Lenguaje matemático, conjuntos y números

Prueba Objetiva Calificable

Ejercicio 1
Sea $U = \mathbb{Z}$ el universo de las variables x e y. Consideramos las proposiciones:
p; $\forall x \, \exists y$ tal que $2x + y = 22$
q; $\exists y \, \forall x$ tal que $2x + y = 22$
r; $\forall y \, \exists x$ tal que $2x + y = 22$
Se tiene:
a) p y q son falsas.
b) p y r son falsas.
c) q y r son falsas.

Ejercicio 2
Sea $(G, \perp)$ un grupo conmutativo de elemento neutro e. Sea un elemento fijo $a \in G$, $a \neq e$. Se define en G la operación $\star$ mediante $x \star y = x \perp a \perp y$. Se tiene:
a) No existe elemento neutro de $\star$ en G.
b) Todo elemento de G tiene simétrico respecto de $\star$.
c) Ninguna de las otras dos opciones.

Ejercicio 3 En el conjunto $\mathbb{N}^*$, se consideran las siguientes relaciones:

$$a\mathcal{R}b \quad \text{si y sólo si} \quad a < b + 1$$

$$a\mathcal{S}b \quad \text{si y sólo si} \quad a + b \text{ es par y } a \text{ es múltiplo de } b$$

a) $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son relaciones de orden en $\mathbb{N}^*$.
b) Sólo $\mathcal{R}$ es relación de orden en $\mathbb{N}^*$.
c) Ninguna de las otras dos opciones.

Ejercicio 4 Sean A y B dos conjuntos tales que $\text{card}(A) = 5$ y $\text{card}(B) = 3$. El número de aplicaciones sobreyectivas de A a B es:
a) 180.
b) 160.
c) 150.

Ejercicio 5 Sean un conjunto arbitrario A y $f\colon A \to A$ cualquier aplicación inyectiva. Consideramos los enunciados siguientes:
1) f es biyectiva.
2) Si A es un conjunto finito entonces f es biyectiva.
3) Si A es un conjunto numerable entonces f es biyectiva.
Se tiene:
a) Los tres enunciados son verdaderos.
b) Sólo los enunciados de 2) y 3) son verdaderos.
c) Ninguna de las otras dos opciones.

Soluciones

Ejercicio 1

La proposición p es verdadera pues $\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z}$ tal que $2x + y = 22$. Basta observar que si x es cualquier número entero entonces $y = 22 - 2x$ es también un número entero.
La proposición q es falsa pues no existe ningún número entero y tal que la igualdad $2x + y = 22$ sea verdadera para todo $x \in \mathbb{Z}$.
La proposición r es falsa pues si y es cualquier número entero, el número x cumpliría $x = \frac{22-y}{2}$ y no es cierto que para todo entero y, x sea un número entero. Por ejemplo, para $y = 21$ no existe ningún entero x tal que $2x + y = 22$.
La opción correcta es la c).

Ejercicio 2

La opción correcta es la b).
Veamos que $\star$ tiene elemento neutro. Buscamos un elemento $n \in G$ tal que

$$x \star n = n \star x = x$$

para todo $x \in G$.
De

$$x \star n = x \perp a \perp n = x \perp (a \perp n) = x$$

para todo $x \in G$ se deduce que

$$a \perp n = e \text{ , es decir, } n = a^{-1} \text{ ,}$$

siendo a^{-1} el simétrico de a para $\perp$. Para ese valor de n se tiene

$$n \star x = a^{-1} \perp a \perp x = (a^{-1} \perp a) \perp x = e \perp x = x$$

para todo $x \in G$.

