Álgebra

Los números complejos

Gabriela Sansigre Vidal
Dpto Matemáticas del Área Industrial

OCGtools: processing OCG's ...

Contenidos

Introducción

- Queremos un conjunto en el que las ecuaciones de la forma

$$z^2 + \cdots = 0$$

tengan siempre solución

Introducción

- Queremos un conjunto en el que las ecuaciones de la forma

$$z^2 + \cdots = 0$$

  tengan siempre solución
- Además nos gustaría que ese conjunto contuviese $\mathbb{R}$ como subconjunto ...

Introducción

- Queremos un conjunto en el que las ecuaciones de la forma

$$z^2 + \cdots = 0$$

  tengan siempre solución
- Además nos gustaría que ese conjunto contuviese $\mathbb{R}$ como subconjunto ...
- y que las operaciones que hacemos con los números reales sigan teniendo validez

Introducción

- Queremos un conjunto en el que las ecuaciones de la forma

$$z^2 + \cdots = 0$$

  tengan siempre solución
- Además nos gustaría que ese conjunto contuviese $\mathbb{R}$ como subconjunto ...
- y que las operaciones que hacemos con los números reales sigan teniendo validez
- como pasa con los números racionales y los números reales

Raíces cuadradas

- Calcular las raíces cuadradas de un número a equivale a resolver la ecuación

$$z^2 = a$$

Raíces cuadradas

- Calcular las raíces cuadradas de un número a equivale a resolver la ecuación

$$z^2 = a$$

- A la hora de plantear este problema tenemos que reflexionar sobre:

Raíces cuadradas

- Calcular las raíces cuadradas de un número a equivale a resolver la ecuación

$$z^2 = a$$

- A la hora de plantear este problema tenemos que reflexionar sobre:
  - ¿En qué conjunto está a?

Raíces cuadradas

- Calcular las raíces cuadradas de un número a equivale a resolver la ecuación

$$z^2 = a$$

- A la hora de plantear este problema tenemos que reflexionar sobre:
  - ¿En qué conjunto está a?
  - ¿Dónde busco la solución o soluciones?

Raíces cuadradas

- Calcular las raíces cuadradas de un número a equivale a resolver la ecuación

$$z^2 = a$$

- A la hora de plantear este problema tenemos que reflexionar sobre:
  - ¿En qué conjunto está a?
  - ¿Dónde busco la solución o soluciones?
- Si $a = 4$:

Raíces cuadradas

- Calcular las raíces cuadradas de un número a equivale a resolver la ecuación

$$z^2 = a$$

- A la hora de plantear este problema tenemos que reflexionar sobre:
  - ¿En qué conjunto está a?
  - ¿Dónde busco la solución o soluciones?
- Si $a = 4$:
  - en el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales tengo una solución, $z = 2$

Raíces cuadradas

- Calcular las raíces cuadradas de un número a equivale a resolver la ecuación
$$z^2 = a$$
- A la hora de plantear este problema tenemos que reflexionar sobre:
  - ¿En qué conjunto está a?
  - ¿Dónde busco la solución o soluciones?
- Si $a = 4$:
  - en el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales tengo una solución, $z = 2$
  - en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros tengo dos soluciones, $z = 2$ y $z = -2$

Raíces cuadradas

- Calcular las raíces cuadradas de un número a equivale a resolver la ecuación

$$z^2 = a$$

- A la hora de plantear este problema tenemos que reflexionar sobre:
  - ¿En qué conjunto está a?
  - ¿Dónde busco la solución o soluciones?
- Si $a = 4$:
  - en el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales tengo una solución, $z = 2$
  - en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros tengo dos soluciones, $z = 2$ y $z = -2$
- Si $a = 2$:

Raíces cuadradas

- Calcular las raíces cuadradas de un número a equivale a resolver la ecuación

$$z^2 = a$$

- A la hora de plantear este problema tenemos que reflexionar sobre:
  - ¿En qué conjunto está a?
  - ¿Dónde busco la solución o soluciones?
- Si $a = 4$:
  - en el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales tengo una solución, $z = 2$
  - en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros tengo dos soluciones, $z = 2$ y $z = -2$
- Si $a = 2$:
  - en el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales no hay solución

