Problemas resueltos:

Problema 1. La figura 1 representa un generador trifásico equilibrado, de secuencia directa, alimentando a una carga pasiva, trifásica equilibrada, de valor $\mathcal{Z}_1 = 30\Omega\ /30^{\circ}$ y conectada en triángulo. La tensión de fase $\mathcal{E}_1 = 300$V.

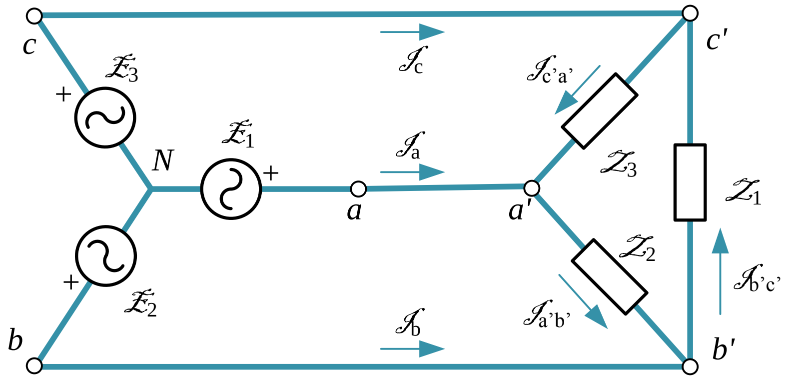


Figura 1.

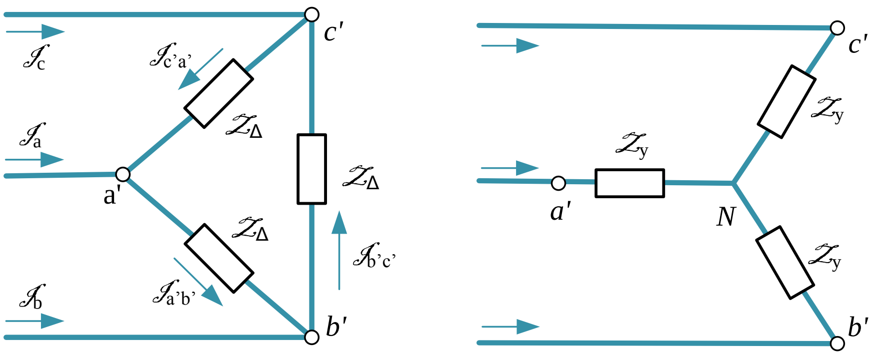
Se pide:

a) Obtener el equivalente en estrella de la carga.

Al ser un sistema trifásico equilibrado, las tres cargas son iguales entre sí:

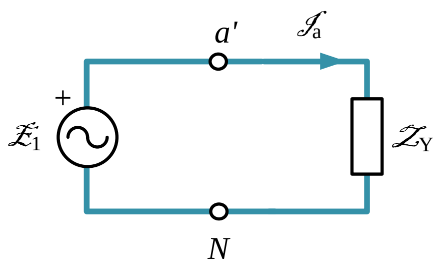
$$\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_2 = \mathcal{Z}_3 = \mathcal{Z}_\Delta$$

Y la conversión de triángulo a estrella es inmediata.



$$\mathcal{Z}_Y = \frac{1}{3}\mathcal{Z}_\Delta = \frac{1}{3}30\Omega\angle 30^{\circ} = 10\Omega\angle 30^{\circ} = 10(\cos 30^{\circ} + j\,\text{sen}\ 30^{\circ}) = \frac{10\sqrt{3}}{2} + j\frac{10}{2}$$

b) Obtener el circuito monofásico equivalente.



c) Obtener las tensiones de línea.

