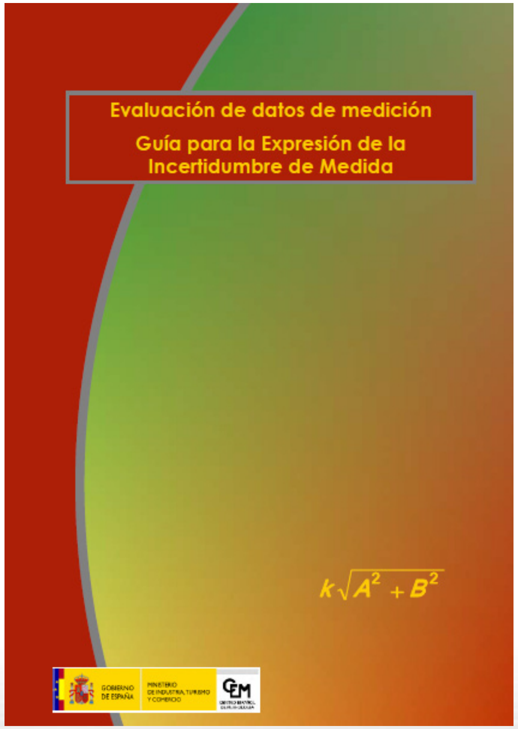
Evaluación de la incertidumbre típica

Documento de referencia

- **ISO/IEC GUIDE 98-3:2008**

Uncertainty of measurement -- Part 3: Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM:1995)



Concepto de incertidumbre

Una medida sin ninguna indicación cuantitativa de su calidad es inservible: no puede ser comparada

Es un parámetro (no negativo), asociado con el resultado de una medida, que caracteriza la dispersión de los valores que podrían, razonablemente serle atribuidos a partir de la información que se utiliza (VIM 2008)

Concepto de incertidumbre

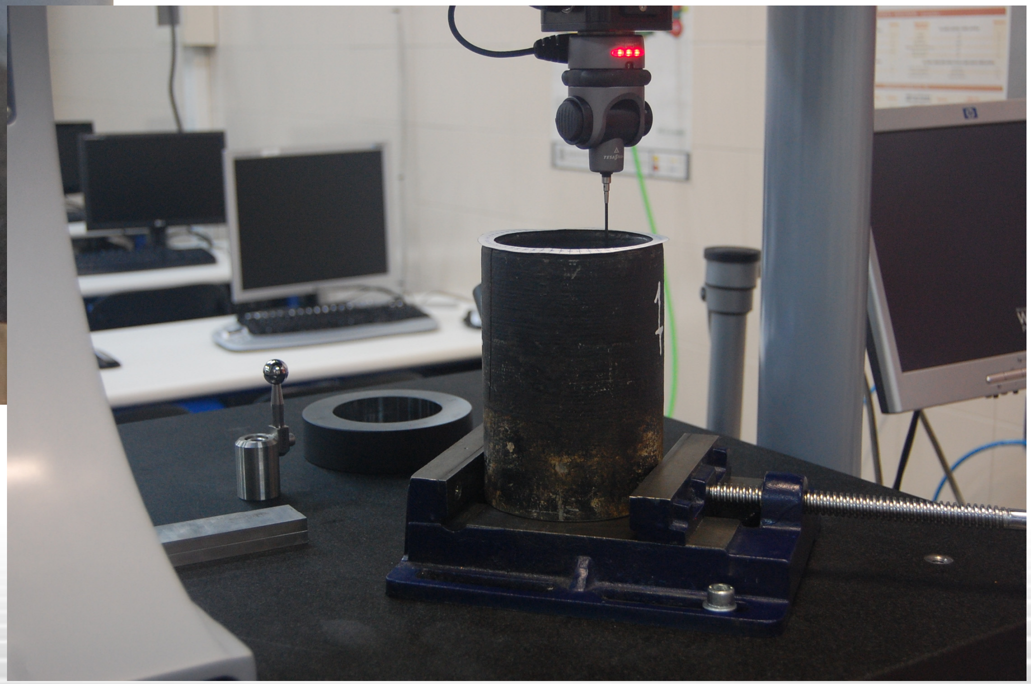
La incertidumbre del resultado de una medición refleja la imposibilidad de conocer exactamente el valor del mensurando. Este resultado, incluso con todas las correcciones por efectos sistemáticos, es tan sólo una estimación del valor "real" del mensurando

