamma'(t)dt = \int_a^b \left(u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t))\right)\big(x'(t) + iy'(t)\big)\,dt =$$
$$\int_a^b \big(u(\gamma(t))x'(t) - v(\gamma(t))y'(t)\big)\,dt + i\int_a^b \big(u(\gamma(t))y'(t) - v(\gamma(t))x'(t)\big)\,dt =$$
$$\int_{\partial D} udx - vdy + i\int_{\partial D} vdx + udy = \int_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i\int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy,$$

de donde, igualando partes imaginarias,

$$0 = \int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy,$$

lo que contradice $(*)$. $\square$

Aunque lo que sigue no es parte de la solución del problema propuesto, veamos que la hipótesis de que f sea de clase C^1 es innecesaria en el problema anterior: basta que f sea continua para tener el mismo resultado. Es decir, el teorema de Morera es válido si se cambian triángulos por círculos.[1]

Sea $(\delta_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ la familia de *mollifiers* definida en la página 119 de los apuntes, que es un núcleo de sumabilidad y por tanto cumple la Proposición 11.4 de la página 118. Es decir, se tiene que $\lim_{\varepsilon\to 0} f*\delta_\varepsilon = f$ uniformemente en cada compacto contenido en Ω, y además, por la Proposición 11.3, $f*\delta_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$, donde $\Omega_\varepsilon = \{z \in \Omega : d(z, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. Además, si D es un disco cerrado tal que $D + D(0,\varepsilon) \subset \Omega$ y $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ parametriza ∂D, se tiene, usando el teorema de Fubini y la hipótesis de que la integral de f en cada circunferencia es cero,

$$\int_{\partial D} (f*\delta_\varepsilon)(z)dz = \int_{\partial D}\left(\int_{\mathbb{R}^2} f(z-w)\delta_\varepsilon(w)dw\right)dz = \int_a^b \left(\int_{\mathbb{R}^2} f(\gamma(t)-w)\delta_\varepsilon(w)dw\right)\gamma'(t)dt$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_a^b f(\gamma(t)-w)\gamma'(t)dt\right)\delta_\varepsilon(w)dw = \int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{-w+\partial D} f\right)dw = \int_{\mathbb{R}^2} 0\,dw = 0.$$

Por la solución del problema 4 deducimos que $f*\delta_\varepsilon$ es holomorfa en Ω_ε. Ahora bien, como el límite, uniforme en compactos, de cualquier sucesión de funciones holomorfas es holomorfa, obtenemos, tomando por ejemplo $\varepsilon_n = 1/n$, que $f = \lim_{n\to\infty} f*\delta_{\varepsilon_n}$ es holomorfa en $\Omega_{\varepsilon_{n_0}}$ para cualquier $n_0 \in \mathbb{N}$, y por tanto también holomorfa en Ω.

[1] De hecho, se desprende de la solución del problema y de lo que sigue que el teorema de Morera es también válido si se cambian triángulos por traslaciones y homotecias de cualquier curva cerrada simple fija, de clase C^1 a trozos (por ejemplo, un cuadrado, o un rectángulo).