Al ser un generador trifásico equilibrado, de secuencia directa, las tensiones de fase son

$$\mathcal{E}_1 = 300V\angle 0^\circ$$
$$\mathcal{E}_2 = 300V\angle -120^\circ$$
$$\mathcal{E}_3 = 300V\angle 120^\circ$$

Y las tensiones de línea se obtienen directamente

$$\mathcal{V}_{ab} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = 300V\angle 0^\circ \cdot (\sqrt{3}\angle 30^\circ) = 300\sqrt{3}V\angle 30^\circ = 512{,}62V\angle 30^\circ$$
$$\mathcal{V}_{bc} = \mathcal{V}_{ab}(1\angle -120^\circ) = 300\sqrt{3}V\angle 30^\circ(1\angle -120^\circ) = 300\sqrt{3}V\angle -90^\circ = 512{,}62V\angle -90^\circ$$
$$\mathcal{V}_{ca} = \mathcal{V}_{ab}(1\angle 120^\circ) = 300\sqrt{3}V\angle 30^\circ(1\angle 120^\circ) = 300\sqrt{3}V\angle 150^\circ = 512{,}62V\angle 150^\circ$$

d) Obtener las intensidades de línea.

A partir del monofásico equivalente se obtiene la intensidad de línea $\mathcal{I}_a$. Al ser un sistema trifásico equilibrado, las intensidades restantes se obtienen directamente:

$$\mathcal{I}_a = \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{Z}_Y} = \frac{300V\angle 0^\circ}{10\,\Omega\angle 30^\circ} = 30\,A\angle -30^\circ$$
$$\mathcal{I}_b = \mathcal{I}_a(1\angle -120^\circ = 30\,A\angle -150^\circ$$
$$\mathcal{I}_c = \mathcal{I}_a(1\angle 120^\circ = 30\,A\angle 90^\circ$$

e) Obtener la potencia aparente.

$$S = \sqrt{3}V_L I_L = \sqrt{3}\sqrt{3}\cdot 300\cdot 30\,VA = 27\,kVA$$

f) Obtener la potencia reactiva consumida por cada una de las fases de la carga.

La potencia reactiva consumida por una fase la podemos obtener a partir de la potencia aparente obtenida anteriormente. La potencia aparente por fase en un sistema trifásico equilibrado es:

$$S_F = \frac{S}{3}VA = \frac{27}{3}kVA = 9kVA$$

Y de ahí la potencia reactiva de una fase:

$$Q_F = S_F \cdot \mathrm{sen}\varphi = 9kVA \cdot \mathrm{sen}30^\circ = 4{,}5kVAr$$

También se pude obtener a partir a partir de la corriente de línea y de la impedancia de la carga:

$$I = 30A;$$
$$\mathcal{Z}_Y = R + jX = \frac{10\sqrt{3}}{2} + j\frac{10}{2}; \qquad Q_F = I^2 \cdot X = 30^3 \cdot 5VAr = 4{,}5kVAr$$

g) Obtener la potencia reactiva por fase cedida por el generador.

Dado que la única impedancia del circuito es la carga, la potencia reactiva por fase cedida por el generador coincide con la demanda por la carga.

$$Q_{Fg} = 4{,}5kVAr$$

Problema 2. (Basado en el problema 6.1 del libro "Teoría de circuitos. Teoría y problemas resueltos" de José Fernández Moreno. Ed. Paraninfo)

El circuito de la figura 2 representa un generador trifásico equilibrado de tensiones, de 50Hz de frecuencia, que alimenta a 3 cargas. La primera es un motor M de 10kW de potencia y $\cos\varphi_M$=0,8. La segunda carga es una carga trifásica equilibrada compuesta en total por 60 lámparas incandescentes de 100W cada una. Las lámparas incandescentes se supone que son resistencias R ideales. La tercera carga es una carga trifásica equilibrada de la que se desconocen sus características.

La línea tiene una impedancia $\mathcal{Z}_L$ =0,2+j0,5 Ω. La potencia total consumida por las tres cargas (medida en a', b', c') es P_C= 28kW y $Q_C = Q_{Fg} = \sqrt{3}\cdot 9{,}65\text{kVAr}$. La tensión de línea en la carga (medida en a', b', c') es de 380V.