Raíces cuadradas

- Calcular las raíces cuadradas de un número a equivale a resolver la ecuación

$$z^2 = a$$

- A la hora de plantear este problema tenemos que reflexionar sobre:
  - ¿En qué conjunto está a?
  - ¿Dónde busco la solución o soluciones?
- Si $a = 4$:
  - en el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales tengo una solución, $z = 2$
  - en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros tengo dos soluciones, $z = 2$ y $z = -2$
- Si $a = 2$:
  - en el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales no hay solución
  - en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales hay dos soluciones, $z = \sqrt{2}$ y $z = -\sqrt{2}$

Raíces cuadradas en $\mathbb{R}$

- Si a es un número real, tenemos tres posibilidades:

Raíces cuadradas en $\mathbb{R}$

- Si a es un número real, tenemos tres posibilidades:
  - a es positivo,

Raíces cuadradas en $\mathbb{R}$

- Si a es un número real, tenemos tres posibilidades:
  - a es positivo,
  - a es nulo,

Raíces cuadradas en $\mathbb{R}$

- Si a es un número real, tenemos tres posibilidades:
  - a es positivo,
  - a es nulo,
  - a es negativo

Raíces cuadradas en $\mathbb{R}$

- Si a es un número real, tenemos tres posibilidades:
  - a es positivo,
  - a es nulo,
  - a es negativo
- Si a es positivo, sabemos que la ecuación

$$z^2 = a$$

Raíces cuadradas en $\mathbb{R}$

- Si a es un número real, tenemos tres posibilidades:
  - a es positivo,
  - a es nulo,
  - a es negativo
- Si a es positivo, sabemos que la ecuación

$$z^2 = a$$

- tiene exactamente dos soluciones $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$ que son las dos raíces cuadradas de a, la primera positiva y la segunda negativa

Raíces cuadradas en $\mathbb{R}$

- Si a es un número real, tenemos tres posibilidades:
  - a es positivo,
  - a es nulo,
  - a es negativo
- Si a es positivo, sabemos que la ecuación

$$z^2 = a$$

- tiene exactamente dos soluciones $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$ que son las dos raíces cuadradas de a, la primera positiva y la segunda negativa
- Si $a = 0$ la ecuación tiene solo la solución nula, decimos que la única raíz cuadrada de 0 es 0

Raíces cuadradas en $\mathbb{R}$

- Si a es un número real, tenemos tres posibilidades:
  - a es positivo,
  - a es nulo,
  - a es negativo
- Si a es positivo, sabemos que la ecuación

$$z^2 = a$$

- tiene exactamente dos soluciones $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$ que son las dos raíces cuadradas de a, la primera positiva y la segunda negativa
- Si $a = 0$ la ecuación tiene solo la solución nula, decimos que la única raíz cuadrada de 0 es 0
- Si a es negativo la ecuación no tiene ninguna solución!!

Raíces cuadradas de números negativos

- Si a es un número real y negativo, podemos escribirlo así: $a = -|a|$, es decir:

Raíces cuadradas de números negativos

- Si a es un número real y negativo, podemos escribirlo así: $a = -|a|$, es decir:
- el producto de un número positivo por -1

Raíces cuadradas de números negativos

- Si a es un número real y negativo, podemos escribirlo así: $a = -|a|$, es decir:
- el producto de un número positivo por -1
- Construimos un conjunto en el cual $z^2 = -1$ tenga dos soluciones

Raíces cuadradas de números negativos

- Si a es un número real y negativo, podemos escribirlo así: $a = -|a|$, es decir:
- el producto de un número positivo por -1
- Construimos un conjunto en el cual $z^2 = -1$ tenga dos soluciones
- esas dos soluciones se denotan i y $-i$.