Fuentes de Incertidumbre

- **Definición incompleta del mensurando**
- **Realización imperfecta de la definición del mensurando**
- **Muestra no representativa**
- **Condiciones ambientales**
- **Instrumento de medida (lectura, resolución, calibración,…)**
- **Valores inexactos de los patrones o MR**
- **Valores inexactos de constantes y parámetros**
- **Hipótesis establecidas en el método o procedimiento**
- **Variaciones de las observaiones en condiciones idénticas**
- **Otras causas…..**

Estas fuentes no son independientes unas de otras

Concepto de incertidumbre



Procedimiento de evaluación y expresión de la incertidumbre

1. Expresar matemáticamente la relación existente entre el mensurando Y y las magnitudes de entrada X_i de las que depende Y según $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$. La función f debe contener todas las magnitudes, incluyendo todas las correcciones y factores de corrección que pueden contribuir significativamente a la incertidumbre del resultado de medición.

2. Determinar x_i, el valor estimado de la magnitud de entrada X_i, bien a partir del análisis estadístico de una serie de observaciones, bien por otros métodos.

Procedimiento de evaluación y expresión de la incertidumbre

3. Evaluar la *incertidumbre típica* $u(x_i)$ de cada estimación de entrada x_i.

   Para una estimación de entrada obtenida por análisis estadístico de series de observaciones, *evaluación Tipo A de la incertidumbre típica*.

   Para una estimación de entrada obtenida por otros medios, *evaluación Tipo B de la incertidumbre típica.*

4. Evaluar las covarianzas asociadas a todas las estimaciones de entrada que estén correladas.

5. Calcular el resultado de medición; esto es, la estimación y del mensurando Y, a partir de la relación funcional f utilizando para las magnitudes de entrada X_i las estimaciones x_i obtenidas en el paso 2.

Procedimiento de evaluación y expresión de la incertidumbre

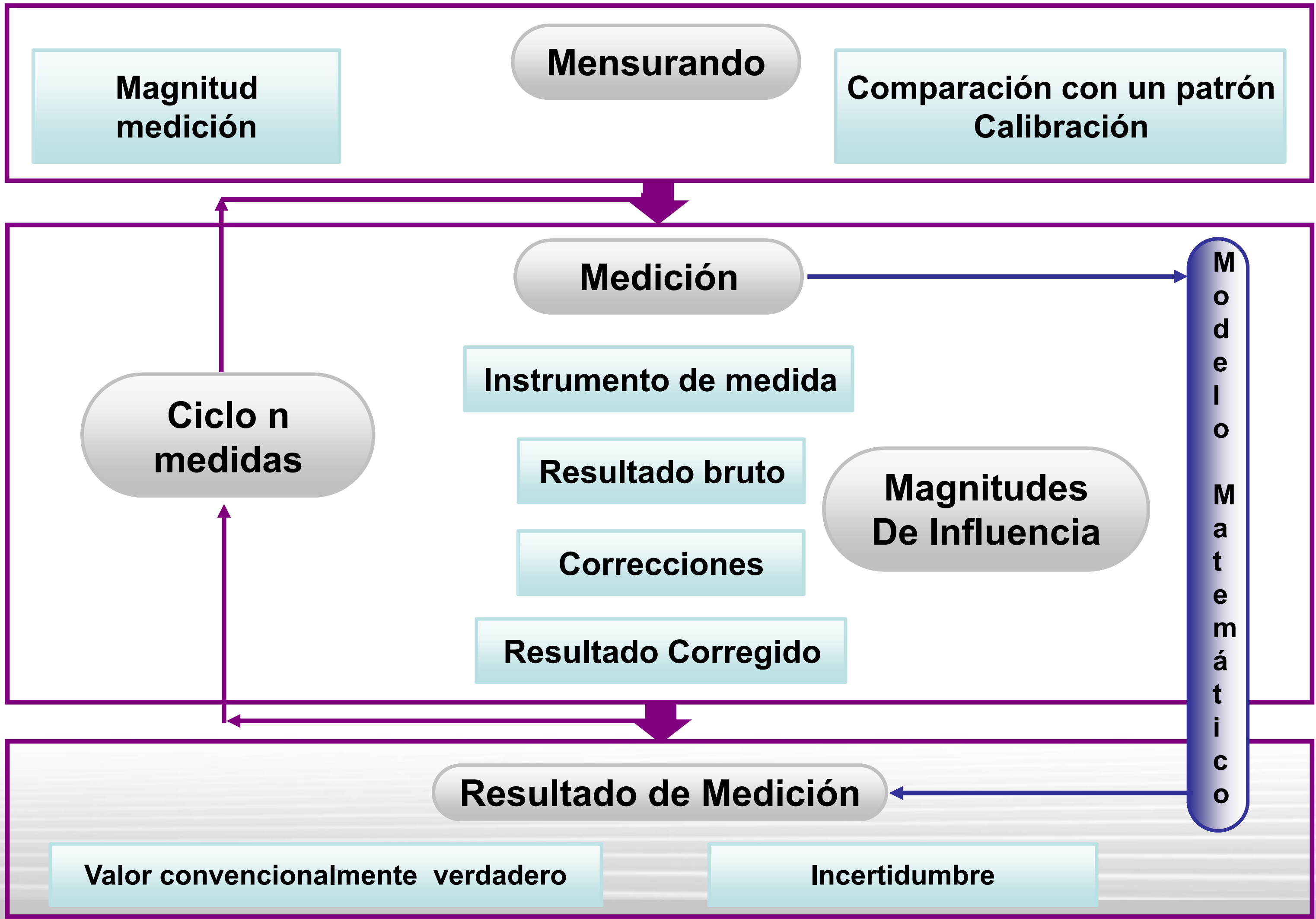
6. Determinar *la incertidumbre típica combinada* $u_c(y)$ del resultado de medida *y*, a partir de las incertidumbres típicas y covarianzas asociadas a las estimaciones de entrada.

