

Dinámica de un sistema de partículas y del sólido rígido

POR

Álvaro García López

Resumen

En estas notas se introducen los conceptos fundamentales necesarios para el estudio de sistemas formados por muchas partículas que interactúan entre sí. Dichos conceptos se aplicarán al estudio de la dinámica de los cuerpos no deformables o rígidos.

1 Centro de masas de un sistema de partículas

En primer lugar, hemos de definir un concepto que será clave en el estudio de la dinámica de un sistema de partículas. Dicho concepto es el de **centro de masas**. El centro de masas se define como la media ponderada de los vectores de posición de cada partícula del sistema con respecto a su masa correspondiente. Se definirá para sistemas discretos formados por partículas puntuales y también para cuerpos extensos continuos.

1.1 Sistema discreto de partículas

Si tenemos un sistema de N partículas puntuales, cada una con una masa m_i , el centro de masas viene dado por la expresión

$$\mathbf{r}_{\text{cm}}(t) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} \mathbf{r}_i(t), \quad (1)$$

donde $\mathbf{r}_i(t)$ es el vector posición de la partícula i -ésima del sistema y M es la masa total del sistema (la suma de todas las masas de las partículas). El sumatorio puede expandirse y la masa total salir como factor común del mismo. Entonces el centro de masas se expresa de la forma

$$\mathbf{r}_{\text{cm}}(t) = \frac{m_1 \mathbf{r}_1(t) + m_2 \mathbf{r}_2(t) + \dots + m_N \mathbf{r}_N(t)}{M}.$$

A partir de la definición anterior, se calcula de forma inmediata la velocidad del centro de masas

$$\mathbf{v}_{\text{cm}}(t) = \frac{d\mathbf{r}_{\text{cm}}}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \Rightarrow \boxed{\mathbf{v}_{\text{cm}}(t) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} \mathbf{v}_i(t)},$$

y también la aceleración

$$\mathbf{a}_{\text{cm}}(t) = \frac{d\mathbf{v}_{\text{cm}}}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \Rightarrow \boxed{\mathbf{a}_{\text{cm}}(t) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} \mathbf{a}_i(t)}.$$

En la Fig.1 vemos un sistema de partículas junto con su centro de masas. Nótese que el centro de masas no es necesariamente un punto material (un punto ocupado por una partícula) del sistema.

1.2 Sistema continuo

En ciertas ocasiones el número de partículas es tan grande que es más conveniente describir el cuerpo como un **medio continuo**. En dicho caso, el cálculo del centro de masas se realiza de la misma forma mediante un paso al límite, que reemplaza el sumatorio por una integral. Primero dividimos el cuerpo en pequeñas porciones cúbicas de masa Δm_i y volumen ΔV_i , centradas cada una de ellas en el punto \mathbf{r}_i (ver Fig.2). Si dicho cubo es suficientemente grande como para considerar que la densidad volumétrica es una función continua dentro del mismo, podemos aproximar la masa como $\Delta m_i = \rho(\mathbf{r}_i, t)\Delta V_i$. Entonces, es posible aproximar el centro de masas de la forma

$$\mathbf{r}_{\text{cm}}(t) \approx \sum_{i=1}^N \frac{\Delta m_i}{M} \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{M} \rho(\mathbf{r}_i, t) \mathbf{r}_i \Delta V_i,$$

siempre que los cubos sean suficientemente pequeños. Si los cubos se hacen infinitamente pequeños, podemos considerar el límite $N \rightarrow \infty$ y $\Delta V \rightarrow 0$, lo que nos permite escribir

$$\mathbf{r}_{\text{cm}}(t) = \frac{1}{M} \int \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{r} dV,$$

donde la masa total se calcula de la forma

$$M = \int \rho(\mathbf{r}, t) dV.$$

En la práctica, el diferencial de volumen ha de ser bastante más grande que el tamaño de las partículas, para que $\rho(\mathbf{r})$ se pueda considerar una función continua. Este diferencial, suficientemente pequeño para poder aplicar las reglas del cálculo infinitesimal, y al mismo tiempo suficientemente grande, como para que quepan tantas partículas como para poder hacer una descripción continua fidedigna, se denomina **diferencial macroscópico de volúmen**.

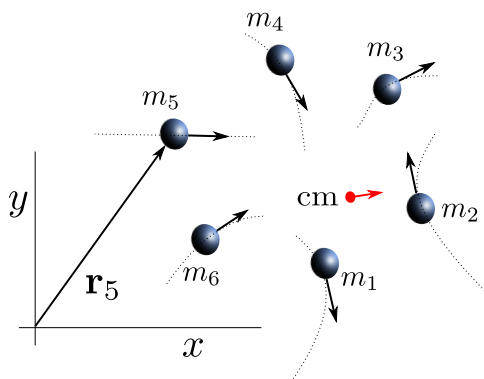


Figura 1. Un sistema formado por seis partículas en el plano XY moviéndose a lo largo de sus trayectorias respectivas. En color rojo se muestra el centro de masas del sistema.

Nótese que en estas expresiones se ha omitido la dependencia temporal en los vectores de posición que aparecen en el integrando, y se ha incorporado en la densidad del cuerpo. El volumen de integración es todo el espacio, si asumimos que fuera del cuerpo la densidad es nula (otra posibilidad es considerar explícitamente los límites de integración). Es decir, consideramos los puntos \mathbf{r} como puntos del espacio y vemos cuales de ellos están ocupados, de manera que los movimientos del cuerpo se reflejan como cambios de densidad $\rho(\mathbf{r}, t)$ en todo el espacio. Esta descripción está basada en la descripción euleriana del medio continuo, si bien en esta introducción no será necesaria exponerla, pues no estudiaremos deformaciones de los cuerpos. Por lo tanto, bastará con saber calcular el centro de masas de un medio continuo en un instante dado, de la forma

$$\mathbf{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \int_V \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} dV,$$

donde la integración se hace sólo en el volumen ocupado por el cuerpo. En particular, trabajaremos casi siempre con **cuerpos homogéneos**, es decir, cuya densidad es constante en el espacio. En estos casos se tiene que

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{dm}{dV} = \text{cte.} \Rightarrow \int_0^M dm = \rho \int_0^V dV \Rightarrow \rho = \frac{M}{V}.$$

El centro de masas no debe confundirse con el **centro de gravedad** de un cuerpo (sólo coinciden cuando el campo gravitatorio es constante), que es el punto respecto del cual el momento de fuerza neto ejercido por el campo gravitatorio es nulo. Es decir, que independientemente de como “colgásemos” el cuerpo en reposo por dicho punto de la pared, el cuerpo no se movería. Tampoco debe confundirse con el **centroide** o centro geométrico del cuerpo (sólo coinciden para cuerpos homogéneos), esto es, la media aritmética de los vectores posición. En lo que a este curso concierne, los tres serán el mismo punto.

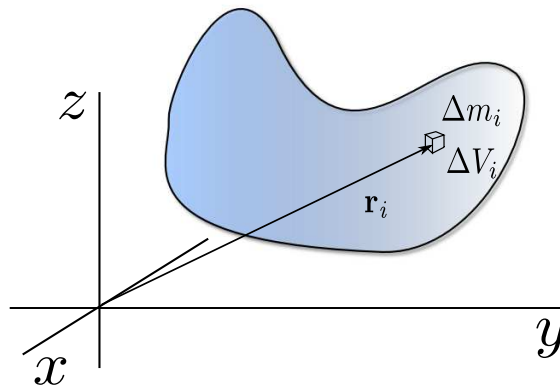


Figura 2. Diferencial macroscópico de volumen en un medio continuo inmerso en el espacio euclídeo tridimensional.

