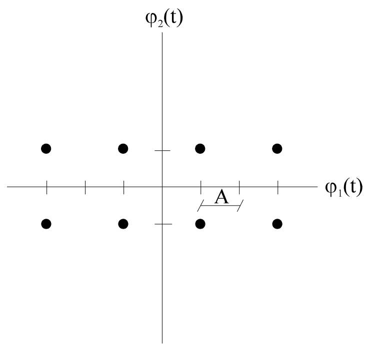
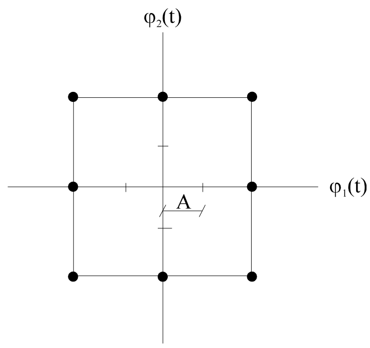
Tema 3: detección óptima en canales gaussianos

3.1 Dadas las constelaciones de señales equiprobables, mostradas en la siguiente figura, se pide calcular los apartados a y b de todas ellas:

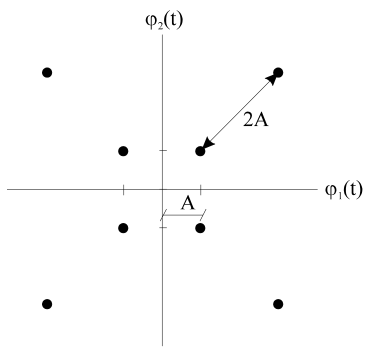
a. El valor de A para que E_s=1.
b. Establecer las regiones de decisión así como el valor de la P_e máxima con $\eta_0/2 = -13$ dB/Hz



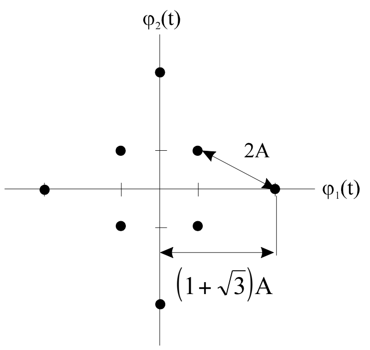
(1)



(2)



(3)