   Si la medición determina simultáneamente más de una magnitud de salida, calcular sus covarianzas.

7. Si es necesario dar una *incertidumbre expandida U*, cuyo fin es proporcionar un intervalo $[y - U, y + U]$ en el que pueda esperarse encontrar la mayor parte de la distribución de valores que podrían, razonablemente, ser atribuidos al mensurando *Y*, multiplicar la incertidumbre típica combinada $u_c(y)$ por un factor de cobertura *k*, para obtener $U = k\, u_c(y)$.

   Seleccionar *k* considerando el nivel de confianza requerido para el intervalo.

Concepto de cadena de medición



Modelos de medida

Si se hacen variar todas las magnitudes de las que depende el resultado de una medición, su incertidumbre podría evaluarse por métodos estadísticos

Imposible en la práctica

Es necesario definir un modelo matemático que describa el proceso de medición y que relacione matemáticamente todas las magnitudes conocida que intervienen en una medición (VIM 2008)

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

"f" es la función que contiene todas las magnitudes susceptible de contribuir a una componente de la incertidumbre del resultado de la medida, incluyendo todas las correcciones

$$x_i = f(z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n)$$

Sistema de magnitudes

- Como los valores (x_1, x_2 , …, x_n) no pueden determinarse exactamente, el valor resultante de la medida (y) tampoco es exacto y entran en juego las incertidumbres.

- Las incertidumbres de las variables de entrada (x_1, x_2 , …, x_n) y la función modelo permiten determinar la incertidumbre del valor resultante (y) según veremos.

Incertidumbre típica de las variables de entrada

- Se denomina ***incertidumbre típica*** de una cierta variable a la desviación típica asociada a la misma, es decir, la incertidumbre típica es la incertidumbre correspondiente a **una** desviación típica.

- La evaluación de la incertidumbre típica de las magnitudes de entrada se efectúa mediante

  - Evaluación **tipo A**
  - Evaluación **tipo B**

Clasificación de componentes de la incertidumbre

Evaluación Tipo A

- Carácter objetivo
- Análisis estadístico
- Calculada a partir de la varianza s^2 de *n* observaciones
- Incertidumbre TIPO A: $u = +\sqrt{u^2}$

Evaluación Tipo B

- Carácter subjetivo
- Función de probabilidad asumida
- Varianza u^2 evaluada a priori
- Incertidumbre TIPO B: $u = +\sqrt{s^2}$

Evaluación de tipo A

Variable aleatoria *X* → ***N*** **observaciones independientes** x_i, **obtenidas en condiciones de repetibilidad**

El mejor estimador del valor verdadero de *X* es la media muestral de las observaciones x_i**:**

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

El mejor estimador de la varianza poblacional es la varianza muestral:

$$S^2(x_i) = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{X}\right)^2}{N-1}$$

El mejor estimador de la varianza muestral de la media es:

$$S^2\left(\overline{X}\right) = \frac{S^2(x_i)}{N}$$

Estimador insesgado de la media

Evaluación de tipo A

$$u(x_i) = \frac{S(x_i)}{\sqrt{N}}$$

N debe tener un tamaño adecuado: grados de libertad ν

$$\upsilon = N - 1$$

es una información importante para estimar la fiabilidad de la evaluación de dicha desviación típica y debe tenerse encuenta que siempre debería ser N ≥ 10