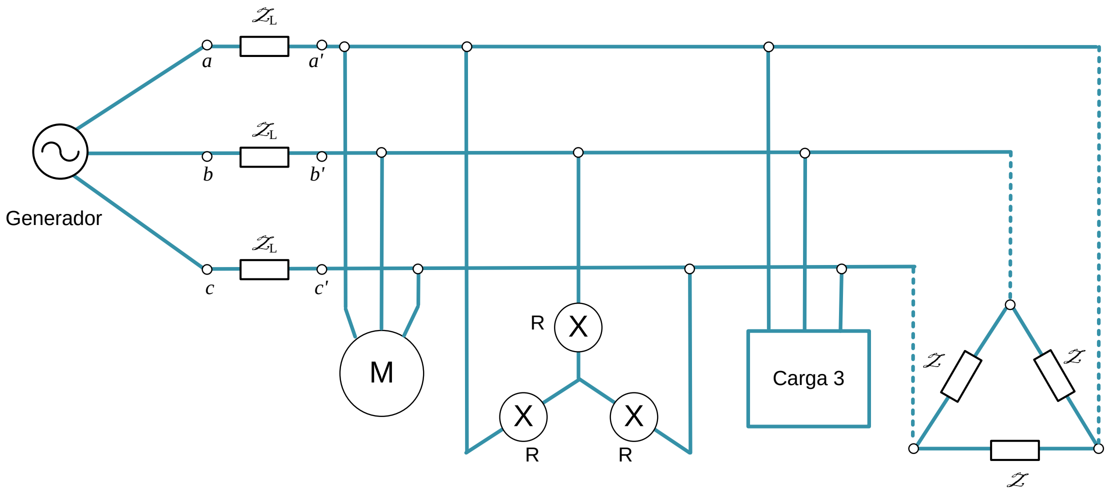


Figura 2.

Se pide:

a) Obtener el factor de potencia de las 3 cargas conjuntamente ($\cos\varphi_C$).

Método 1.- Partiendo de las potencias P_C y Q_C se puede obtener el factor de potencia conjunto de las 3 cargas ($\cos\varphi_C$):

$$\tan\varphi_C = \frac{Q_C}{P_C} = \frac{\sqrt{3}\cdot 9{,}6\text{kVAr}}{28\text{kW}} = 0{,}594\,; \qquad \varphi_C = \text{atan}\left(\frac{Q_C}{P_C}\right) = \text{atan}\left(\frac{\sqrt{3}\cdot 9{,}6\text{kVAr}}{28\text{kW}}\right) = 30{,}7^\text{o}$$

$$\boxed{\cos\varphi_C = \cos 30{,}7^\text{o} = 0{,}86}$$

Método 2.- También se puede obtener a partir de la potencia aparente y de la definición de potencia activa:

$$S_C = \sqrt{P_C^{\,2} + Q_C^{\,2}} = 32{,}56\text{kVA}\,; \quad P_C = S_C \cdot \cos\varphi_C\,;$$

$$\boxed{\cos\varphi_C = \frac{P_C}{S_C} = 0{,}86}$$

b) Obtener la potencia reactiva Q1 consumida por el motor (carga 1).

Con los datos del motor y la definición de potencia activa, se tiene la potencia aparente:

$$P_1 = S_1 \cdot \cos\varphi_M \; ; \; S_1 = \frac{P_1}{\cos\varphi_M}$$

$$S_1 = \frac{10\text{kW}}{0{,}8} = 12{,}5\text{kVA}$$

Y con la definición de potencia reactiva:

$$Q_1 = S_1 \cdot \text{sen}\varphi_M \; ; \; \varphi_M = \arccos(0{,}8) = 36{,}86^\circ$$

$$Q_1 = 12{,}5\text{kVA} \cdot \text{sen}(36{,}86^\circ) = 7{,}5\text{kVAr}$$

O directamente, sustituyendo la potencia aparente por su valor en función de la potencia activa: $Q_1 = P_1 \cdot \tan\varphi_M$

$$\boxed{Q_1 = 10\text{kW} \cdot \tan(36{,}86^\circ) = 7{,}5\text{kVAr}}$$

c) Obtener la potencia activa P_2 consumida por las lámparas incandescentes (carga 2).

Al ser todas las lámparas resistencias ideales, la carga 2 sólo consume potencia activa P_2, por lo tanto su factor de potencia $\cos\varphi_2 = 1$. El total de potencia consumida por las lámparas resulta:

$$P_2 = 60 \cdot 100\text{W} = 6\text{kW}$$

d) Obtener la potencia activa P_3 y reactiva Q_3 consumida por la tercera carga 3.