1.3 Ejemplos

En primer lugar, consideremos dos masas m_1 y m_2 , situadas en todo momento en extremos opuestos del diámetro de un tío vivo, de manera que sus respectivos vectores de posición son $\mathbf{r}_1 = (\cos t, \sin t) m$ y $\mathbf{r}_2 = -(\cos t, \sin t) m$. Por lo tanto, ambos se mueven con movimiento circular uniforme de radio un metro. El centro de masas se calcula de la forma

$$\mathbf{r}_{\text{cm}}(t) = \frac{m_1}{M} \mathbf{r}_1(t) + \frac{m_2}{M} \mathbf{r}_2(t) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} (\cos t, \sin t),$$

y describe un movimiento circular de radio $r_{cm} = \Delta m / M$. Si las masas son iguales, el centro coincide con el centro de la circunferencia original. Este ejemplo es equivalente a dos partículas unidas por una varilla, lo que representa el caso de solido rígido más sencillo que cabe imaginar.

En segundo lugar, dado que las integrales de volumen y de área no tienen por qué saber calcularse en un curso de primero de mecánica, ilustraremos los ejemplos continuos con cuerpos unidimensionales o con una simetría apropiada. En concreto, calculemos el centro de masas para una barra homogénea unidimensional dispuesta a lo largo del eje X , desde el origen hacia el punto $\mathbf{r}_l = (l, 0, 0)$, en la dirección positiva (ver Fig.3). Al tratarse de un cuerpo homogéneo unidimensional, tenemos que la densidad longitudinal de masa es constante, y viene dada por

$$\lambda(x) = \frac{dm}{dx} = \text{cte.} \Rightarrow \int_0^M dm = \lambda \int_0^L dx \Rightarrow M = \lambda L.$$

Los puntos del cuerpo no están más que en el eje X , de manera que $\mathbf{r} = (x, 0, 0)$. Por lo tanto, el centro de masas vendrá dado por

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int_0^L \lambda(\mathbf{r}) \mathbf{r} dx = \frac{\lambda}{M} \int_0^L x dx \mathbf{i} = \frac{\lambda L^2}{2M} \mathbf{i} = \frac{L}{2} \mathbf{i}.$$

Es decir, en el centro de la barra, como cabía esperar. Ahora supongamos que la densidad varía con la distancia en el eje X , según una relación lineal de forma $\lambda(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x$. En este caso tenemos que la masa es

$$M = \int_0^M dm = \int_0^L \lambda(x) dx = \lambda_0 L + \lambda_1 \frac{L^2}{2} \Rightarrow M = L \left(\lambda_0 + \frac{1}{2} \lambda_1 L \right).$$

Ahora calculamos el centro de masas, obteniendo el resultado

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{cm} &= \frac{1}{M} \int_0^L \lambda(x) x dx \mathbf{i} = \frac{\lambda_0}{M} \int_0^L x dx \mathbf{i} + \frac{\lambda_1}{M} \int_0^L x^2 dx \mathbf{i} = \\ &= \frac{1}{M} \left(\frac{\lambda_0 L^2}{2} + \frac{\lambda_1 L^3}{3} \right) \mathbf{i} \end{aligned}$$

lo que nos permite escribir

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{L}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\lambda_1 L}{2\lambda_0 + \lambda_1 L} \right) \mathbf{i},$$

que es un resultado mucho menos evidente. Nótese que al aumentar la densidad a lo largo del eje X , el centro de masas está más pegado hacia el extremo derecho de la barra, pues $r_{cm} > L/2$.

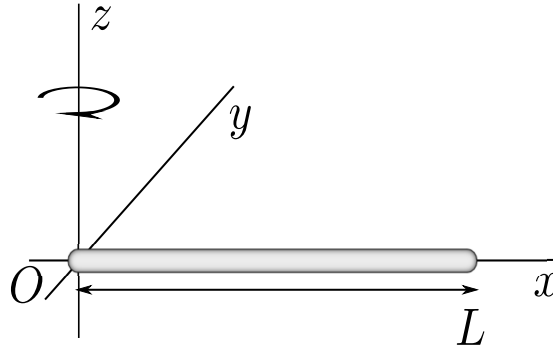


Figura 3. Una barra de longitud L rotando respecto de un extremo en torno al eje Z .

2 Separación de la dinámica

La dinámica de un sistema de partículas puntuales puede desglosarse en **dos tipos de movimientos**, que en ocasiones pueden encontrarse acoplados. El movimiento del centro de masas y el movimiento respecto del centro de masas. En particular, para el caso de sólidos rígidos tendremos **movimiento del centro de masas y rotaciones** respecto del mismo. A tal efecto, se fija un sistema de referencia no inercial O^* en el centro de masas, preferiblemente con los ejes orientados paralelamente a otro sistema de referencia inercial O , situado en un punto del espacio absoluto cualquiera. En este caso, podemos escribir la posición de la partícula i -ésima, representada por el vector $\mathbf{r}_i(t)$, como la suma del vector posición del centro de masas más la posición respecto del sistema de referencia no inercial situado en él, tal y como se muestra en la Fig.4. Matemáticamente, tenemos que

$$\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{r}_{\text{cm}}(t) + \mathbf{r}_i^*(t).$$

Antes de introducir la segunda ley de Newton para el centro de masas de un sistema de partículas, demostremos una serie de resultados de gran importancia, como es, para comenzar, el hecho de que **el momento lineal del sistema respecto del centro de masas es cero**. Tenemos que

$$M\mathbf{v}_{\text{cm}} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i(t) = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_{\text{cm}}(t) + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^*(t),$$

o lo que es lo mismo

$$M\mathbf{v}_{\text{cm}} = M\mathbf{v}_{\text{cm}} + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^*(t).$$

De esta última ecuación se deduce claramente que

$$\mathbf{p}^*(t) = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^*(t) = 0,$$

de donde se colige que

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i(t) = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_{\text{cm}}(t) + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^*(t) = M\mathbf{v}_{\text{cm}}(t).$$

Esto mismo ocurre con el vector posición

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i^*(t) = 0.$$

Lo que viene a decir que el centro de masas respecto del sistema de referencia del centro de masas es el origen.

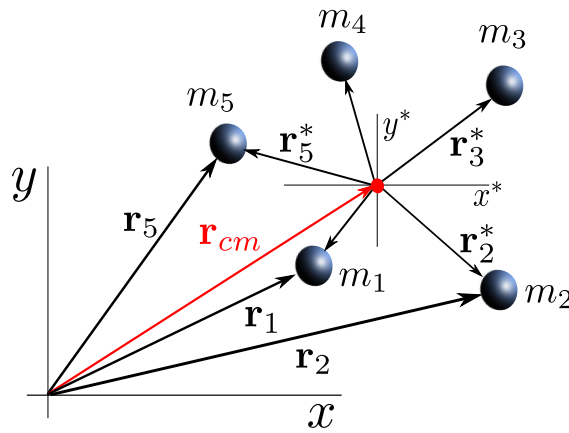


Figura 4. Sistema de referencia del centro de masas O^* junto con un sistema de referencia inercial O fijado en el espacio absoluto newtoniano.