Si N <5 una solución es usar la distribución t-Student

$$u(x_i) = t_p(\upsilon)\frac{S(x_i)}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\upsilon}{\upsilon - 2}}\frac{S(x_i)}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{N-1}{N-3}}\frac{S(x_i)}{\sqrt{N}}$$

Evaluación de tipo B

- **No basada en el análisis estadístico de las observaciones**
- **Evaluada por:**
  - **Resultados de medidas previas**
  - **La experiencia o el conocimiento general del comportamiento y propiedades de los instrumentos y materiales utilizados**
  - **Especificaciones fiables de los fabricantes**
  - **Datos de calibraciones y certificados**
  - **Incertidumbre asignada a valores de referencia procedentes de libros y manuales técnicos de solvencia**
  - **Hipótesis sobre la clase de función de densidad de la variable X_i**

Evaluación de tipo B. Ejemplos

- El coeficiente de dilatación lineal del cobre puro a 20 ºC es $\alpha = 16{,}5 \times 10^{-6}\ K^{-1}$.
- Se considera que la información es suficientemente fiable, y se toma como incertidumbre típica el valor de la última cifra significativa, $u(\alpha)=0{,}1 \times 10^{-6}\ K^{-1}$.

- En una medición bien diseñada y bajo control estadístico, puede existir una estimación de la varianza s_p^2 que la caracterice. En tal caso, cuando se determina el valor de un mensurando q a partir n observaciones independientes, la varianza experimental de la media aritmética de las observaciones resulta estimado por:

$$u^2\left(\overline{q}\right) = S^2\left(\overline{q}\right) = \frac{Sp^2}{n}$$

Evaluación de tipo B. Ejemplos

- Se sabe que la desviación típica poblacional de una determinada cota es s_p = 73 µm.

- Calcule la desviación típica de la cota al efectuar n medidas simples, Asimismo, determinar los grados de libertad de dicha variable, cuando:
  - n = 1
  - n = 5

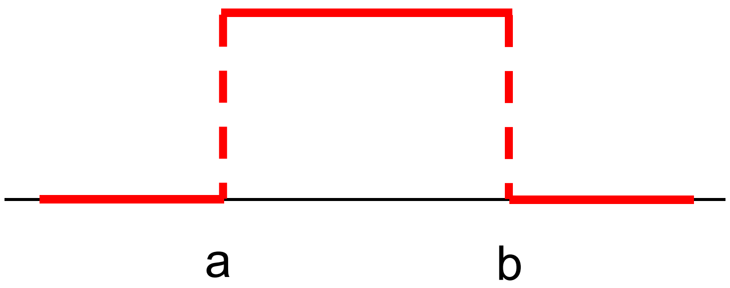
Evaluación de tipo B. Ejemplos

- Si el mensurando responde a una distribución de probabilidad, la estimación del mismo es la media de dicha distribución y su desviación típica es la incertidumbre típica asociada

- Distribuciones:
  - Uniforme
  - Uniforme con límites inexactos
  - Trapezoidal
  - Triangular
  - Arco seno
  - Normal
  - T-student

Evaluación de tipo B. Distribución rectangular o uniforme

- Si la única información disponible en relación con una magnitud *X* es un <u>límite inferior *a*</u> y <u>un límite superior *b*</u>, con *a* < *b*, entonces, de acuerdo con el principio de máxima entropía, se asignaría a *X* una distribución rectangular R(a, b) en el intervalo [a, b].



- La esperanza matemática y la varianza de X son:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Evaluación de tipo B. Distribución rectangular o uniforme

- La temperatura de la sala donde se efectúan las medidas de un BPL se encuentra entre 18,5 ºC y 23,5 ºC. Por análisis previos, se sabe que la distribución de dicha temperatura responde a una distribución uniforme

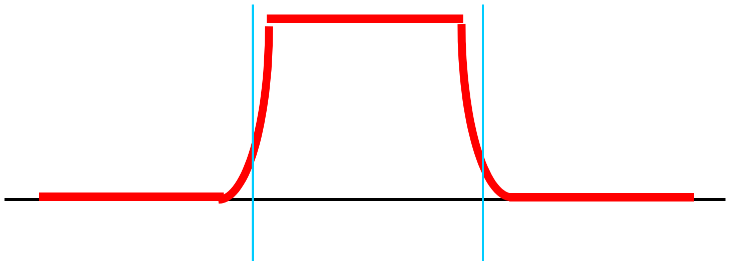
- Calcular el valor, θ_m, y la desviación típica, $u(\theta)$ de dicha temperatura.