Conocida la potencia total consumida por las 3 cargas y las potencias consumidas por las 2 primeras cargas, la potencia activa y reactiva consumida por la carga 3 se obtiene de manera inmediata mediante un simple balance de potencias (Teorema de Boucherot). Nótese que la carga 2 sólo consume potencia activa, por lo que la potencia reactiva Q_2 es nula:

$$P_C = P_1 + P_2 + P_3 \; ; \quad P_3 = P_C - P_1 - P_2 \; ; \quad P_3 = 28\text{kW} - 10\text{kW} - 6\text{kW}$$

$$\boxed{P_3 = 12\text{kW}}$$

$$Q_C = Q_1 + Q_2 + Q_3 \; ; \quad Q_3 = Q_C - Q_1 - Q_2 \; ; \quad Q_3 = \sqrt{3} \cdot 9{,}6\text{kVAr} - 7{,}5\text{kVAr} - 0\text{kVAr}$$

$$\boxed{Q_3 = 9.127{,}7\text{VA}}$$

e) Obtener la intensidad de línea total (módulo y argumento).

Método 1.- Conocidas las potencias activas y reactivas totales de la carga, la tensión de línea en las cargas (U_{LC}) y el factor de potencia total de la carga ($\cos\varphi_C$) se puede obtener la intensidad de línea total:

$$P_C = \sqrt{3} \cdot U_{LC} I_{LC} \cdot \cos\varphi_C \; ; \quad \varphi_C = 30{,}7^\circ \; ; \quad U_{LC} = 380\text{V}$$

$$I_{LC} = \frac{P_C}{\sqrt{3} \cdot U_{LC} \cdot \cos\varphi_C} = \frac{28\text{kW}}{\sqrt{3} \cdot 380\text{V} \cdot 0{,}86} = 49{,}48\text{A}$$

$$\boxed{\mathcal{I}_{LC} = 49{,}48\text{A}\angle -30{,}7^\circ = 42{,}55 - j25{,}26\,\text{A}}$$

El signo menos proviene de que la carga total se comporta como una carga con componente inductiva (de la forma $R+jX_L$), al ser la potencia reactiva Q_C positiva, y por tanto la corriente va retrasada respecto de la tensión.

Método2.- También podría obtenerse a partir de la potencia reactiva, de manera análoga a la anterior:

$$Q_C = \sqrt{3} \cdot U_{LC} I_{LC} \cdot \text{sen}\varphi_C \,; \quad \varphi_C = 30{,}7^\circ \,; \quad U_{LC} = 380\text{V}$$

$$I_{LC} = \frac{Q_C}{\sqrt{3} \cdot U_{LC} \cdot \text{sen}\varphi_C} = \frac{\sqrt{3} \cdot 9{,}6\text{kVAr}}{\sqrt{3} \cdot 380\text{V} \cdot 0{,}68} = 49{,}48\text{A}$$

$$\boxed{\mathcal{I}_{LC} = 49{,}48\text{A}\angle -30{,}7^\circ = 42{,}55 - j25{,}26\,\text{A}}$$

f) Obtener la intensidad consumida por el motor (módulo y argumento).

Método 1.- Conocida, por ejemplo, la potencia activa, la tensión de línea en las cargas (U_{LC}) que es la que ve el motor (puntos a', b', c') y el factor de potencia del motor ($\cos\varphi_M$) se puede obtener la corriente por el motor:

$$P_1 = \sqrt{3} \cdot U_{LC} I_1 \cdot \cos\varphi_M \,; \quad \varphi_M = 36{,}86^\circ \,; \quad U_{LC} = 380\text{V}$$

$$I_1 = \frac{P_1}{\sqrt{3} \cdot U_{LC} \cdot \cos\varphi_M} = \frac{10\text{kW}}{\sqrt{3} \cdot 380\text{V} \cdot 0{,}8} = 19\text{A}$$

$$\boxed{\mathcal{I}_1 = 19\text{A}\angle -36{,}86^\circ = 15{,}2 - j11{,}4\,\text{A}}$$

El signo menos proviene de que un motor se comporta como una carga con componente inductiva (de la forma $R+jX_L$), al ser la potencia reactiva Q_1 positiva, y por tanto la intensidad va retrasada respecto de la tensión.