Derivando la ecuación anterior respecto del tiempo, obtenemos que también se cumple que el promedio de las aceleraciones respecto del centro de masas

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i^*(t) = 0, \quad (2)$$

es nulo, lo cual implica que la variación de momento total está relacionada con la aceleración del centro de masas

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = M\mathbf{a}_{\text{cm}}(t). \quad (3)$$

3 Dinámica del centro de masas

Ahora consideremos la segunda ley de Newton. Supongamos que sobre cada partícula actúan una serie de **fuerzas externas** que dan lugar a una fuerza neta $\mathbf{F}_j^{(\text{ext})}$ sobre la partícula j -ésima, además de las fuerzas internas que resultan de las interacciones entre dicha partícula y las partículas restantes del sistema. Podemos representar la fuerza que ejerce la partícula i -ésima sobre la j -ésima de la forma $\mathbf{F}_{ij}^{(\text{int})}$. Además, supondremos que se cumple la tercera ley de Newton, por lo que se cumple que $\mathbf{F}_{ij}^{(\text{int})} = -\mathbf{F}_{ji}^{(\text{int})}$. La segunda ley de Newton aplicada a la partícula j -ésima es entonces

$$m_j \mathbf{a}_j(t) = \mathbf{F}_j^{(\text{ext})} + \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij}^{(\text{int})}, \quad (4)$$

donde el sumatorio es entre índices i distintos del j , dado que un cuerpo no interactúa consigo mismo. Si ahora sumamos a todas las partículas del cuerpo tenemos que

$$\sum_{j=1}^N m_j \mathbf{a}_j(t) = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j^{(\text{ext})} + \sum_{j=1}^N \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij}^{(\text{int})}.$$

El primer término es igual a $M\mathbf{a}_{\text{cm}}$, como se deduce de la ecuación (2). De los de la derecha el primero es la fuerza exterior total ejercida sobre el cuerpo. Se demostrará ahora que el de la derecha del todo es cero. Tenemos que

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij}^{(\text{int})} = \sum_{i < j} \mathbf{F}_{ij}^{(\text{int})} + \sum_{i > j} \mathbf{F}_{ij}^{(\text{int})} = \sum_{i < j} \mathbf{F}_{ij}^{(\text{int})} + \sum_{j > i} \mathbf{F}_{ji}^{(\text{int})},$$

donde en el segundo paso hemos separado el sumatorio en los dos índices (siempre distintos) según los términos en los que el primer índice es menor y aquellos en los que es mayor. En el segundo paso hemos renombrado los índices, cambiando el uno por el otro (renombrando el i por el j y viceversa). Teniendo en cuenta la tercera ley de Newton obtenemos que

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij}^{(\text{int})} = \sum_{i < j} \mathbf{F}_{ij}^{(\text{int})} - \sum_{j > i} \mathbf{F}_{ij}^{(\text{int})} = 0.$$

Si no se ven claramente los razonamientos anteriores con los sumatorios, se recomienda al alumno escribir todos los términos explícitamente por columnas, de la forma

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij}^{(\text{int})} &= \mathbf{F}_{21}^{(\text{int})} + \mathbf{F}_{31}^{(\text{int})} + \dots + \mathbf{F}_{N1}^{(\text{int})} + \\ &+ \mathbf{F}_{12}^{(\text{int})} + \mathbf{F}_{32}^{(\text{int})} + \dots + \mathbf{F}_{N2}^{(\text{int})} + \\ &+ \mathbf{F}_{13}^{(\text{int})} + \mathbf{F}_{23}^{(\text{int})} + \dots + \mathbf{F}_{N3}^{(\text{int})} + \\ &+ \dots + \\ &+ \dots + \\ &+ \mathbf{F}_{1N}^{(\text{int})} + \mathbf{F}_{2N}^{(\text{int})} + \dots + \mathbf{F}_{N-1N}^{(\text{int})} \end{aligned}$$

Ciertamente, se observa que, para todo término de la forma $\mathbf{F}_{ij}^{(\text{int})}$ está su correspondiente $\mathbf{F}_{ji}^{(\text{int})}$, como se muestra con los colores. Estos términos se cancelan entre sí, por la tercera ley de Newton. Por lo tanto, tenemos que **la fuerza neta exterior es igual a la aceleración del centro de masas**. Matemáticamente se tiene que

$$\boxed{\mathbf{F}^{(\text{ext})} = M\mathbf{a}_{\text{cm}}}. \tag{5}$$

En el caso de cuerpos continuos, esta ecuación se denomina **primera ley de Euler** del movimiento, y aplica a cualquier subconjunto del sistema de partículas. Un corolario de este teorema es que, en un sistema de partículas sobre el que no actúan fuerzas externas, el centro de masas lleva un movimiento rectilíneo uniforme. Además, para todo sistema sobre el que no actúan fuerzas externas se tiene que el **momento lineal total del sistema se conserva**. Matemáticamente

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = M\mathbf{a}_{\text{cm}}(t) = \mathbf{F}^{(\text{ext})}, \mathbf{F}^{(\text{ext})} = 0 \Rightarrow \boxed{\mathbf{p}(t) = \text{cte}}.$$

Este principio será de enorme utilidad para resolver problemas de colisiones entre partículas.

4 Momento angular y torque de un sistema de partículas

Para caracterizar los movimientos de rotación de las partículas del sistema respecto del centro de masas, utilizaremos los conceptos de **momento angular** y de **momento de una fuerza** o torque. Dado un sistemas de referencia, se define el momento angular de una partícula de la forma

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}.$$

En el caso de un movimiento rectilíneo, es posible coger apropiadamente el sistema de referencia, de tal forma que lo vectores \mathbf{r} y \mathbf{v} sean paralelos, con lo que el momento angular se anulará. Así pues, el momento angular denota **cantidad de movimiento rotacional**. Derivando el momento angular, se tiene que

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{r} \times m\mathbf{a} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Se define así el **momento de una fuerza o torque** \mathbf{M} , de la forma

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Dese cuenta el lector de que estos dos conceptos son los equivalentes rotacionales del momento lineal y de la fuerza, respectivamente. Al aparecer un producto vectorial, se garantiza que si los vectores son paralelos, dichas variables se anulan, lo que corresponde o bien a movimientos rectilíneos, ya sean acelerados o no; o bien a campos centrales, para los cuales $\mathbf{r} \parallel \mathbf{F}$.

De la misma forma, el momento angular total de un sistema de partículas viene dado por la suma de todos los momentos angulares del cada una de ellas

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i,$$

respecto de un sistema de referencia inercial dado.