Raíces cuadradas de números negativos

- Si a es un número real y negativo, podemos escribirlo así: $a = -|a|$, es decir:
- el producto de un número positivo por -1
- Construimos un conjunto en el cual $z^2 = -1$ tenga dos soluciones
- esas dos soluciones se denotan i y $-i$.
- Así, en ese conjunto $z^2 = -9$ tiene dos soluciones que son $3i$ y $-3i$

El conjunto $\mathbb{C}$

- Definimos nuestro nuevo conjunto así:

$$\mathbb{C} := \{x + yi,\ x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$$

El conjunto $\mathbb{C}$

- Definimos nuestro nuevo conjunto así:

$$\mathbb{C} := \{x + yi,\ x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$$

- Los elementos de este conjunto se llaman **números complejos**

El conjunto $\mathbb{C}$

- Definimos nuestro nuevo conjunto así:

$$\mathbb{C} := \{x + yi,\ x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$$

- Los elementos de este conjunto se llaman **números complejos**
- i se llama unidad imaginaria, x es la parte real e y la parte imaginaria

El conjunto $\mathbb{C}$

- Definimos nuestro nuevo conjunto así:

$$\mathbb{C} := \{x + yi,\ x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$$

- Los elementos de este conjunto se llaman **números complejos**
- i se llama unidad imaginaria, x es la parte real e y la parte imaginaria
- El número complejo $3 - 5i$ tiene por parte real 3 y por parte imaginaria -5, lo escribimos así:

El conjunto $\mathbb{C}$

- Definimos nuestro nuevo conjunto así:

$$\mathbb{C} := \{x + yi,\ x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$$

- Los elementos de este conjunto se llaman **números complejos**
- i se llama unidad imaginaria, x es la parte real e y la parte imaginaria
- El número complejo $3 - 5i$ tiene por parte real 3 y por parte imaginaria -5, lo escribimos así:
- $\mathrm{Re}\,(3 - 5i) = 3,\ \mathrm{Im}(3 - 5i) = -5$

El conjunto $\mathbb{C}$

- Definimos nuestro nuevo conjunto así:

$$\mathbb{C} := \{x + yi,\ x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$$

- Los elementos de este conjunto se llaman **números complejos**
- i se llama unidad imaginaria, x es la parte real e y la parte imaginaria
- El número complejo $3 - 5i$ tiene por parte real 3 y por parte imaginaria -5, lo escribimos así:
- $\mathrm{Re}\,(3 - 5i) = 3,\ \mathrm{Im}(3 - 5i) = -5$
- Si la parte imaginaria es nula el número es real: 3, -6, $\sqrt{7}$, π

El conjunto $\mathbb{C}$

- Definimos nuestro nuevo conjunto así:

$$\mathbb{C} := \{x + yi,\ x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$$

- Los elementos de este conjunto se llaman **números complejos**
- i se llama unidad imaginaria, x es la parte real e y la parte imaginaria
- El número complejo $3 - 5i$ tiene por parte real 3 y por parte imaginaria -5, lo escribimos así:
- $\text{Re}\,(3 - 5i) = 3,\ \mathrm{Im}(3 - 5i) = -5$
- Si la parte imaginaria es nula el número es real: 3, -6, $\sqrt{7}$, π
- Si la parte real es nula el número se llama imaginario puro: $-2i$, 0, $\sqrt{5}\,i$

El conjunto $\mathbb{C}$

- Definimos nuestro nuevo conjunto así:

$$\mathbb{C} := \{x + yi,\ x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$$

- Los elementos de este conjunto se llaman **números complejos**
- i se llama unidad imaginaria, x es la parte real e y la parte imaginaria
- El número complejo $3 - 5i$ tiene por parte real 3 y por parte imaginaria -5, lo escribimos así:
- $\mathrm{Re}\,(3 - 5i) = 3,\ \mathrm{Im}(3 - 5i) = -5$
- Si la parte imaginaria es nula el número es real: 3, -6, $\sqrt{7}$, π
- Si la parte real es nula el número se llama imaginario puro: $-2i$, 0, $\sqrt{5}\, i$
- el único número real e imaginario puro a la vez es el cero.

El conjunto $\mathbb{C}$

- Definimos nuestro nuevo conjunto así:

$$\mathbb{C} := \{x + yi,\ x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$$

- Los elementos de este conjunto se llaman **números complejos**
- i se llama unidad imaginaria, x es la parte real e y la parte imaginaria
- El número complejo $3 - 5i$ tiene por parte real 3 y por parte imaginaria -5, lo escribimos así:
- $\mathrm{Re}\,(3 - 5i) = 3,\ \mathrm{Im}(3 - 5i) = -5$
- Si la parte imaginaria es nula el número es real: 3, -6, $\sqrt{7}$, π
- Si la parte real es nula el número se llama imaginario puro: $-2i$, 0, $\sqrt{5}\,i$
- el único número real e imaginario puro a la vez es el cero.
- Se dice que el número complejo $x + yi$ está expresado en forma binómica.