Evaluación de tipo B. Distribución rectangular o uniforme

- Discretización de las lecturas de un instrumento de división de escala E

Evaluación de tipo B. Distribución rectangular con límites inexactos

- Si la única información disponible en relación con una magnitud *X* es un límite inferior *a* ± *d* y un límite superior *b* ± *d* , siendo d > 0 y *a* + *d* < *b* - *d*, entonces, de acuerdo con el principio de máxima entropía, se asignaría a *X* una distribución rectangular con límites inexactos CTrap(a, b, d).



- La esperanza matemática y la varianza de X son:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} + \frac{d^2}{9}$$

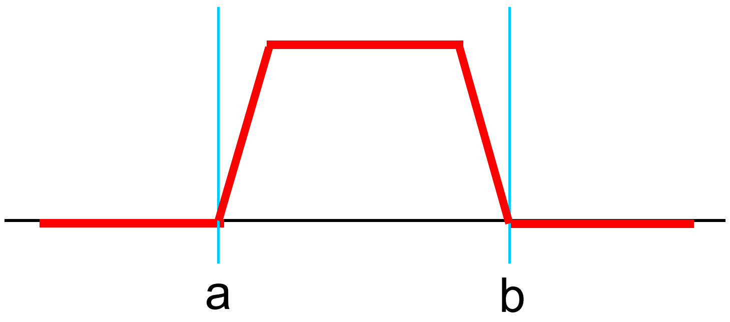
Evaluación de tipo B. Distribución rectangular con límites inexactos

- En un certificado se establece que una tensión X se encuentra en el intervalo 10,0 $\pm$ 0,1 V. No se dispone de información adicional sobre X, excepto que se cree que los valores de los extremos del intervalo son el resultado del redondeo correcto de algún valor numérico.

- Sobre esta base, ese valor numérico se encuentra entre 0,05 y 0,15 V, ya que el valor numérico de cada punto en el intervalo (0,05, 0,15) redondeado a una cifra decimal significativa es 0,1.

Evaluación de tipo B. Distribución trapezoidal

- Suponiendo que una magnitud *X* se define como la <u>suma de dos magnitudes independientes</u> X_1 y X_2 y que para i=1 e i=2, se asigna a las X_i una distribución <u>rectangular R(a_i, b_i)</u> con límite inferior a_i y <u>un límite superior b_i</u>, entonces, la distribución de *X* es una trapezoidal simétrica Trap(a, b, β), con un límite inferior a, un límite superior b y un parámetro b igual a la relación entre la semiamplitud de la parte superior del trapecio y la de la base



$$a = a_1 + a_2 \qquad b = b_1 + b_2 \qquad \beta = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

$$\lambda_1 = \frac{\left|(b_1 - a_1) - (b_2 - a_2)\right|}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{|b-a|}{2}$$

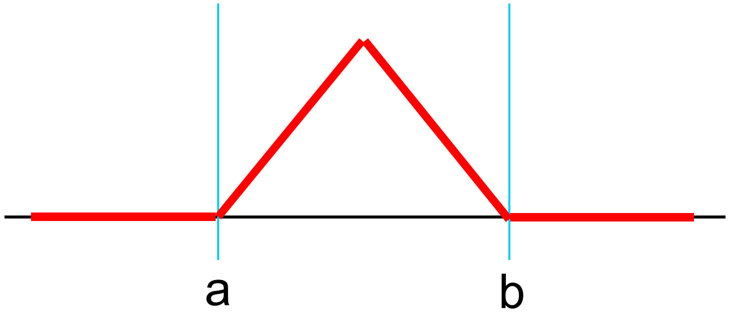
$$0 \le \lambda_1 \le \lambda_2$$

- La esperanza matemática y la varianza de X son:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{24}\left(1+\beta^2\right)$$

Evaluación de tipo B. Distribución triangular

- Supóngase que una magnitud *X* se define como la <u>suma de dos magnitudes independientes</u>, a las que se les asigna una distribución <u>rectangular R(a, b)</u> con la misma semiamplitud, es decir, $b_1 - a_1 = b_2 - a_2$ entonces, la distribución de *X* es una triangular simétrica T(a, b) en el intervalo [a, b]



- La esperanza matemática y la varianza de X son:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{24}$$