Método 2.- También podría obtenerse a partir de la potencia reactiva, de manera análoga a la anterior:

$$Q_1 = \sqrt{3} \cdot U_{LC} I_1 \cdot \text{sen}\varphi_M \,; \quad \varphi_M = 36{,}86^\circ \,; \quad U_{LC} = 380\text{V}$$

$$I_1 = \frac{Q_1}{\sqrt{3} \cdot U_{LC} \cdot \text{sen}\varphi_M} = \frac{7{,}5\text{kVAr}}{\sqrt{3} \cdot 380\text{V} \cdot 0{,}68} = 19\text{A}$$

$$\boxed{\mathcal{I}_1 = 19\text{A}\angle -36{,}86^\circ = 15{,}2 - j11{,}4\,\text{A}}$$

g) Obtener la intensidad consumida por las lámparas incandescentes (módulo y argumento).

Las lámparas se comportan como resistencias ideales, por lo que sólo consumen potencia activa. Conocida la potencia activa, la tensión de línea (U_{LC}) que es la que ven las lámparas (puntos a', b', c') y su factor de potencia ($\cos\varphi_2=1$) se puede obtener la corriente por las lámparas:

$$P_2 = \sqrt{3} \cdot U_{LC} I_2 \cdot \cos\varphi_2 \,; \quad \varphi_2 = 0^\circ \,; \quad U_{LC} = 380\text{V}$$

$$I_2 = \frac{P_2}{\sqrt{3} \cdot U_{LC}} = \frac{6\text{kW}}{\sqrt{3} \cdot 380\text{V}} = 9{,}11\text{A}$$

$$\boxed{\mathcal{I}_2 = 9{,}12\text{A}\angle 0^{\circ} = 9{,}12\,\text{A}}$$

h) *Obtener la intensidad consumida por la carga 3 (módulo y argumento).*

Método 1.- Conocida la intensidad total $\mathcal{I}_{LC}$ y la de las otras dos cargas, $\mathcal{I}_1$ y $\mathcal{I}_2$, y aplicando la primera Ley de Kirchoff, se obtiene la corriente $\mathcal{I}_3$:

$$\mathcal{I}_{LC} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3; \quad \mathcal{I}_3 = \mathcal{I}_{LC} - \mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2$$

$$\mathcal{I}_3 = 42{,}55 - j25{,}26 - (15{,}2 - j11{,}4) - 9{,}12$$

$$\boxed{\mathcal{I}_3 = 18{,}23 - j13{,}86\,\text{A} = 22{,}9\,\text{A}\angle -37{,}26^{\circ}}$$

Método 2.- También puede calcularse como en el apartado *e)* de manera que a partir de las potencias activas y reactivas totales de la carga 3, la tensión de línea en las cargas (U_{LC}) y el factor de potencia total de la carga 3 ($\cos\varphi_3$) se puede obtener la intensidad de línea total.

Para obtener el factor de potencia de la carga 3 se procede como en el apartado *a)*:

$$\tan\varphi_3 = \frac{Q_3}{P_3} = \frac{9.127{,}7\text{kVAr}}{12\text{kW}} = 0{,}76; \quad \varphi_3 = \text{atan}\left(\frac{Q_3}{P_3}\right) = \text{atan}\left(\frac{9.127{,}7\text{kVAr}}{12\text{kW}}\right) = 37{,}26^{\circ}$$

$$\boxed{\cos\varphi_3 = \cos 37{,}26^{\circ} = 0{,}8}$$

Quedando la intensidad:

$$P_3 = \sqrt{3} U_{LC} I_3 \cdot \cos\varphi_3\ ; \qquad U_{LC} = 380\text{V}$$

$$I_3 = \frac{P_3}{\sqrt{3} \cdot U_{LC} \cdot \cos\varphi_C} = \frac{12\text{kW}}{\sqrt{3} \cdot 380\text{V} \cdot 0{,}8} = 22{,}9\text{A}$$

$$\boxed{\mathcal{I}_3 = 22{,}9\text{A}\angle -37{,}26^{\circ} = 18{,}23 - \text{j}13{,}86\,\text{A}}$$

El signo menos proviene de que la carga total se comporta como una carga con componente inductiva (de la forma $R+jX_L$), al ser la potencia reactiva Q_C positiva, y por tanto la corriente va retrasada respecto de la tensión.