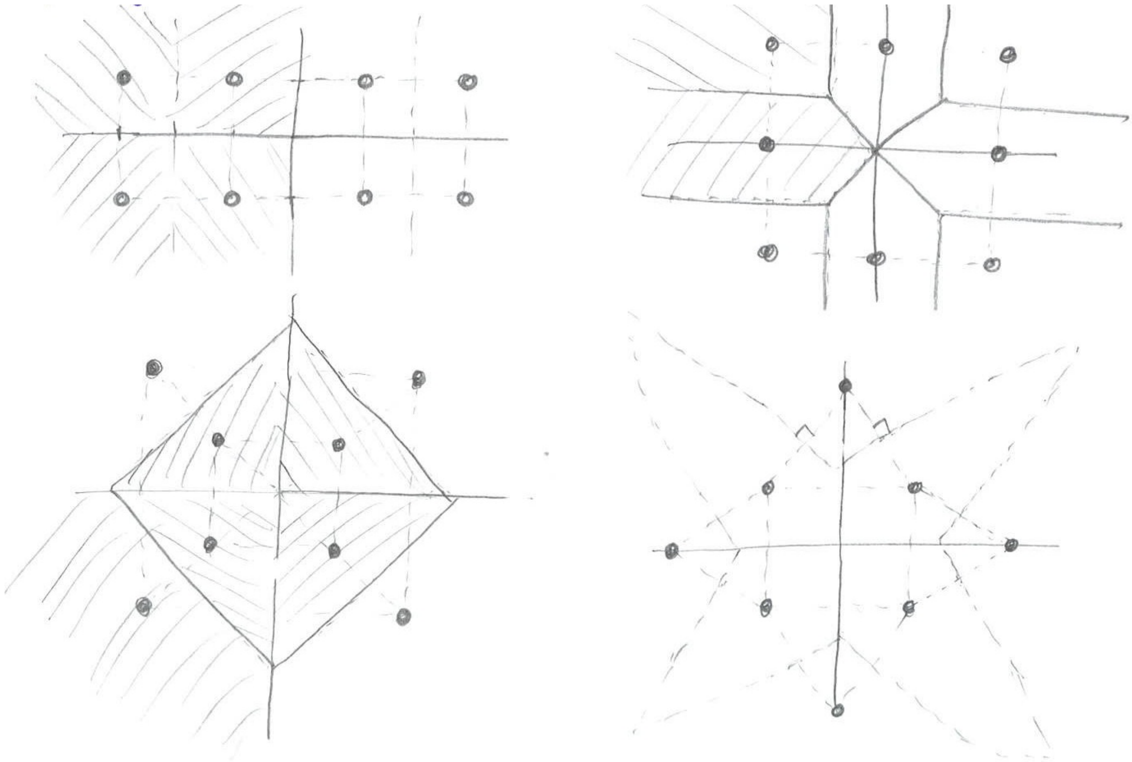


(4)

Solución numérica:

a. $A = \frac{1}{\sqrt{6}}$; $A = \frac{1}{\sqrt{6}}$; $A = \frac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}}$; $A = \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{3}}}$

b. P_e=0.2515; P_e=0.2515; P_e=0.31199; P_e=0.1421



3.2 Dado el siguiente conjunto de señales, definidas en el intervalo de $-1 \leq t < 1$:

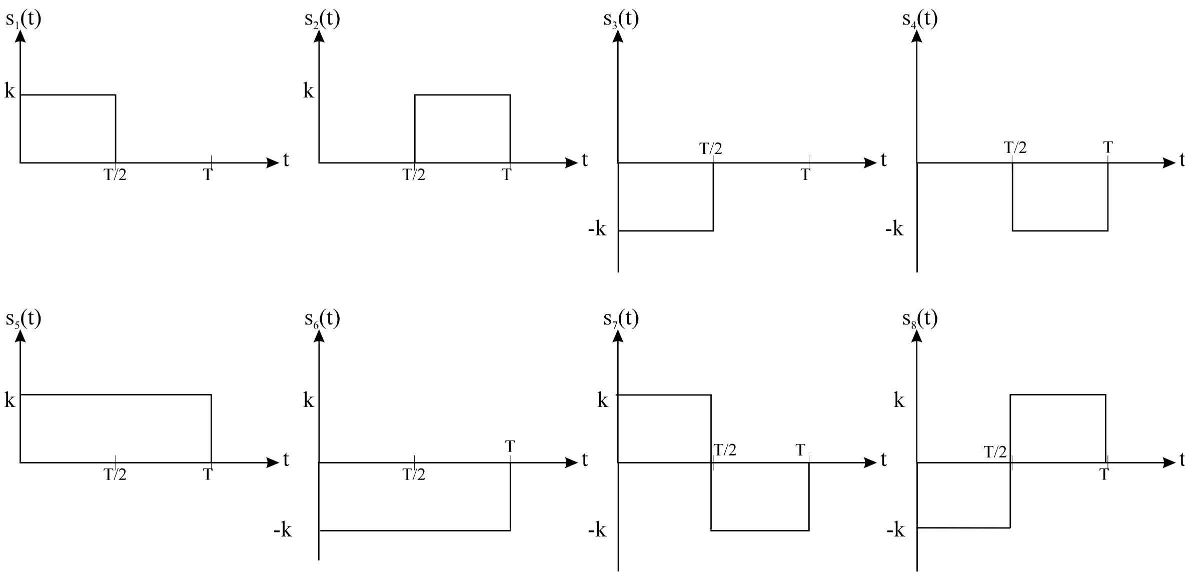
$$s_1(t) = 1 \quad ; \quad s_2(t) = t \quad ; \quad s_3(t) = t^2$$

Se pide:

a. Utilizando el método de Gram-Schmidt, encontrar una base ortonormal que permita representar las señales.
b. Representar la constelación correspondiente.

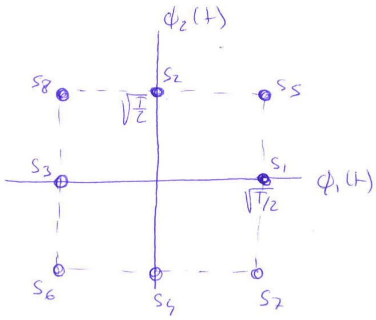
3.3 Para transmitir un conjunto de ocho símbolos equiprobables, a través de un sistema en banda base, se eligen las ocho señales representadas en la figura.

a. Dibujar una posible constelación del conjunto de señales, indicando la distancia entre las señales adyacentes.