Suma y producto

- Sean dos números complejos $z = a + bi$, $w = c + di$
- se define la **suma** como

$$z + w = (a + c) + (b + d)i$$

- y el **producto**

$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Los números complejos se suman agrupando partes reales e imaginarias y se multiplican teniendo presente que $i^2 = -1$.

El plano complejo

- Un número complejo $z = x + yi$ puede representarse geométricamente si se toma el eje de abscisas para la parte real y el eje ordenado para la imaginaria.

- Es decir, hay una identificación entre el número complejo $x + yi$ y el vector (x, y) de $\mathbb{R}^2$

Practica con la suma y el producto

- $z = 3 - 2i, \; u = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}i, \; v = -12 - i, \; w = -1 + 3i$

Practica con la suma y el producto

- $z = 3 - 2i,\ u = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4}i,\ v = -12 - i,\ w = -1 + 3i$
- $z - u = \qquad z + w = \qquad \ldots$

Practica con la suma y el producto

- $z = 3 - 2i,\ u = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4}i,\ v = -12 - i,\ w = -1 + 3i$
- $z - u = \qquad z + w = \qquad \ldots$
- $uv = \qquad zw = \qquad \ldots$

Practica con la suma y el producto

- $z = 3 - 2i, \; u = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4}i, \; v = -12 - i, \; w = -1 + 3i$
- $z - u = \qquad z + w = \qquad \ldots$
- $uv = \qquad zw = \qquad \ldots$
- $\mathrm{Re}\,(zv) = \qquad \mathrm{Re}\,(uw) = \qquad \mathrm{Im}(zu) = \qquad \mathrm{Im}(zw - uv) = \qquad \ldots$

Conjugación y módulo

- El conjugado del número $z = a + ib$ es $a - ib$,

Conjugación y módulo

- El conjugado del número $z = a + ib$ es $a - ib$,
- se denota $\overline{z} = a - ib$

Conjugación y módulo

- El conjugado del número $z = a + ib$ es $a - ib$,
- se denota $\overline{z} = a - ib$
- Se cumple:

Conjugación y módulo

- El conjugado del número $z = a + ib$ es $a - ib$,
- se denota $\overline{z} = a - ib$
- Se cumple:
  - $\overline{\overline{z}} = z$

Conjugación y módulo

- El conjugado del número $z = a + ib$ es $a - ib$,
- se denota $\overline{z} = a - ib$
- Se cumple:
  - $\overline{\overline{z}} = z$
  - $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

Conjugación y módulo

- El conjugado del número $z = a + ib$ es $a - ib$,
- se denota $\overline{z} = a - ib$
- Se cumple:
  - $\overline{\overline{z}} = z$
  - $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
  - $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$

Conjugación y módulo

- El conjugado del número $z = a + ib$ es $a - ib$,
- se denota $\overline{z} = a - ib$
- Se cumple:
  - $\overline{\overline{z}} = z$
  - $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
  - $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$
- z y $\overline{z}$ son simétricos respecto al eje de abscisas

Conjugación y módulo

- El conjugado del número $z = a + ib$ es $a - ib$,
- se denota $\overline{z} = a - ib$
- Se cumple:
  - $\overline{\overline{z}} = z$
  - $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
  - $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$
- z y $\overline{z}$ son simétricos respecto al eje de abscisas
- El módulo del número $z = a + ib$ es $\sqrt{a^2 + b^2}$,

Conjugación y módulo

- El conjugado del número $z = a + ib$ es $a - ib$,
- se denota $\overline{z} = a - ib$
- Se cumple:
  - $\overline{\overline{z}} = z$
  - $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
  - $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$
- z y $\overline{z}$ son simétricos respecto al eje de abscisas
- El módulo del número $z = a + ib$ es $\sqrt{a^2 + b^2}$,
- se denota $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Conjugación y módulo