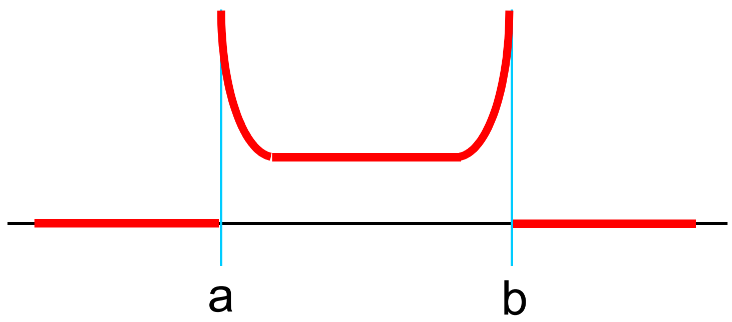
Evaluación de tipo B. Distribución triangular

- La temperatura de la sala donde se efectúan las medidas de un BPL se encuentra entre 18,5 ºC y 23,5 ºC. Por análisis previos, se sabe que es más probable encontrar con mayor probabilidad la temperatura en el centro del intervalo, asumiendo que la distribución de dicha temperatura responde a una distribución triangular.

- Calcular el valor, θ_m, y la desviación típica, $u(\theta)$ de dicha temperatura.

Evaluación de tipo B. Distribución arco seno (en forma de U)

- Si se sabe que una magnitud *X* tiene un ciclo sinusoidal, con fase desconocida ϕ, entre los límites *a* y *b* especificados, entonces de acuerdo con el principio de máxima entropía, se le asignaría a ϕ la una distribución rectangular R(0, 2π). La distribución asignada a *X* es la distribución arco seno U(a, b)



- La esperanza matemática y la varianza de X son:

$$E(X)=\frac{a+b}{2} \qquad V(X)=\frac{(b-a)^2}{8}$$

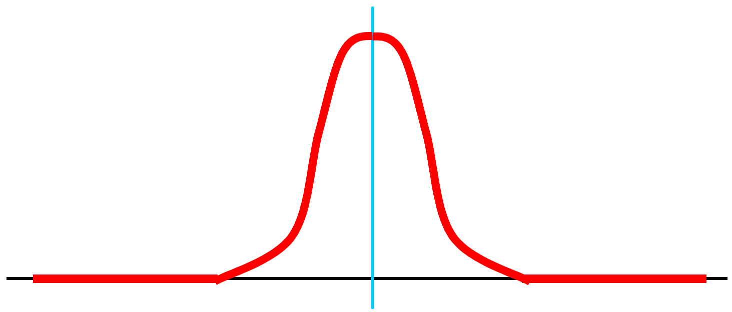
Evaluación de tipo B. Distribución arco seno (en forma de U)

- La temperatura de la sala donde se efectúan las medidas de un BPL se encuentra entre 18,5 ºC y 23,5 ºC. Por análisis previos, se sabe que se produce una variación senoidal de la temperatura.

- Calcular el valor, θ_m, y la desviación típica, $u(\theta)$ de dicha temperatura.

Evaluación de tipo B. Distribución normal

- Si la única información disponible sobre una magnitud *X* es la mejor estimación x con una incertidumbre típica asociada u(x), de acuerdo con el principio de máxima entropía, se le asignaría a *X* una distribución de probabilidad gaussiana N(x, u^2(x)).

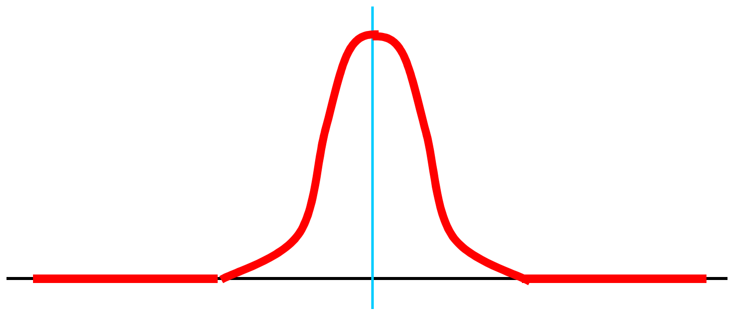


- La esperanza matemática y la varianza de X son:

$$E(X) = x \qquad V(X) = u^2(x) = \left(\frac{U(x)}{k}\right)^2$$

Evaluación de tipo B. Distribución normal

- Si la única información disponible en relación con una magnitud *X* es que responde a una distribución normal y se conocen el límite inferior *a* y un límite superior *b*, con *a* < *b*, límites que definen un intervalo con un 99,73 por ciento, en lugar de con un 100 por ciento.