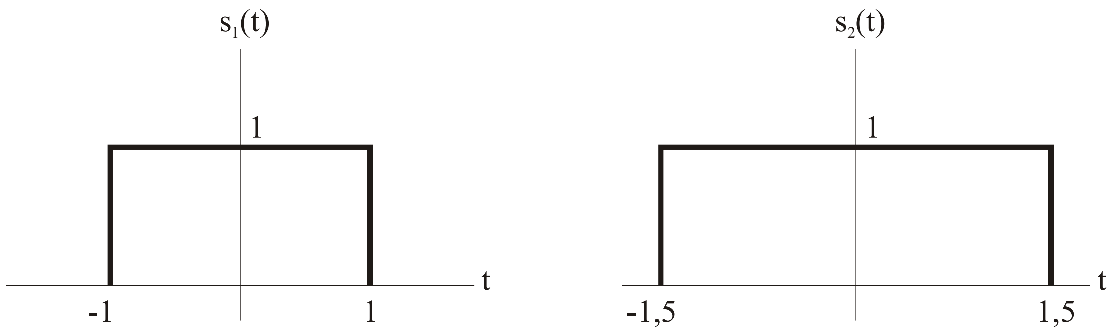
Solución:

Representación de la constelación



$$d_{12} = d_{14} = \sqrt{T}\ ; \quad d_{13} = \sqrt{2T}\ ; \quad d_{15} = d_{17} = \sqrt{\frac{T}{2}}\ ; \quad d_{16} = d_{18} = \sqrt{\frac{3T}{2}}$$

3.4 Se utilizan las señales de la siguiente figura, para transmitir dos mensajes equiprobables, a través de un canal perturbado por ruido aditivo blanco Gaussiano, con densidad espectral de potencia de ruido $N_0/2 = 1\ W/Hz$



Se pide:

a. Obtener y representar una base ortonormal que permita representar la constelación de las dos señales.

b. Representar la constelación correspondiente.
c. Calcular la probabilidad de error correspondiente.

3.5 Un transmisor envía una de cuatro posibles formas de onda (con igual probabilidad), cada T segundos por un canal con ruido blanco y gaussiano aditivo.

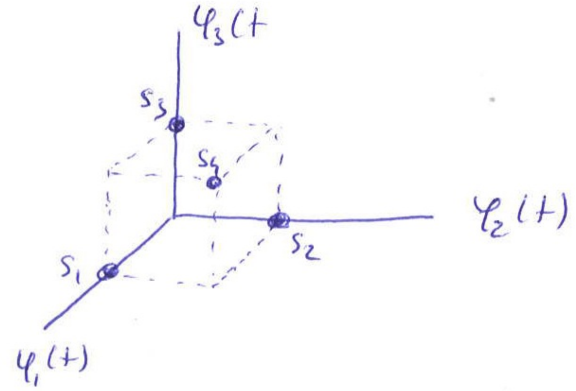
$$s_1(t)=\varphi_1(t);\ s_2(t)=\varphi_2(t);\ s_3(t)=\varphi_3(t);\ s_4(t)=\varphi_1(t)+\varphi_2(t)+\varphi_3(t)$$

$$\varphi_i(t)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{T}}\cos(\omega_i t) & 0\le t<T \quad \omega_i=\dfrac{2\pi i}{T} \quad i=1,2,3\\ 0 & \text{c.c.}\end{cases}$$

a. Indicar justificadamente si las $\varphi_i(t)$ constituyen una base ortonormal.
b. Representar la constelación correspondiente al conjunto de señales.
c. Obtener la separación mínima entre las pulsaciones ω_i (ω_{i+1}-ω_i), para que las señales $\varphi_i(t)$ sean ortogonales.

Solución numérica:

a. Sí constituyen una base ortonormal.
b. Representación de la constelación:



c. $\Delta\omega=\frac{\pi}{T}$

3.6 Un sistema de comunicación digital emite un conjunto de señales equiprobables de la forma:

$$s_i=i^2\cdot g(t),\ \text{con}\ i=1,\ldots,3N\ \text{cada}\ T\ \text{segundos.}$$

Se desea saber:

a. Indicar de forma justificada la dimensión de la constelación que permita representar el conjunto de señales.
b. Velocidad de transmisión, en función de N.
c. Sabiendo que E_g es la energía de $g(t)$, calcular la energía media por símbolo en función de N.

d. Calcular la región de decisión para $i=1$, en función de $d = \sqrt{E_g}$.

e. Calcular la probabilidad de error correspondiente a la señal $s_1(t)$.