Método 3.- También podría obtenerse a partir de la potencia reactiva, de manera análoga a la anterior, obteniendo primero el factor de potencia total de la carga 3 ($\cos\varphi_3$) como en el método anterior:

$$Q_3 = \sqrt{3} U_{LC} I_3 \cdot \text{sen}\varphi_3; \quad U_{LC} = 380\text{V}$$

$$I_3 = \frac{Q_3}{\sqrt{3} \cdot U_{LC} \cdot \text{sen}\varphi_3} = \frac{9.127{,}7\,\text{kVAr}}{\sqrt{3} \cdot 380\text{V} \cdot 0{,}6} = 22{,}9\text{A}$$

$$\boxed{\mathcal{I}_3 = 22{,}9\text{A}\angle -37{,}26^{\circ} = 18{,}23 - j13{,}86\,\text{A}}$$

i) *Obtener la caída de tensión en la impedancia $\mathcal{Z}_L$ de la línea (módulo y argumento).*

A partir de la corriente total de línea $\mathcal{I}_{LC}$ y de la impedancia $\mathcal{Z}_L$ se puede obtener directamente la caída de tensión en la impedancia de línea.

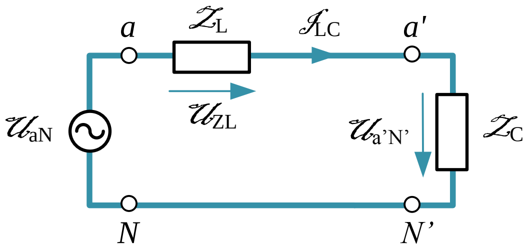
$$\mathcal{U}_{ZL} = \mathcal{I}_{LC} \cdot \mathcal{Z}_L; \quad \mathcal{Z}_L = 0{,}2 + j0{,}5 = 0{,}54\Omega \angle 68{,}2^o$$

$$\boxed{\mathcal{U}_{ZL} = (49{,}48\text{A} \angle -30{,}7^o)(0{,}54\Omega \angle 68{,}2^o) = 26{,}65V \angle 37{,}42^o}$$

j) *Obtener la tensión de línea a la salida del generador (medida en a, b, c) para que la tensión de línea en la carga (medida en a′, b′, c′) sea de 380V de módulo.*

Aplicando la segunda Ley de Kirchoff, la tensión de línea a la salida del generador será la que haya en la carga (puntos a′, b′, c′) más la que caiga en la impedancia de la línea, $\mathcal{U}_{ZL}$, teniendo en cuenta los correspondientes desfases.

El método más sencillo es trabajar con el circuito monofásico equivalente de un sistema estrella-estrella. Independientemente de cómo este configurado el generador internamente, se pude suponer que está en estrella y por tanto estaría representado en el monofásico equivalente por una fuente de tensión fase-neutro, por ejemplo, $\mathcal{U}_{aN}$. La impedancia de la línea, $\mathcal{Z}_L$, la caída de tensión en la línea, $\mathcal{U}_{ZL}$, y la corriente o intensidad total de línea $\mathcal{I}_{LC}$ son conocidas. La carga total, pasada a su monofásico equivalente, se puede representar como $\mathcal{Z}_C$, y la tensión de fase en la carga como $\mathcal{U}_{a'N'}$, resultando el circuito monofásico equivalente de la figura:



El módulo de la tensión de línea en la carga es conocido, 380V, por lo que el obtener el módulo de la tensión de fase en la carga, $\mathcal{U}_{a'N'}$, es inmediato:

$$U_{a'N'} = \frac{380}{\sqrt{3}} V = 219{,}4V$$

El factor de potencia total de la carga, $\cos\varphi_C$, es el ángulo que forma la corriente de fase y la tensión de fase en la carga. En un equivalente estrella-estrella, la corriente de fase y la de línea coinciden, por lo que φ_C representa el ángulo entre la tensión de fase en la carga, igual a $\mathcal{I}_{LC}$, y la tensión monofásica en la carga, $\mathcal{U}_{a'N'}$.