Veamos ahora que el momento angular puede descomponerse como la suma del momento angular del centro de masas y el momento angular respecto del centro de masas. Utilizando la descomposición $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{cm} + \mathbf{r}_i^*$, tenemos que

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_{cm} \times \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i^* \times \mathbf{v}_i,$$

y por lo tanto

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_{cm} \times \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i + \left(\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i^* \right) \times \mathbf{v}_{cm} + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i^* \times \mathbf{v}_i^*.$$

El segundo término de la anterior igualdad es cero, y por lo tanto obtenemos el resultado

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{cm} + \mathbf{L}^*.$$

Por otro lado, veamos que el momento angular del centro de masas obedece la ecuación

$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}_{cm}}{dt} = \mathbf{M}_{cm}^{(ext)}}.$$

La demostración es bien sencilla

$$\frac{d\mathbf{L}_{cm}}{dt} = M \mathbf{r}_{cm} \times \frac{d\mathbf{v}_{cm}}{dt} = M \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{a}_{cm} = \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{F}^{(ext)}.$$

Esto no es más que **la segunda ley de Newton para un sistema de partículas, planteada en términos de variables de rotación**, en lugar de como figura en la ecuación (5). Cabe recordar que la fuerza que se ejerce sobre el centro de masas es la **fuerza total externa sobre el sistema**, y que las fuerzas internas no pueden cambiar la velocidad del centro de masas, como se demostró en secciones anteriores. Por otro lado, el momento angular total del sistema verifica que

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_{cm}^{(ext)} + \mathbf{M}^{*(ext)}.$$

Esta ecuación se conoce como **la segunda ley de Euler del movimiento**. Esto puede comprobarse de forma bien sencilla teniendo en cuenta que

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(ext)} + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}^{(int)}.$$

El segundo término de la derecha es nulo, como se demuestra a continuación. Partimos de la igualdad

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i \neq j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}^{(\text{int})} = \sum_{i < j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}^{(\text{int})} + \sum_{i > j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}^{(\text{int})},$$

donde se ha utilizado una argumentación idéntica a la utilizada más arriba. También apoyándonos en dicho juego con los sumatorios, podemos escribir

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i \neq j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}^{(\text{int})} = \sum_{i < j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}^{(\text{int})} + \sum_{j > i} \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji}^{(\text{int})},$$

lo que, renombrando índices al igual que antes y teniendo en cuenta la tercera ley, permite escribir

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i \neq j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}^{(\text{int})} = \sum_{i < j} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij}^{(\text{int})}.$$

Ahora bien, si las fuerzas de las partículas están dirigidas a lo largo de la línea que las une, se tiene que $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \parallel \mathbf{F}_{ij}^{(\text{int})}$ y la suma anterior es nula. Esto es así para los **campos estáticos fundamentales** expuestos en los temas previos. Sin embargo, no se cumple rigurosamente para casos en los que las partículas estén en movimiento (entonces hay componentes radiativas de los campos). En todo caso, para la mayoría de las situaciones, constituye una magnífica aproximación. Tenemos, por lo tanto, que

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{F}_i^{(\text{ext})} + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i^* \times \mathbf{F}_i^{(\text{ext})},$$

y en consecuencia

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{F}^{(\text{ext})} + \mathbf{M}^{*(\text{ext})}.$$

De las ecuaciones anteriores se deduce que **la variación del momento angular total del cuerpo respecto del centro de masas es igual al torque neto ejercido respecto de dicho punto**. Es decir que se cumple

$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}^*}{dt} = \mathbf{M}^{*(\text{ext})}}.$$

En conclusión, el movimiento del sólido se reduce a **estudiar la dinámica del centro de masas y la dinámica respecto de él**. El procedimiento de resolución de problemas será siempre el mismo. Todas las fuerzas externas que actúen sobre puntos específicos del cuerpo, actuarán sobre el centro de masas. Con ellas se plantean las ecuaciones para el centro de masas como cuando se estudiaban partículas puntuales. Posteriormente, se computa el torque de fuerzas ejercido respecto del centro de masas, para estudiar la rotación del cuerpo. Finalmente, cuando sea preciso, se tienen en cuenta las condiciones de ligadura que se exponen en la Sec. 10.

Para concluir, nótese el corolario que acabamos de demostrar. A saber, que el **momento angular total** en un sistema sobre el que no actúan fuerzas externas es una **cantidad conservada**

$$\mathbf{F}^{(\text{ext})} = 0 \Rightarrow \mathbf{M}_{cm}^{(\text{ext})} = \mathbf{M}^{*(\text{ext})} = 0 \Rightarrow \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\mathbf{L} = \text{cte}}.$$

Lo cual es cierto si los campos son de la naturaleza dicha. En otras palabras, el principio de **conservación del momento angular es independiente de las leyes de Newton**, y sólo halla plena justificación en la naturaleza de los campos y la evidencia empírica.

5 Teorema de König

Procedemos a ver el teorema de König, el cual afirma que:

“La energía cinética de un sistema de partículas puede descomponerse como la energía cinética del centro de masas, más la energía respecto del centro de masas”.

Este teorema fue demostrado por vez primera Johan Samuel König, un matemático del siglo XVIII, contemporáneo de Euler. La energía cinética total del cuerpo es

$$E_c = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}_{cm} + \mathbf{v}_i^*) \cdot (\mathbf{v}_{cm} + \mathbf{v}_i^*),$$

donde se ha utilizado la expresión de los vectores velocidad como descomposición en centro de masas y velocidad respecto del centro de masas. Expandiendo los paréntesis se tiene que

$$E_c = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_{\text{cm}} \cdot \mathbf{v}_{\text{cm}} + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^* \cdot \mathbf{v}_{\text{cm}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^* \cdot \mathbf{v}_i^*.$$

El primer y el tercer término del lado derecho de la última igualdad son las energías cinéticas del centro de masas $E_c^{(\text{cm})}$ y la energía cinética respecto del centro de masas E_c^* . El término central es nulo, como se demostró previamente, pues

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^* = 0.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\boxed{E_c = E_c^{(\text{cm})} + E_c^*}$$

6 Sólido rígido

Expuestos los resultados fundamentales de los sistemas de partículas, nos centramos en aquellos sistemas para los cuales las distancias entre las mismas se mantiene fijas ($|\mathbf{r}_{ij}| = \text{cte.}$). Si se quiere, un sólido rígido es un sistema de partículas unidas por barras firmes entre sí, tal y como se muestra en la Fig.5. Estrictamente hablando, ningún sólido es totalmente rígido, habiendo una demora entre el instante en que aplicamos la fuerza en un punto dado y el tiempo que dicha fuerza tarda en propagarse por el sólido, en conformidad con la teoría de la relatividad. Por lo tanto, si se quiere, podemos pensar en un sólido rígido como un conjunto de bolitas unidas por muelles muy rígidos (alto valor de la constante elástica), pero no absolutamente firmes, lo que resultaría contrario a las leyes de la relatividad.

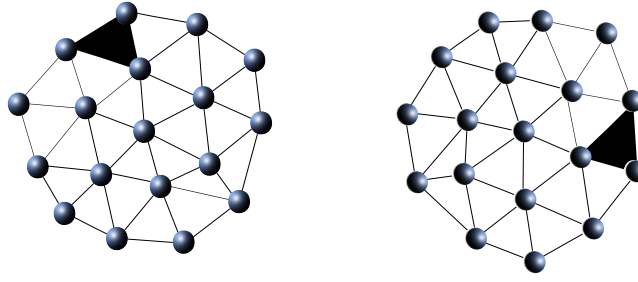


Figura 5. Un sólido rígido entendido como un sistema de partículas unidas por barras rígidas. El movimiento entre dos instantes puede descomponerse como la suma de una translación del centro de masas y una rotación respecto del mismo.