Nota: $\sum_{i=1}^{N} i^4 = \frac{N(N+1)(2N+1)(3N^2+3N-1)}{30}$

3.7 Suponga que dos señales $s_1(t)$ y $s_2(t)$ sean ortogonales en el intervalo $[0,T]$. Una función muestra, $n(t)$, de un proceso aleatorio de ruido blanco gaussiano de media cero se correlaciona con $s_1(t)$ y $s_2(t)$ para obtener

$$n_1 = \int_0^T s_1(t)\, n(t)\, dt$$
$$n_2 = \int_0^T s_2(t)\, n(t)\, dt$$

Probar que $E[n_1\, n_2]=0$.

3.8 Un sistema de comunicaciones digitales transmite el siguiente conjunto de señales equiprobables:

$$s_i(t) = a_i\alpha(t) + b_i\beta(t),\ \ i=1, 2, 3, 4.$$

Con a_i, b_i enteros distintos de 0.

Sabiendo que:

$$\alpha(t)\bullet\alpha(t) = T, \quad \alpha(t)\bullet\beta(t) = T, \quad \beta(t)\bullet\beta(t) = 2T$$

Se pide:

a. Calcular una base ortonormal para las $s_i(t)$.
b. Calcular las coordenadas de las señales transmitidas, respecto a la base obtenida en el apartado anterior.
c. Si $a_1=1$, $b_1=1$, $a_2=-2$, $b_2=-1$, $a_3=2$, $b_3=-1$, $a_4=-2$, $b_4=1$, $T=10^{-6}$ s, dibujar la constelación y las regiones de decisión.

Utilizando los valores de a_i, b_i y T especificados para el apartado anterior y sabiendo que en el receptor se recibe la señal $r(t)=s_i(t)+n(t)$, con $n(t)$ ruido blanco Gaussiano, cuya densidad espetral de potencia es $\frac{\eta_0}{2} = -63\ dBW/Hz$.

d. Acotar el valor de la probabilidad de error.

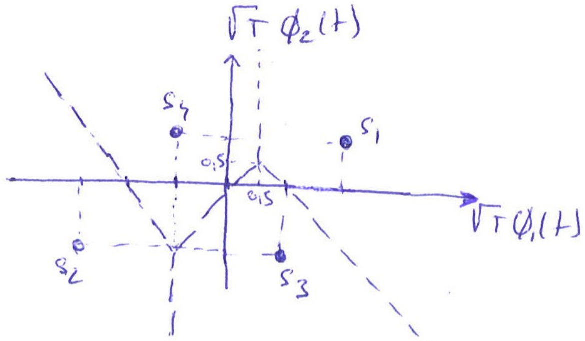
Solución numérica:

a. Base ortonormal:

$$\emptyset_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\alpha(t); \qquad \emptyset_2(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}(\beta(t) - \alpha(t))$$

b. $s_i(t) = \sqrt{T}(a_i + b_i)\phi_1(t) + \sqrt{T}b_i\phi_2(t)$

c. Regiones de decisión:



d. d_{min}=2.24x10^{-3}; $P_e \leq 0.17$

3.9 Un sistema de transmisión de tipo binario utiliza las señales $s_0(t)$ y $s_1(t)$ para transmitir las dos hipótesis equiprobables, a través de un sistema que introduce ruido gaussiano cuya densidad espectral de potencia es $N_0/2$.

$$s_0(t) = \begin{cases} A\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{Resto} \end{cases} \quad ; \quad s_1(t) = \begin{cases} A\cos\left(\frac{\pi t}{T} + \phi\right) & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{Resto} \end{cases}$$

Donde T es la duración del símbolo.

a. Calcular una base ortonormal para $s_0(t)$ y $s_1(t)$.
b. Obtener la constelación correspondiente a las dos señales y representar las regiones de decisión.
c. Determinar la probabilidad de error.