- El conjugado del número $z = a + ib$ es $a - ib$,
- se denota $\overline{z} = a - ib$
- Se cumple:
  - $\overline{\overline{z}} = z$
  - $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
  - $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$
- z y $\overline{z}$ son simétricos respecto al eje de abscisas
- El módulo del número $z = a + ib$ es $\sqrt{a^2 + b^2}$,
- se denota $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Se cumple:

Conjugación y módulo

- El conjugado del número $z = a + ib$ es $a - ib$,
- se denota $\overline{z} = a - ib$
- Se cumple:
  - $\overline{\overline{z}} = z$
  - $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
  - $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$
- z y $\overline{z}$ son simétricos respecto al eje de abscisas
- El módulo del número $z = a + ib$ es $\sqrt{a^2 + b^2}$,
- se denota $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Se cumple:
  - $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$

Conjugación y módulo

- El conjugado del número $z = a + ib$ es $a - ib$,
- se denota $\overline{z} = a - ib$
- Se cumple:
  - $\overline{\overline{z}} = z$
  - $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
  - $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$
- z y $\overline{z}$ son simétricos respecto al eje de abscisas
- El módulo del número $z = a + ib$ es $\sqrt{a^2 + b^2}$,
- se denota $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Se cumple:
  - $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$
  - $|z| = |\overline{z}|$

Conjugación y módulo

- El conjugado del número $z = a + ib$ es $a - ib$,
- se denota $\overline{z} = a - ib$
- Se cumple:
  - $\overline{\overline{z}} = z$
  - $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
  - $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$
- z y $\overline{z}$ son simétricos respecto al eje de abscisas
- El módulo del número $z = a + ib$ es $\sqrt{a^2 + b^2}$,
- se denota $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Se cumple:
  - $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$
  - $|z| = |\overline{z}|$
  - $|zw| = |z||w|$

El inverso

- Sea $z = a + ib$ es un número complejo no nulo ($a \neq 0$ o $b \neq 0$),

El inverso

- Sea $z = a + ib$ es un número complejo no nulo ($a \neq 0$ o $b \neq 0$),
- buscamos su inverso respecto del producto; es decir, un $w \in \mathbb{C}$ tal que

El inverso

- Sea $z = a + ib$ es un número complejo no nulo ($a \neq 0$ o $b \neq 0$),
- buscamos su inverso respecto del producto; es decir, un $w \in \mathbb{C}$ tal que $zw = 1$.

El inverso

- Sea $z = a + ib$ es un número complejo no nulo ($a \neq 0$ o $b \neq 0$),
- buscamos su inverso respecto del producto; es decir, un $w \in \mathbb{C}$ tal que $zw = 1$.
- ¿Cómo encontrarlo?

El inverso

- Sea $z = a + ib$ es un número complejo no nulo ($a \neq 0$ o $b \neq 0$),
- buscamos su inverso respecto del producto; es decir, un $w \in \mathbb{C}$ tal que $zw = 1$.
- ¿Cómo encontrarlo?
- En la igualdad $(a + bi)\, w = 1$ multiplicamos por el conjugado de z:

$$(a - bi)(a + bi)\, w = 1 = a - bi,$$

El inverso

- Sea $z = a + ib$ es un número complejo no nulo ($a \neq 0$ o $b \neq 0$),
- buscamos su inverso respecto del producto; es decir, un $w \in \mathbb{C}$ tal que $zw = 1$.
- ¿Cómo encontrarlo?
- En la igualdad $(a + bi)\, w = 1$ multiplicamos por el conjugado de z:

$$(a - bi)(a + bi)\, w = 1 = a - bi,$$

- y despejamos:

$$w = \frac{1}{a^2 + b^2}(a - bi)$$

El inverso (2)

- Igual que para los números reales utilizaremos cualquiera de las dos expresiones siguientes para el inverso de z:

$$w = \frac{1}{z} = z^{-1}$$

El inverso (2)

- Igual que para los números reales utilizaremos cualquiera de las dos expresiones siguientes para el inverso de z:

$$w = \frac{1}{z} = z^{-1}$$

- Una forma compacta de expresar z^{-1} es

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

El inverso (2)

- Igual que para los números reales utilizaremos cualquiera de las dos expresiones siguientes para el inverso de z:

$$w = \frac{1}{z} = z^{-1}$$

- Una forma compacta de expresar z^{-1} es

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

- Observamos que

$$\text{Re}\,\left(z^{-1}\right) = \frac{\text{Re}\,z}{|z|^2}, \quad \mathrm{Im}\,z^{-1} = \frac{\mathrm{Im}(-z)}{|z|^2}$$

Argumento de un complejo

- Dado $z = x + yi \neq 0$, se pueden encontrar valores de $\theta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad ; \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Argumento de un complejo

- Dado $z = x + yi \neq 0$, se pueden encontrar valores de $\theta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \;\; ; \;\; \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

- Por ejemplo, si $z = 1 + i$,

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \operatorname{sen}\theta$$

una solución posible es $\theta = \pi/4$.