6.1 Ecuación de un sólido que rota respecto a un eje fijo

Considérese ahora un sólido rígido que rota respecto de un eje fijo que pasa por el punto O , que tomaremos como origen de nuestro sistema coordenado. En este caso, se tiene que el momento angular total respecto de este punto viene dado por

$$\mathbf{L}_O = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_{O_i} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_{O_i} \times m_i \mathbf{v}_{O_i}.$$

Si O es un punto fijo respecto del cual rota el sólido rígido, entonces, respecto de dicho punto, la velocidad de cualquier partícula puede escribirse de la forma $v_{O_i} = \omega R_i = \omega r_{O_i} \sin \theta_i$, tal y como se muestra en la Fig.6. Es fácil comprobar (misma figura) que la velocidad como vector puede expresarse a partir del vector velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$ y del vector posición $\mathbf{r}_{O_i} = d_i \mathbf{k} - R_i \mathbf{u}_n$, de la forma

$$\mathbf{v}_{O_i} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{O_i} = \omega \mathbf{k} \times (d_i \mathbf{k} - R_i \mathbf{u}_n) = \omega R_i \mathbf{u}_t = \omega r_{O_i} \sin \theta_i \mathbf{u}_t,$$

donde \mathbf{u}_n y \mathbf{u}_t son el vector unitario en la dirección tangencial de la rotación de la partícula dada. El binormal \mathbf{u}_b es fijo y se corresponde con la dirección del eje Z , representada por el vector unitario \mathbf{k} . Por lo tanto, tenemos que el momento angular viene dado por

$$\mathbf{L}_O = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_{O_i} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_{O_i} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{O_i}).$$

Utilizando las relaciones previas obtenemos

$$\mathbf{L}_O = \sum_{i=1}^N m_i \omega R_i (d_i \mathbf{k} - R_i \mathbf{u}_n) \times \mathbf{u}_t,$$

lo que podemos expandir en dos términos

$$\mathbf{L}_O = \sum_{i=1}^N m_i \omega R_i d_i (\mathbf{k} \times \mathbf{u}_t) - \sum_{i=1}^N m_i \omega R_i^2 (\mathbf{u}_n \times \mathbf{u}_t).$$

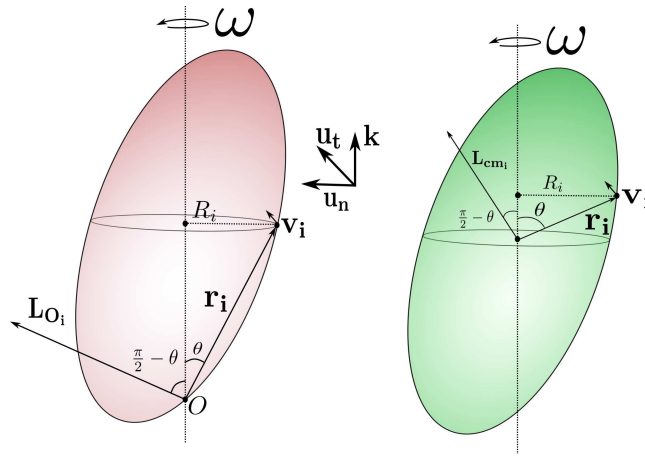


Figura 6. Rotación de un sólido respecto del eje Z . El momento angular puede calcularse respecto de un punto fijo del eje O , como se muestra en la figura en rojo, o bien respecto del centro de masas (verde). Se muestra la base formada por los vectores tangente \mathbf{u}_t , normal \mathbf{u}_n y binormal \mathbf{u}_b del punto i -ésimo del sólido. El tangente va hacia dentro de la página, pero se ha dibujado en perspectiva. El normal va hacia el eje de rotación (a la izquierda) y el binormal en la dirección del eje Z .

Substituyendo los productos vectoriales se obtiene que

$$\mathbf{L}_O = \left(\sum_{i=1}^N m_i \omega R_i d_i \mathbf{u}_n + \sum_{i=1}^N m_i \omega R_i^2 \mathbf{k} \right) = \mathbf{L}_{O_n} + \mathbf{L}_{O_z}.$$

Como se observa en esta expresión, la componente en el eje Z del momento angular respecto del punto O de la partícula i -ésima del sólido, se corresponde con

$$\mathbf{L}_{O_z} = m_i \omega R_i^2 \mathbf{k}.$$

Sumando a todas las partículas del sólido, tenemos que

$$\mathbf{L}_{Oz} = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_{Oiz} = \sum_{i=1}^N m_i R_i^2 \boldsymbol{\omega} \mathbf{k} = I_{Oz} \boldsymbol{\omega}.$$

Donde se ha definido **el momento de inercia respecto del eje de giro** definido, que pasa por el punto O , de la forma

$$I_{Oz} = \sum_{i=1}^N m_i R_i^2.$$

En el caso de que se trate de cuerpos continuos es posible hacer un paso al límite, similar al que se hizo con el centro de masas, para obtener la expresión

$$I_{Oz} = \int_V \rho(\mathbf{r}) R^2(\mathbf{r}) dV.$$

El momento de inercia es el equivalente rotacional de la masa, y por lo tanto es **una medida de la resistencia que ofrece un cuerpo a cambiar su estado de movimiento rotacionalmente**. En definitiva, se tiene la ecuación

$$\mathbf{L}_{Oz} = I_{Oz} \boldsymbol{\omega}.$$

Si ahora planteamos la segunda ley de Newton para las rotaciones respecto del punto O , tenemos que

$$\frac{d\mathbf{L}_{Oz}}{dt} = I_{Oz} \boldsymbol{\alpha} \Rightarrow \mathbf{M}_{Oz} = I_{Oz} \boldsymbol{\alpha}, \quad (6)$$

que es válida únicamente si el eje de rotación está fijo.

6.2 Libración de un sólido rígido

En este apartado aplicamos las ecuaciones anteriores al caso de un sólido fijado por un eje perpendicular a la gravedad, al que se permite oscilar (ver Fig.7). El momento de las fuerzas respecto de O puede calcularse de la forma

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_{Oi} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_{Oi} \times \mathbf{F}_{Oi}.$$

Si descomponemos las fuerzas en el peso más las fuerzas que actúan sobre cada punto material del sólido, tenemos que

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_{O_i} \times (m_i \mathbf{g} + \mathbf{F}_i^*),$$

lo que equivale a

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_{O_i} \times \mathbf{g} + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_{O_i} \times \mathbf{F}_i^*.$$

Ahora bien, el segundo término de esta última igualdad es igual a cero. Veámoslo. Se tiene que

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_{O_i} \times \mathbf{F}_i^* = \mathbf{r}_{O_{cm}} \times \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^* + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_{O_i}^* \times \mathbf{F}_i^* = 0,$$

donde se ha utilizado el hecho de que $\mathbf{r}_{O_i}^* = -\mathbf{r}_{O_{cm}}$, como se muestra en la misma figura. Por lo tanto obtenemos que

$$\mathbf{M}_O = M \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{g}.$$

Utilizando la ecuación anterior, obtenemos finalmente

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha} = \frac{M}{I_O} \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{g}}.$$