Solución numérica:

a. Base ortonormal:

$$\phi_1(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{T}}\cos\frac{\pi t}{T}; 0 \leq t < T \\ 0; c.c. \end{cases}; \qquad \phi_2(t) = \begin{cases} (-1)\sqrt{\frac{2}{T}}\sin\frac{\pi t}{T}; 0 \leq t < T \\ 0; c.c. \end{cases}$$

b. $s_0(t) = A\sqrt{\frac{T}{2}}\phi_1(t);$ $\qquad s_1(t) = A\sqrt{\frac{T}{2}}\cos\phi\, \phi_1(t) + A\sqrt{\frac{T}{2}}\sin\phi\, \phi_2(t)$

Regiones de decisión:

$$\text{Zona 0 } con\ \frac{\phi}{2} < \varphi < \left(\frac{\phi}{2} + \pi\right)$$

$$\text{Zona 1 } con \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\phi}{2} \\ \left(\frac{\phi}{2} + \pi\right) \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

c. $P_e \leq Q\left(A\sqrt{\frac{T}{N_0}}\sin\frac{\phi}{2}\right)$

3.10 Consideremos un conjunto de M señales ortogonales $s_m(t)$, $1 \le m \le M$, $0 \le t < T$, todas con la misma energía, E. Definimos un nuevo conjunto de M señales como

$$s'_m(t) = s_m(t) - \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} s_k(t), \quad 1 \le m \le M, \quad 0 \le t < T$$

Muestre que las M señales $\{s'_m(t)\}$ tienen la misma energía de valor

$$E' = \frac{M-1}{M} E,$$

y están igualmente correladas, con coeficiente de correlación

$$r_{mn} = \frac{1}{E'}\int_0^T s'_m(t)\, s'_n(t)\, dt = -\frac{1}{M-1}$$

3.11 Un sistema de comunicación transmite las señales $\{s_i(t)\}$, $i = 0,1,2,3,4,5,6,7$

$$s_i(t) = \begin{cases} A \cdot \cos(\omega_c \cdot t + \frac{\pi}{4} i) & , \quad 0 \le t < T \\ 0 & , \quad \text{c.c.} \end{cases} ; \quad \omega_c = n_c \cdot \frac{2\pi}{T}, \text{ con } n_c \text{ entero}$$

por un canal con ruido aditivo blanco gaussiano con densidad espectral de potencia de valor $N_0/2$ y media nula. Se pide:

a. Obtener una base ortonormal para representar estas señales.
b. Dibujar el esquema de bloques de un receptor de correlación diseñado para detectar estas señales.
c. Calcular una cota superior de la probabilidad de error de símbolo en el caso de A = 0,2 mV, $N_0/2 = 10^{-15}$ W/Hz y T = 8μs.

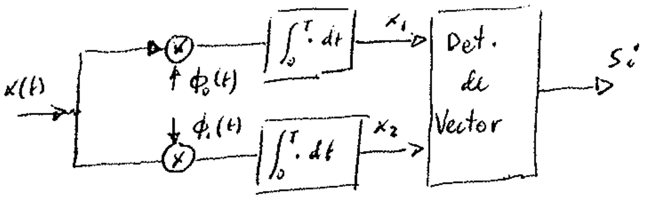
Nota: $P_e \le (M-1) \cdot Q\left(\frac{d_{\text{mín}}}{\sqrt{2N_0}}\right)$

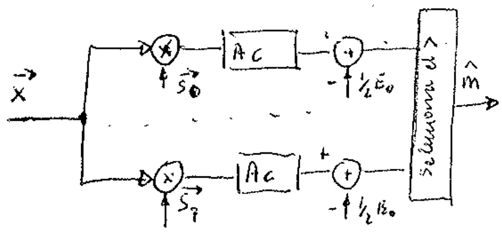
Solución numérica:

a. Base ortonormal:

$$\emptyset_1(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\ \omega_c t \ ; 0 \le t < T \\ 0; c.c. \end{cases} ; \qquad \emptyset_2(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\ \omega_c t \, ; 0 \le t < T \\ 0; c.c. \end{cases}$$

b.





c. $P_e \leq 5{,}5 \times 10^{-6}$

3.12 Las señales $\{s_i(t)\}$, i=1,2,3,4, se utilizan para transmitir cuatro mensajes equiprobables por un canal con ruido aditivo blanco gaussiano con densidad espectral de potencia de valor $N_0/2$. Se pide:

a. Obtener una base ortonormal para el espacio de señal e indicar cuál es su dimensión.
b. Dibujar la constelación de señal con indicación de las regiones de decisión con el criterio de mínima probabilidad de error.
c. Dibujar las respuestas al impulso de los filtros adaptados a cada una de las señales de la base.
d. Calcular la probabilidad de error de símbolo en función de A y de $N_0/2$.