Argumento de un complejo

- Dado $z = x + yi \neq 0$, se pueden encontrar valores de $\theta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \ ; \ \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

- Por ejemplo, si $z = 1 + i$,

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \operatorname{sen}\theta$$

  una solución posible es $\theta = \pi/4$.
- Entonces

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

Argumento principal y ángulo polar

- Hay muchas elecciones de θ ya que las funciones seno y coseno son periódicas de período 2π.

Argumento principal y ángulo polar

- Hay muchas elecciones de θ ya que las funciones seno y coseno son periódicas de período 2π.
- Cada uno de esos valores se llama **argumento** del número complejo

Argumento principal y ángulo polar

- Hay muchas elecciones de θ ya que las funciones seno y coseno son periódicas de período 2π.
- Cada uno de esos valores se llama **argumento** del número complejo
- El **argumento principal** de z es el único que pertenece al intervalo $(-\pi, \pi]$.

Argumento principal y ángulo polar

- Hay muchas elecciones de θ ya que las funciones seno y coseno son periódicas de período 2π.
- Cada uno de esos valores se llama **argumento** del número complejo
- El **argumento principal** de z es el único que pertenece al intervalo $(-\pi, \pi]$.
- El que está en el intervalo $[0, 2\pi)$ se llama **ángulo polar**.

Argumento principal y ángulo polar

- Hay muchas elecciones de θ ya que las funciones seno y coseno son periódicas de período 2π.
- Cada uno de esos valores se llama **argumento** del número complejo
- El **argumento principal** de z es el único que pertenece al intervalo $(-\pi, \pi]$.
- El que está en el intervalo $[0, 2\pi)$ se llama **ángulo polar**.
- Geométricamente, el ángulo polar de z corresponde al ángulo, medido en sentido contrario a las agujas del reloj, que forma con el eje de abscisas el vector que representa a z.

Argumento principal y ángulo polar

- Hay muchas elecciones de θ ya que las funciones seno y coseno son periódicas de período 2π.
- Cada uno de esos valores se llama **argumento** del número complejo
- El **argumento principal** de z es el único que pertenece al intervalo $(-\pi, \pi]$.
- El que está en el intervalo $[0, 2\pi)$ se llama **ángulo polar**.
- Geométricamente, el ángulo polar de z corresponde al ángulo, medido en sentido contrario a las agujas del reloj, que forma con el eje de abscisas el vector que representa a z.
- La expresión $z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ se llama *forma trigonométrica* de z.

Argumento principal y ángulo polar

- Hay muchas elecciones de θ ya que las funciones seno y coseno son periódicas de período 2π.
- Cada uno de esos valores se llama **argumento** del número complejo
- El **argumento principal** de z es el único que pertenece al intervalo $(-\pi, \pi]$.
- El que está en el intervalo $[0, 2\pi)$ se llama **ángulo polar**.
- Geométricamente, el ángulo polar de z corresponde al ángulo, medido en sentido contrario a las agujas del reloj, que forma con el eje de abscisas el vector que representa a z.
- La expresión $z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ se llama *forma trigonométrica* de z.
- Si θ es un valor del argumento de un número complejo z, entonces

Argumento principal y ángulo polar

- Hay muchas elecciones de θ ya que las funciones seno y coseno son periódicas de período 2π.
- Cada uno de esos valores se llama **argumento** del número complejo
- El **argumento principal** de z es el único que pertenece al intervalo $(-\pi, \pi]$.
- El que está en el intervalo $[0, 2\pi)$ se llama **ángulo polar**.
- Geométricamente, el ángulo polar de z corresponde al ángulo, medido en sentido contrario a las agujas del reloj, que forma con el eje de abscisas el vector que representa a z.
- La expresión $z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ se llama *forma trigonométrica* de z.
- Si θ es un valor del argumento de un número complejo z, entonces
  - $-\theta$ es un valor del argumento de $\overline{z}$.