Busquemos el simétrico de cualquier x respecto de $\star$. Buscamos $y \in G$ tal que

$$x \star y = y \star x = a^{-1}.$$

De $x \star y = x \perp a \perp y = a^{-1}$, se obtiene que $a \perp y = x^{-1} \perp a^{-1}$ y por tanto $y = a^{-1} \perp x^{-1} \perp a^{-1}$. Comprobamos que $y \star x = a^{-1}$. En efecto, $y \star x = (a^{-1} \perp x^{-1} \perp a^{-1}) \perp a \perp x$ y teniendo en cuenta que $(G, \perp)$ es un grupo conmutativo se obtiene que $y \star x = a^{-1} \perp x^{-1} \perp (a^{-1} \perp a) \perp x = a^{-1} \perp x^{-1} \perp e \perp x = a^{-1} \perp (x^{-1} \perp x) = a^{-1} \perp e = a^{-1}$.

Ejercicio 3

La opción correcta es la a).
En efecto, en $\mathbb{N}^*$ se tiene

$$a\mathcal{R}b \iff a < b + 1 \iff a + 1 \leqslant b + 1 \iff a \leqslant b$$

Por tanto, la relación $\mathcal{R}$ es una relación de orden en $\mathbb{N}^*$.
La relación $\mathcal{S}$ es también una relación de orden en $\mathbb{N}^*$.
Reflexiva: Para todo $a \in \mathbb{N}^*$ $a\mathcal{S}a$ pues $a + a = 2a$ es par y $a = 1 \cdot a$ es múltiplo de a .
Antisimétrica: Para todo $a, b \in \mathbb{N}^*$, si $a\mathcal{S}b$ y $b\mathcal{S}a$, entonces a es múltiplo de b y b es múltiplo de a, esto es, $a = kb$ y $b = ha$ con $k, h \in \mathbb{N}^*$. Por tanto $a = hka$, es decir, $hk = 1$ y como $k, h \in \mathbb{N}^*$ resulta que $h = k = 1$. En consecuencia, $a = b$.
Transitiva : Para todo $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, si $a\mathcal{S}b$ y $b\mathcal{S}c$, entonces $a + b$ y $b + c$ son pares y a es múltiplo de b que a su vez es múltiplo de c. Por tanto $(a + b) + (b + c) = a + (b + b) + c = a + 2b + c$ es par y en consecuencia $a + c$ es par. Por otro lado, $a = kb$ y $b = hc$ con $k, h \in \mathbb{N}^*$. En consecuencia, $a = (kh)c$ y a es múltiplo de c. Por tanto, $a\mathcal{S}c$.

Ejercicio 4

La opción correcta es la c).
Sabemos que existen $3^5 = 243$ aplicaciones de A a B y supongamos que $B = \{c, d, e\}$. Veamos cuántas aplicaciones no son sobreyectivas.
Son las aplicaciones donde la imagen de A, el conjunto $f(A)$, sólo consta de un elemento o aquellas tales que el conjunto $f(A)$ consta de exactamente 2 elementos.
Hay obviamente 3 aplicaciones tales que $f(A)$ sólo consta de un elemento, una por cada elemento de B.

¿Cuántas aplicaciones hay tales que $f(A) = \{c, d\}$?
Son todas las aplicaciones sobreyectivas del conjunto A al conjunto $B' = \{c, d\}$, y éstas son todas las aplicaciones posibles de A a B' salvo dos, f_1 y f_2, tales que $f_1(A) = \{c\}$ y $f_2(A) = \{d\}$. Es decir, hay $2^5 - 2 = 30$ aplicaciones tales que $f(A) = \{c, d\}$. Análogamente hay 30 aplicaciones tales que $f(A) = \{c, e\}$ y otras 30 tales que $f(A) = \{d, e\}$.
En consecuencia el número de aplicaciones sobreyectivas de A a B es:

$$243 - 3 - 30 - 30 - 30 = 150$$

Ejercicio 5

La opción correcta es la c).
Por el teorema 5.14, sabemos que si A es un conjunto finito toda aplicación $f\colon A \to A$ inyectiva es también sobreyectiva. Por tanto el enunciado de 2) es verdadero. Los enunciados de 1) y 3) no son verdaderos. Basta considerar la aplicación $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(n) = n^2$ que es inyectiva y no es biyectiva.