$$s_1(t) = \begin{cases} A/2 & , \quad 0 \leq t < T/2 \\ -A/2 & , \quad T/2 \leq t < T \\ 0 & , \quad \text{c.c.} \end{cases} \qquad s_2(t) = \begin{cases} -A/2 & , \quad 0 \leq t < T/2 \\ A/2 & , \quad T/2 \leq t < T \\ 0 & , \quad \text{c.c.} \end{cases}$$

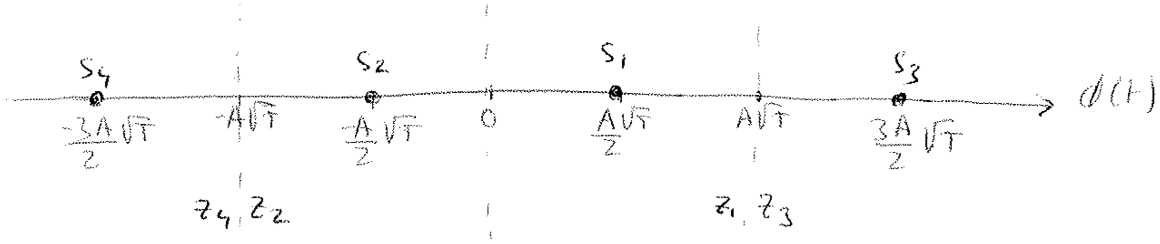
$$s_3(t) = \begin{cases} 3A/2 & , \quad 0 \leq t < T/2 \\ -3A/2 & , \quad T/2 \leq t < T \\ 0 & , \quad \text{c.c.} \end{cases} \qquad s_4(t) = \begin{cases} -3A/2 & , \quad 0 \leq t < T/2 \\ 3A/2 & , \quad T/2 \leq t < T \\ 0 & , \quad \text{c.c.} \end{cases}$$

Solución numérica:

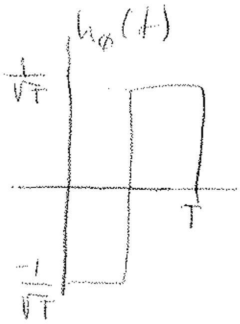
a. Base ortonormal:

$$\emptyset\,(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{T}}; 0 \leq t < \dfrac{T}{2} \\ \dfrac{-1}{\sqrt{T}}; \dfrac{T}{2} \leq t < T \\ 0; c.c. \end{cases}$$

b.



c.



$h_\phi(t) = \phi(T-t)$

d. $P_e = \frac{3}{2} Q\left(A\sqrt{\frac{T}{2N_0}}\right)$

3.13 Sea el conjunto de señales dado por la expresión:

$$s_i(t) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2E}{T}} \cos\left(\omega_c t + i \cdot \dfrac{\pi}{4}\right) & , \quad 0 \le t < T \\ 0 & , \quad \text{c.c.} \end{cases}$$

donde i=1,2,3,4 y $\omega_c = n_c \cdot 2\pi/T$ para algún valor entero n_c.

a. ¿Cuál es la dimensión, N, del espacio generado por este conjunto de señales?
b. Obtenga una base ortonormal para representar este conjunto.
c. Obtenga los vectores de señal de cada una de las señales $s_i(t)$.
d. Dibuje los vectores de señal en el espacio de señal.

Solución numérica:

a. N=2
b. Base ortonormal:

$$\phi_1(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_c t + \frac{\pi}{4}) \,; 0 \le t < T \\ 0; c.c. \end{cases}; \qquad \phi_2(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_c t + \frac{3\pi}{4}) \,; 0 \le t < T \\ 0; c.c. \end{cases}$$

c.

$$\overline{s_1} = \left[\sqrt{E}, 0\right] ; \overline{s_2} = \left[\sqrt{\frac{E}{2}}, \sqrt{\frac{E}{2}}\right] ; \ \overline{s_3} = \left[0, \sqrt{E}\right] ; \overline{s_4} = \left[-\sqrt{\frac{E}{2}}, \sqrt{\frac{E}{2}}\right]$$

d.