- La esperanza matemática y la varianza de X son:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{36}$$

Evaluación de tipo B. Distribución t-student

- Si la fuente de información acerca de una magnitud *X* es un certificado de calibración que establece su mejor estimación *x*, la incertidumbre expandida U_p, el factor de cobertura k_p y los grados efectivos de libertad ν_{ef}, entonces debe asignarse a X una distribución t = $t_\nu(x, (U_p/K_p)^2)$ con $\nu = \nu_{ef}$ grados de libertad.

$$E(X) = x \qquad V(X) = \frac{\nu_{ef}}{\nu_{ef} - 2}\left(\frac{U_p}{k_p}\right)^2$$

- Si ν_{ef} se considera infinita o no se especifica, en cuyo caso se tomaría como infinito en ausencia de otra información, se asignará a *X* una distribución gaussiana $N(x, (U_p/K_p)^2)$

$$E(X) = x \qquad V(X) = \left(\frac{U_p}{k_p}\right)^2$$

Incertidumbre típica combinada

$y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$

La L.P.V. está basada en un desarrollo en serie de Taylor de primer orden.

SI la función modelo no es lineal, puede ser necesario tomar términos de orden superior

Ley de propagación de la incertidumbre

Componentes x_i independientes

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right]^2 \cdot u^2(x_i)$$

Componentes x_i dependientes

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right]^2 \cdot u^2(x_i) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot u(x_i, x_j)$$

Incertidumbre típica combinada

Coeficientes de sensibilidad

Incertidumbre típica

Covarianza

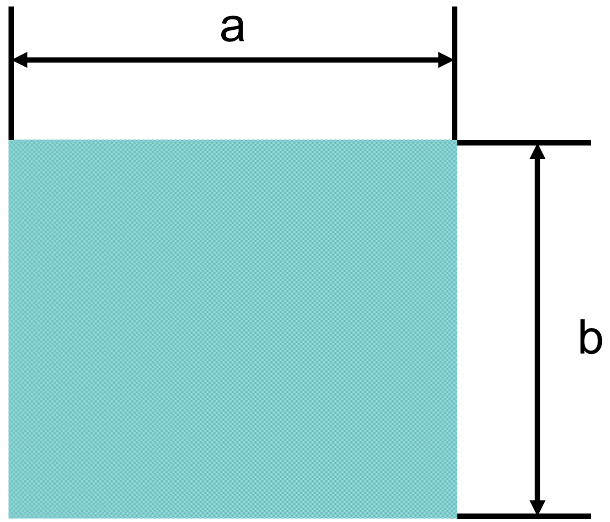
Incertidumbre típica combinada

- Cuando la no linealidad de *f* resulta significativa, es necesario incluir términos de orden más elevado en el desarrollo en serie de Taylor para la expresión de $u_c^2(y)$.

- Cuando la distribución de cada X_i es simétrica alrededor de su media, los términos más importantes de orden inmediatamente superior que deben ser añadidos a los términos de la ecuación anterior son:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]^2+\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2}\right]u^2\left(x_i\right)\cdot u^2\left(x_j\right)$$

Incertidumbre típica combinada. Ejemplo



Incertidumbre relativa

Variables de entrada correladas

- La covarianza de dos variables aleatorias es una medida de su dependencia mutua. La covarianza cov(*x*,*y*) puede estimarse mediante $s(x_i,y_i)$ obtenida a partir de *n* pares independientes de observaciones simultáneas x_i e y_i de *x* e *y*, como:

$$s\left(x,y\right)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\cdot\left(y_i-\overline{y}\right)$$

- La covarianza estimada de las dos medias *x* e *y* , viene dada

$$u\left(x,y\right)=s\left(\overline{x},\overline{y}\right)=\frac{s\left(x,y\right)}{n}$$