Argumento principal y ángulo polar

- Hay muchas elecciones de θ ya que las funciones seno y coseno son periódicas de período 2π.
- Cada uno de esos valores se llama **argumento** del número complejo
- El **argumento principal** de z es el único que pertenece al intervalo $(-\pi, \pi]$.
- El que está en el intervalo $[0, 2\pi)$ se llama **ángulo polar**.
- Geométricamente, el ángulo polar de z corresponde al ángulo, medido en sentido contrario a las agujas del reloj, que forma con el eje de abscisas el vector que representa a z.
- La expresión $z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ se llama *forma trigonométrica* de z.
- Si θ es un valor del argumento de un número complejo z, entonces
  - $-\theta$ es un valor del argumento de $\overline{z}$.
  - $\pi + \theta$ es un valor del argumento de $-z$.

Practica con el argumento

- Calcula el argumento principal y el ángulo polar de

- $z_1 = 1 - i, \quad z_2 = -i \quad z_3 = 6 + \sqrt{3}\, i,$
- $z_4 = 1 - \sqrt{3}\, i, \quad z_5 = -3 - 3i, \quad z_6 = -\sqrt{3} + 3\, i$

Las potencias

- Las conocidas fórmulas

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta,$$
$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

tienen la siguiente consecuencia:

Las potencias

- Las conocidas fórmulas

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta,$$
$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

  tienen la siguiente consecuencia:

Las potencias

- Las conocidas fórmulas

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta,$$
$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

  tienen la siguiente consecuencia:

- Dados z y w en forma trigonométrica

$$z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta), \quad |w|(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$$

  su producto es

$$zw = |z||w|\left(\cos(\theta+\varphi) + i\operatorname{sen}(\theta+\varphi)\right).$$

  Es decir, que **el argumento del producto es la suma de los argumentos**

Las potencias

- Las conocidas fórmulas

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta,$$
$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

  tienen la siguiente consecuencia:

- Dados z y w en forma trigonométrica

$$z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta), \quad |w|(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$$

  su producto es

$$zw = |z||w|\left(\cos(\theta+\varphi) + i\operatorname{sen}(\theta+\varphi)\right).$$

  Es decir, que **el argumento del producto es la suma de los argumentos**
- En particular,

$$z^2 = |z|^2(\cos(2\theta) + i\operatorname{sen}(2\theta)),$$
$$\dots$$
$$z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta)), \quad n \in \mathbb{N}$$

Fórmula de De Moivre. Notación de Euler

- $\theta \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta.$$

(Donde para n negativo se entiende potencia $-n$ del inverso).

Fórmula de De Moivre. Notación de Euler

- $\theta \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta.$$

  (Donde para n negativo se entiende potencia $-n$ del inverso).

- Adoptamos la notación

$$\forall\theta \in \mathbb{R}, \quad e^{i\theta} := \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

Fórmula de De Moivre. Notación de Euler

- $\theta \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta.$$

(Donde para n negativo se entiende potencia $-n$ del inverso).

- Adoptamos la notación

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad e^{i\theta} := \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

- Que simplifica la expresión de las potencias

$$\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}.$$

Practica con las potencias

- Calcula el argumento principal de

$$w_1 = -i,\ w_2 = -1 + \sqrt{3}\, i$$

- Calcula el módulo y el ángulo polar

$$w_3 = (1+i)^8, \quad w_4 = (1+\sqrt{3}\, i)^2$$

- Resuelve la ecuación $z^2 = 1 + i$.

Y para terminar...

- Apunta tus resultados de los ejercios propuestos:

$$z + w = \ldots, \quad \mathrm{Im}(zu) = \ldots,$$

- El argumento principal de z_4 es ...
- Repasa el apéndice de números complejos de los apuntes (página 204)
- Haz los ejercicios 1, 2 3 y 4 de la página 214.
- Algunos de estos resultados tendrás que escribirlos en un cuestionario de Moodle que se abrirá el día 22 por la tarde.