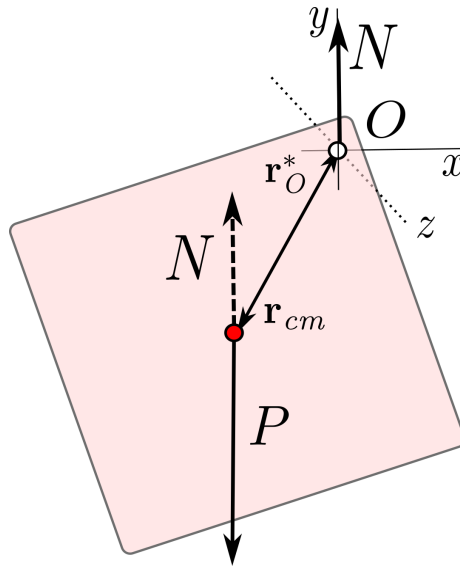


Figura 7. Péndulo formado por una placa cuadrada suspendida desde una de sus esquinas. Las fuerzas presentes son el peso y la normal, que resulta de apoyar la placa sobre la varilla que pasa por el orificio perpendicularmente. Por lo tanto, tenemos dos fuerzas actuando sobre el centro de masas (\mathbf{P} y \mathbf{N}) y una (\mathbf{N}) ejerciendo un torque respecto del mismo.

6.3 Ecuación de un sólido que rota respecto a un eje no fijo

En el caso de que el eje no sea fijo, se tiene que, para un instante dado, la velocidad de un punto del sólido i viene dada por

$$\mathbf{v}_i(t) = \mathbf{v}_{\text{cm}}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}_i^*(t).$$

Esta expresión resulta inmediatamente de considerar las ecuaciones anteriores y, esencialmente, constituye el resultado del célebre **teorema de Chasles**. Es más, es posible descomponer la velocidad del centro de masas en una componente paralela al vector velocidad angular y otra perpendicular, de la forma

$$\mathbf{v}_{\text{cm}} = \left(\mathbf{v}_{\text{cm}} \cdot \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \right) \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} + \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \times \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{cm}} \right) = \mathbf{v}_{\text{cm}}^{\omega} + \mathbf{v}_{\text{cm}}^{\pi}.$$

Substituyendo en la ecuación anterior, la velocidad, en el caso más general, puede expresarse de la forma

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{\text{cm}}^{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i^* - \mathbf{r}_{\omega}),$$

donde

$$\mathbf{r}_{\omega} = -\frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{cm}}}{\omega^2}$$

define el **eje instantáneo de rotación** como la recta que pasa por \mathbf{r}_{ω} en la dirección $\boldsymbol{\omega}$. En otras palabras, en un intervalo muy corto de tiempo, el movimiento de un sólido rígido es helicoidal.

El movimiento general para todo instante de tiempo, de un sólido cuyo eje de rotación puede cambiar, viene dado por las ecuaciones de Euler del sólido rígido, y excede el nivel de dificultad del presente curso.

7 Ecuación general para el momento angular: el tensor de inercia

Este apartado se incluye por completitud, pero sobrepasa los conocimientos exigibles en un curso de primero. Si O es un punto fijo respecto del cual rota el sólido rígido, entonces respecto de O la velocidad de cualquier partícula es

$$\mathbf{v}_{Oi} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{Oi},$$

como se escribió anteriormente. Por lo tanto, tenemos que

$$\mathbf{L}_O = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_{O_i} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_{O_i} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{O_i}).$$

Teniendo en cuenta que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ obtenemos la ecuación

$$\mathbf{L}_O = \sum_{i=1}^N m_i r_{O_i}^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_{O_i} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_{O_i},$$

que puede expresarse tensorialmente (con subíndices asociados a las coordenadas¹), de la forma

$$(L_O)_k = \sum_{i=1}^N m_i \sum_{j=1}^3 (\delta_{kj}(r_{O_i}^2) - x_{O_k} x_{O_j}) \omega_j,$$

donde δ_{kj} es la delta de Kronecker. Definiendo el tensor de inercia como la matriz I_O , obtenemos

$$I_{O_{kj}} = \sum_{i=1}^N m_i (\delta_{kj}(r_{O_i}^2) - x_{O_k} x_{O_j}),$$

llegamos a que

$$(L_O)_k = I_{O_{kj}} \omega_j.$$

Esta expresión halla su versión continua en la ecuación

$$I_{kj} = \int_V \rho(\mathbf{r}) (\delta_{kj} r^2 - x_k x_j) dV.$$

Nótese que la matriz de inercia I es simétrica, por lo que basta calcular seis elementos ($I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, I_{xz}, I_{xy}, I_{yz}$). Podemos expresar matricialmente la relación entre el vector velocidad angular y el vector momento angular de la forma

$$\mathbf{L}_O = I_O \boldsymbol{\omega},$$

1. Aquí las coordenadas (x, y, z) se nombran (x_1, x_2, x_3) , por lo que una coordenada se escribe tensorialmente como x_i y los elementos de una matriz dada A , se escriben de la forma A_{ij} .

donde I_O es una matriz. Si $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$, tenemos que

$$L_{Oz} = I_{Oz}\omega \Rightarrow I_{Oz} = (I_O)_{33}.$$

Si el tensor de inercia no varía con el tiempo y el eje de rotación tampoco, tenemos nuevamente que

$$\boxed{M_O = I_O \boldsymbol{\alpha}}.$$

8 Momentos de inercia y teoremas útiles

Exponemos ahora un ejemplo unidimensional de momento de inercia y algunos teoremas útiles para el cálculo de momentos de inercia. Se darán algunas tablas con momentos de inercia típicos para distintos cuerpos, habida cuenta de que el computo requiere conocimientos de cálculo en varias variables, que no debe exigírsele a un alumno de primer curso. Calcularemos el momento de inercia de una barra metálica de sección despreciable (un filamento de metal) que rota respecto de un eje perpendicular a la misma que pasa por su centro de masas, y otro que pasa por uno de los extremos, como en ejemplo de la barra anterior. Se considera que la longitud de la varilla es L y que su densidad es constante. En ambos casos, hay que expresar de forma continua el momento de inercia. Tenemos que

$$I_{cm,z} = \int_0^M x^2 dm = \lambda \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \lambda \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} = \lambda \frac{2L^3}{24} = \frac{1}{12} ML^2,$$

donde se ha tenido en cuenta que al ser el medio homogéneo, se tiene que la densidad longitudinal es $\lambda = M/L$. Ahora calculemos el caso en el que la barra rota respecto de un extremo

$$I_{ext,z} = \int_0^M x^2 dm = \lambda \int_0^L x^2 dx = \lambda \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L = \frac{1}{3} ML^2.$$

Claramente, ofrece más resistencia a ser rotada en el segundo caso, porque para acelerar rotacionalmente la barra, **los puntos más alejados del centro llevan mayor velocidad.**

En cuanto a los teoremas, comentaremos tres teoremas fundamentales para el cálculo de momentos de inercia. El primero de ellos es el **teorema de Steiner** o de los ejes paralelos, y viene a decir que dado el momento de inercia de un sólido rígido respecto de un eje que pasa por su centro de masas I_{cm} , el momento de inercia respecto de un eje paralelo que está a una distancia s del primero es

$$I_s = I_{\text{cm}} + Ms^2.$$

Otro teorema muy importante es el **teorema de los ejes perpendiculares**, que nos dice que para un objeto plano, la suma de los momentos de inercia de dos ejes perpendiculares contenidos en el plano del objeto es igual al momento de inercia asociado a un eje perpendicular al plano que pasa por el mismo punto. Si asociamos a los ejes del plano las etiquetas X, Y , tenemos que $I_z = I_x + I_y$.