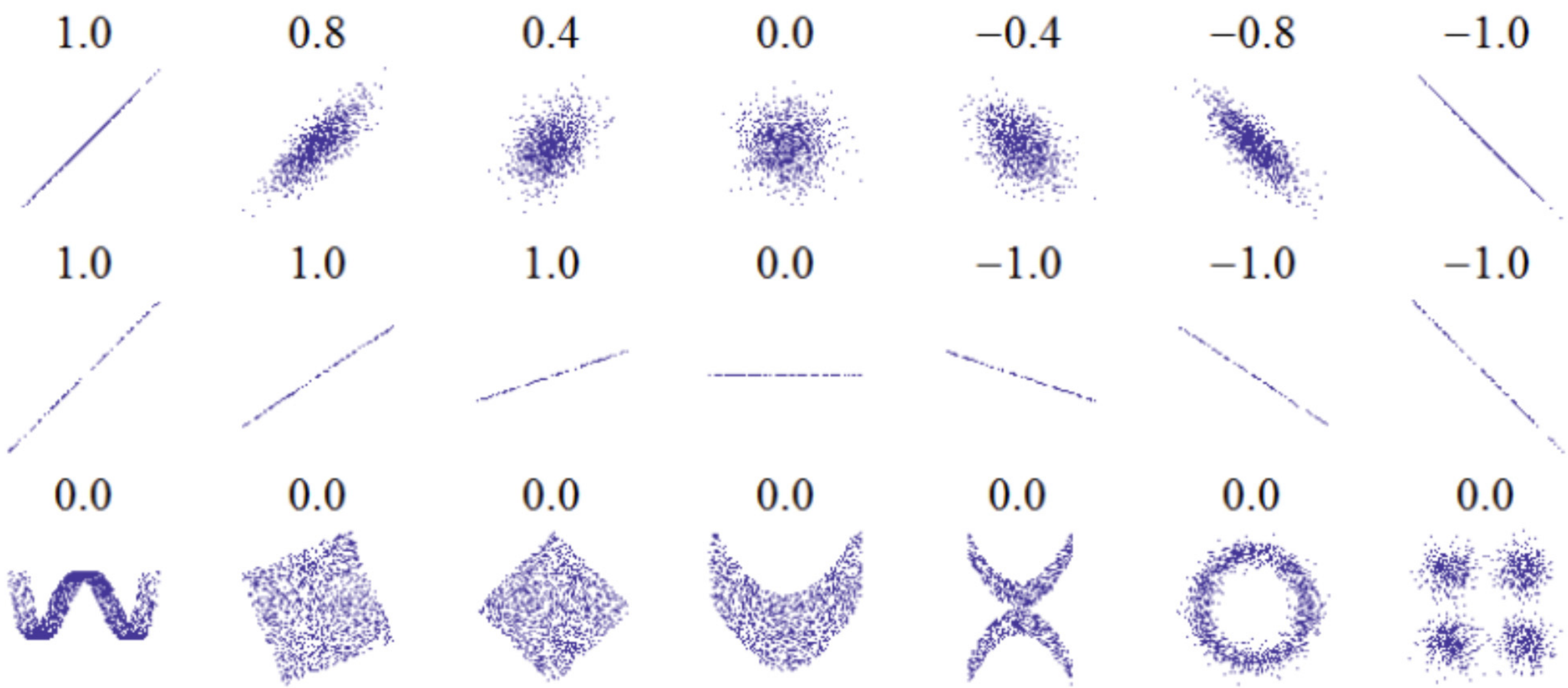
Variables de entrada correladas

- Cuando las magnitudes de entrada están correlacionadas, y x_i y x_j son las estimaciones de X_i y X_j, y $u(x_i,x_j) = u(x_j,x_i)$ es la covarianza estimada asociada a x_i y xj. El grado de correlación entre x_i y x_j viene dado por el **coeficiente de correlación** estimado como:

$$r(x,y) = \frac{u(x,y)}{u(x)\cdot u(y)} = \frac{u(x,y)}{\sqrt{u^2(x)\cdot u^2(y)}}$$

- donde $r(x_i,x_j) = r(x_j,x_i)$ y $-1 \leq r(x_i,x_j) \leq +1$. Si las estimaciones x_i y x_j son independientes, $r(x_i,x_j) = 0$, y una variación en una de las dos no implica una variación en la otra
- Pero, que su covarianza y su coeficiente de correlación sean nulos, no implica que sean independientes

Variables de entrada correladas



Variables de entrada correladas

- El término de covarianza de la ley de propagación de varianzas covarianzas puede escribirse en función de los coeficientes de correlación, más fácilmente interpretables que las covarianzas, como:

$$+2 \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot r\left(x,y\right) \cdot u\left(x\right) \cdot u\left(y\right)$$

Variables de entrada correladas

- Puede existir una correlación significativa entre dos magnitudes de entrada si se utiliza, para su determinación:
  - el mismo instrumento de medida,
  - el mismo patrón,
  - el mismo método de medida.
  - la misma referencia con incertidumbre típica significativa

Variables de entrada correladas

- La covarianza asociada a los estimados de dos magnitudes de entrada, X_i y X_j puede considerarse igual a cero o insignificante en cualquiera de los siguientes casos:

  - las magnitudes de entrada X_i y X_k son independientes; por ejemplo, cuando se han observado reiterada, pero no simultáneamente, en diferentes experimentos independientes, o cuando representan magnitudes resultantes de diferentes evaluaciones que se han realizado de forma independiente,

  - cualquiera de las magnitudes de entrada X_i y X_k puede tratarse como constante,

  - no existe información suficiente para valorar la existencia de una correlación entre las magnitudes de entrada X_i y X_k.

Variables de entrada correladas. Ejemplo