Tomando como origen de referencias la tensión de fase en la carga, es decir la tensión $\mathcal{U}_{a'N'}$ tiene fase 0º, se obtiene:

$$\mathcal{U}_{aN} = \mathcal{U}_{ZL} + \mathcal{U}_{a'N'};$$

$$\mathcal{U}_{aN} = 26{,}65V \angle 37{,}42^o + \frac{380}{\sqrt{3}} V \angle 0^o \quad \mathcal{U}_{aN} = 21{,}17 + j16{,}19 + 219{,}39$$

$$\mathcal{U}_{aN} = 240{,}94 - j16{,}19 = 241{,}48V\angle 3{,}84^{o}$$

Y, a partir de la tensión de fase del monofásico equivalente, obtener las tensiones de línea es inmediato

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathcal{U}_{ab} = \mathcal{U}_{aN}(\sqrt{3}\angle 30^{o}) = 241{,}48V\angle 3{,}84^{o}\ (\sqrt{3}\angle 30^{o}) = 418V\angle 33{,}84^{o}\\&\mathcal{U}_{bc} = \mathcal{U}_{ab}\angle -120^{o} = 418V\angle -86{,}16^{o}\\&\mathcal{U}_{ca} = \mathcal{U}_{ab}\angle 120^{o} = 418V\angle 153{,}84^{o}\end{aligned}}$$

k) *Para compensar el factor de potencia de las 3 cargas hasta un valor de cosφ_C=0,95, se conectan unos condensadores en triángulo representados en la figura 2 por $\mathcal{Z}$. Calcula el valor de dichos condensadores.*

Por el apartado *a)* se tiene que el factor de potencia inicial de la carga es cosφ_C=0,86. Se desea un nuevo factor de potencia, cosφ_{Cn}=0,95, mejor que el anterior, añadiendo para ello condensadores, que únicamente modifican la potencia reactiva total a la carga. El nuevo factor de potencia será

$$\tan\varphi_{Cn} = \frac{Q_N}{P_C} = \frac{Q_C + Q_Z}{P_C};$$

$$\varphi_{Cn} = \arccos(0{,}95) = 18{,}19^{o};\ \tan\varphi_{Cn} = 0{,}33$$

Donde la potencia reactiva nueva, Q_N, es la suma de la potencia reactiva de la carga existente, Q_C, más la potencia reactiva del banco de condensadores añadir, Q_Z.

Por tanto la potencia reactiva del banco de condensadores a añadir es:

$$Q_Z = P_C \cdot \tan\varphi_{Cn} - Q_C;$$

$$Q_Z = 28\text{kW}\cdot 0{,}33 - \sqrt{3}\cdot 9{,}6\text{kVAr} = \text{-}7{,}42\text{kVAr}$$

El signo "-" indica que para conseguir ese factor de potencia se necesitan condensadores, cuya potencia reactiva es negativa, como ya nos indica el enunciado.

La potencia reactiva de un banco trifásico de condensadores es 3 veces la de uno de los condensadores. Dado que se conoce la tensión de línea en la carga y los condensadores están en triángulo, la tensión de línea coincide con la tensión de fase en los condensadores, por la que la potencia reactiva, en función la tensión de línea, resulta:

$$Q_Z = 3\cdot\left(\frac{U_L^2}{X_C}\right) = 3\cdot\left(\frac{U_L^2}{1/\omega C}\right);$$

$$C = \frac{Q_Z}{3\omega C \cdot U_L^2};\quad C = \frac{7{,}42\text{kVAr}}{3\cdot 2\cdot\pi\cdot 50\text{Hz}\cdot 380^2\text{V}}$$

$$\boxed{C = 54{,}55\mu F}$$