Por último, mencionamos el **principio de superposición** de momentos de inercia y la **regla de Routh**. El primero dice que el momento de inercia de un cuerpo formado por varios cuerpos que no intersectan entre sí, es igual a la suma de momentos de inercia. El segundo dice que, dado un cuerpo que rota en torno a un eje, cualquier cuerpo de misma masa que se diferencie de éste mediante una dilatación o contracción en la dirección de dicho eje de rotación, tiene el mismo momento de inercia.

9 Energía y trabajo de un sólido rígido

Finalmente, exponemos los métodos energéticos para cuerpos rígidos.

9.1 Energía cinética

Hemos visto que la energía cinética de un sistema de partículas es igual a la suma de las energías cinéticas del centro de masas y del sistema respecto del sistema de referencia del centro de masas. En esta sección vamos a ver cual es la energía cinética asociada a la rotación de un sólido rígido. Como demostramos anteriormente, se tiene que

$$\mathbf{v}_i^* = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i^* = \omega r_i^* \sin\theta_i \mathbf{u}_t = \omega R_i \mathbf{u}_t,$$

por lo que la energía cinética de todas las partículas respecto del centro de masas es

$$E_c^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^* \cdot \mathbf{v}_i^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \omega^2 R_i^2 = \frac{1}{2} I_{cm,z} \omega^2.$$

En consecuencia, la energía cinética total de un sólido rígido que rota en torno al eje Z es

$$E_c = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm,z} \omega^2.$$

9.2 Energía potencial

La energía potencial total de un sistema de partículas es, siempre que las interacciones internas de las partículas que lo conforman vengan dadas por campos conservativos, de la forma

$$E_p = E_p^{(\text{ext})} + E_p^{(\text{int})},$$

donde, considerando el punto cero como origen de potenciales, se tiene que

$$E_p = - \sum_{i=1}^N \int \mathbf{F}_i^{(\text{ext})} \cdot d\mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \int \mathbf{F}_{ji}^{(\text{int})} \cdot d\mathbf{r}_i.$$

El segundo de los términos puede escribirse también como

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \int \mathbf{F}_{ji}^{(\text{int})} \cdot d\mathbf{r}_i = \sum_{i < j} \int \mathbf{F}_{ji}^{(\text{int})} \cdot d\mathbf{r}_i + \sum_{j < i} \int \mathbf{F}_{ji}^{(\text{int})} \cdot d\mathbf{r}_i.$$

Renombrando índices la última integral (tal y como se hizo en apartados anteriores), obtenemos

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \int \mathbf{F}_{ji}^{(\text{int})} \cdot d\mathbf{r}_i = \sum_{i < j} \int \mathbf{F}_{ji}^{(\text{int})} \cdot d\mathbf{r}_i + \sum_{j > i} \int \mathbf{F}_{ij}^{(\text{int})} \cdot d\mathbf{r}_j.$$

Finalmente, si tenemos en cuenta la tercera ley de Newton podemos reemplazar $\mathbf{F}_{ij}^{(\text{int})}$ por $-\mathbf{F}_{ji}^{(\text{int})}$, obteniendo

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \int \mathbf{F}_{ji}^{(\text{int})} \cdot d\mathbf{r}_i = \sum_{i < j} \int \mathbf{F}_{ji}^{(\text{int})} \cdot (d\mathbf{r}_i - d\mathbf{r}_j) = \sum_{i < j} \int \mathbf{F}_{ji}^{(\text{int})} \cdot d\mathbf{r}_{ij},$$

donde se ha definido el vector de posición relativo $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$. Si los campos externos e internos son conservativos, se tiene que

$$\mathbf{F}_i^{(\text{ext})} = \nabla_{\mathbf{r}_i} E_p^{(\text{ext})}, \quad \mathbf{F}_{ij}^{(\text{int})} = \nabla_{\mathbf{r}_i} \cdot E_{p_{ij}}^{(\text{int})},$$

por lo que la energía potencial interna total será

$$E_p^{(\text{int})} = \sum_{i < j} E_{p_{ij}}^{(\text{int})}.$$

9.3 Trabajo rotacional

Cuando una fuerza actúa sobre un punto de un sólido rígido, realiza trabajo asociado a los cambios de movimiento del centro de masas, y también a los movimientos de rotación respecto de dicho punto. Dado que los primeros se estudiaron en el tema anterior, nos centamos ahora en averiguar cual es el trabajo rotacional. Así mismo, despreciaremos el trabajo realizado por las fuerzas internas, debido a que en un sólido rígido la distancia ente las partículas no cambia $d|\mathbf{r}_{ij}| = 0$. Tenemos que, sobre la partícula i -ésima, las fuerzas externas realizarán un trabajo

$$W_i^* = \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{F}_i^{(\text{ext})} \cdot d\mathbf{r}_i^* = \int_{t_A}^{t_B} \mathbf{F}_i^{(\text{ext})} \cdot \mathbf{v}_i^* dt = \int_{t_A}^{t_B} \mathbf{F}_i^{(\text{ext})} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i^*) dt.$$

Si ahora tenemos en cuenta la igualdad $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$, vemos que

$$W_i^* = \int_{t_A}^{t_B} \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}_i^* \times \mathbf{F}_i^{(\text{ext})}) dt = \int_{t_A}^{t_B} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_i^{*(\text{ext})} dt = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \mathbf{M}_i^{*(\text{ext})} \cdot d\boldsymbol{\theta},$$

donde se ha utilizado la definición de velocidad angular. Nuevamente, si la velocidad angular va en el eje Z y sumamos a todas las partículas, tenemos que

$$\boxed{W^* = \int_{\theta_A}^{\theta_B} M_z^{*(\text{ext})} d\theta}.$$

Si ahora nos valemos de la ecuación, donde O es el centro de masas, se tiene que

$$W^* = I_{cm,z} \int_{\theta_A}^{\theta_B} \frac{d\omega}{dt} d\theta = I_{cm,z} \int_{\omega_A}^{\omega_B} \omega d\omega = \frac{1}{2} I_{cm,z} \omega_B^2 - \frac{1}{2} I_{cm,z} \omega_A^2,$$

obtenemos el teorema de las fuerzas vivas asociado a los movimientos de rotación respecto del centro de masas.

10 Deslizamiento y rodadura

Un cuerpo, digamos esférico por simplicidad, puede realizar tres tipos de movimientos sobre una superficie, en función de si hay rozamiento entre ambos o no. Cuando una superficie está perfectamente lubricada, se dice que el cuerpo desliza sobre la misma. En este caso, si la rotación respecto del centro de masas es originalmente nula ($\omega = 0$), se mantiene nula durante todo el movimiento. Ahora bien, esto no implica que cuando se de un movimiento de **deslizamiento puro** el cuerpo no pueda rotar, sino que el movimiento de rotación es independiente del de traslación. En el otro extremo, cuando existen fuerzas de rozamiento, se puede dar una situación en la que un cuerpo lleva un movimiento de **rodadura pura**. Esto ocurre cuando la distancia entre dos puntos de la superficie del cuerpo a lo largo de la misma, entre dos instantes en los que dichos puntos está en **contacto** con el suelo, es el mismo que la longitud de arco (distancia) recorrida sobre la superficie. Si hacemos a esos dos puntos infinitesimalmente próximos, ha de cumplirse la relación matemática $ds = R d\theta$. En el caso de una esfera de radio R , se cumplen entonces la ecuación de ligadura

$$\boxed{v_{cm} = \omega R}.$$

Esta condición implica que el punto de contacto tiene velocidad nula. Esto es fácil de demostrar, si asumimos que el vector tangente a la superficie en un instante dado apunta en la dirección del eje X . Se tiene que

$$\mathbf{v}_{con} = \mathbf{v}_{cm} + \mathbf{v}_{con}^* = v_{cm} \mathbf{i} - \omega R \mathbf{i} = \mathbf{0}.$$

Como consecuencia, la fuerza de rozamiento en un movimiento de rodadura pura no realiza trabajo. Nótese que esta ligadura puede derivarse e integrarse, siempre que el cuerpo sea esférico, para obtener las dos ligaduras equivalentes $a_{\text{cm}} = \alpha R$ y $s_{\text{cm}} = \theta R$. Finalmente, existen movimientos intermedios entre la rodadura pura y el deslizamiento puro, que se dan cuando un cuerpo que experimenta rozamiento lleva una cierta velocidad inicial. A medida que pasa el tiempo, se va produciendo un **trasvase de energía cinética del centro de masas a energía rotacional**, hasta que la rodadura se hace pura.

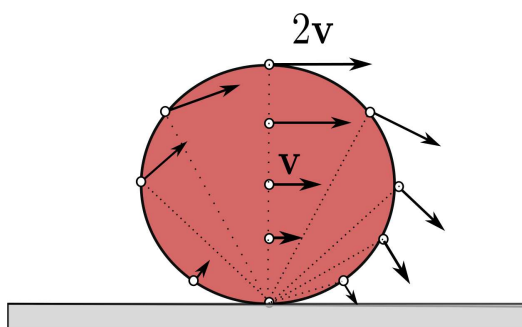


Figura 8. Perfil (o campo) de velocidades de un sistema de partículas que integran un sólido rígido.

Una forma muy útil de representar un sistema de partículas es construyendo el **perfil de velocidades**. En la Fig.8 se muestra el perfil de velocidades para un cuerpo que rueda puramente sin deslizamiento respecto del centro de masas. En la Fig.9 se muestran perfiles de velocidades asociados a todos los casos posibles.

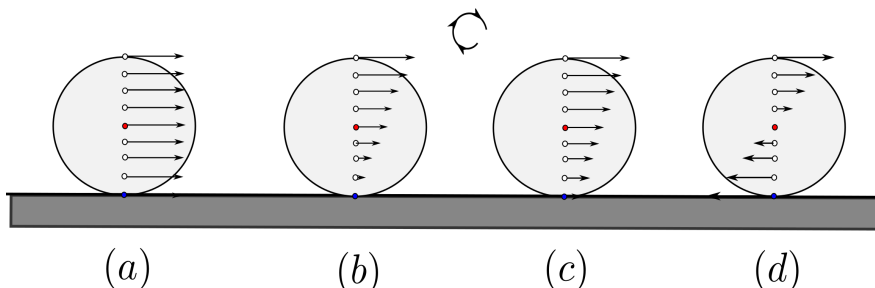


Figura 9. Campo de velocidades de un cuerpo esférico. (a) Movimiento de deslizamiento sin rodadura. (b) Rodadura sin deslizamiento. (c) Deslizamiento con rodadura tal que $v_0 > \omega_0 R$. (d) Deslizamiento con rodadura tal que $v_0 < \omega_0 R$.

Terminamos este tema tan extenso desarrollando un ejemplo, en el cual una esfera que experimenta rozamiento con la superficie horizontal de un suelo plano, es lanzado sin rotación $\omega_0 = 0$ y con una velocidad en la dirección de la superficie horizontal v_0 . Se considera que el coeficiente de rozamiento dinámico es μ . En dicho caso la primera ley de Euler para el centro de masas es

$$\begin{aligned} m a_x &= -F_R \\ m a_y &= N - P \end{aligned}$$

Nótese que toda fuerza que se aplica sobre un punto del cuerpo, por definición, afecta también al centro de masas. La segunda ley de Euler para la rotación respecto del centro de masas viene dada por la ecuación

$$I\alpha = R F_R .$$

Dado que $a_y = 0$, de la segunda ecuación del centro de masas se deduce la fuerza normal es $N = mg$. Por lo tanto, la fuerza de rozamiento es $F_R = \mu mg$. El momento de inercia respecto del centro de masas de una esfera de radio R y masa m es $I = 2/5 m R^2$. Por lo tanto, las soluciones a estas dos ecuaciones son

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 t - \frac{1}{2} \mu g t^2 & v(t) &= v_0 - \mu g t \\ \theta(t) &= \frac{5}{4} \frac{\mu g}{R} t^2 & \Rightarrow \omega(t) &= \frac{5}{2} \frac{\mu g}{R} t \end{aligned} ,$$

esto es, un movimiento circular y otro rectilíneo, ambos acelerados uniformemente. El signo menos da cuenta de la transformación entre energía cinética de un tipo a otro.

La condición de rodadura pura se alcanzará cuando se cumpla la ligadura $v = \omega R$. Por lo tanto

$$\frac{5}{2} \mu g t = v_0 - \mu g t \Rightarrow t = \frac{2}{7 \mu g} v_0 \Rightarrow v = \frac{5}{7} v_0 .$$

Este resultado es notable, y dice que la velocidad final no depende del tamaño de la esfera ni de su masa. A partir de este momento, tanto el centro de masas como el cuerpo mantienen un movimiento uniforme. Para concluir, consideremos ahora que el cuerpo rota inicialmente con frecuencia angular ω_0 . Tenemos que

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 - \mu g t \\ \omega(t) &= \omega_0 + \frac{5}{2} \frac{\mu g}{R} t \end{aligned}$$

La condición de rodadura pura se alcanza ahora en el instante de tiempo

$$t = \frac{2}{7\mu g}(v_0 - \omega_0 R) .$$

Este tiempo será mayor o menor, dependiendo de si inicialmente el cuerpo rueda en el sentido de las agujas del reloj ($\omega_0 > 0$) o en sentido contrario ($\omega_0 < 0$). Véase que si inicialmente se tiene rodadura pura, el cuerpo la mantiene durante el resto del movimiento y $t = 0$. Se ha de tener mucho cuidado en el caso en que $\omega_0 R > v_0$. En este caso se tendrá que la fuerza de rozamiento va en sentido contrario. Así, el movimiento circular será ahora de frenado, y el del centro de masas de acelerado, con lo que han de cambiarse los signos en las ecuaciones de movimiento. Ahora es la rotación la que transfiere energía cinética al centro de masas hasta alcanzar la rodadura pura.