Estadística

Universidad Europea de Madrid

Laureate International Universities

Introducción a la probabilidad

El término *probabilidad* se utiliza habitualmente en relación con que ocurra un determinado *suceso* cuando se lleva a cabo un *experimento.*

Definición:

Un experimento es cualquier proceso que produzca una observación o resultado.

Tipos de experimentos

experimentos determinista	experimentos aleatorios
cada vez que se repite se obtiene **el mismo resultado**	no siempre se obtiene el mismo resultado ⇨ INCERTIDUMBRE

Introducción a la probabilidad

Nos interesan en especial los experimentos aleatorios.

Vamos a suponer que se verifican las siguientes condiciones:

1. Puede repetirse indefinidamente, siempre en las mismas condiciones.
2. Antes de realizarlo no se puede predecir el resultado que se va a obtener.
3. El resultado que se obtenga, pertenece a un conjunto previamente conocido de posibles resultados

Universidad Europea de Madrid

Introducción a la probabilidad

Ejemplos:

- Lanzar una moneda y observar si sale cara o cruz.
- Contar el número de llamadas que llegan a una centralita en una hora.
- Las puntuación resultantes en el lanzamiento de dos dados.
- Número de fallos de un ordenador durante un mes.

Introducción a la probabilidad

En el análisis de cualquier fenómeno en el que interviene el azar hay dos conceptos fundamentales:

- Los acontecimientos que pueden producirse: **Espacio Muestral** (Ω)

.

- La **probabilidad** con que se presentan cada uno de ellos.

Introducción a la probabilidad

Definición:

El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento se denomina **<u>espacio muestral</u> (Ω).**

- Ejemplos:

1. Si el experimento es lanzar una moneda una vez, el espacio muestral es $\Omega = \{C,X\}$, donde C indica que salió cara y X que salió cruz.

2. Si el experimento es lanzar una moneda dos veces, el espacio muestral es $\Omega = \{(C,C),(C,X),(X,C),(X,X)\}$, donde (C,X) representa que en la primera tirada salió cara y en la segunda cruz.

Universidad Europea de Madrid

Introducción a la probabilidad

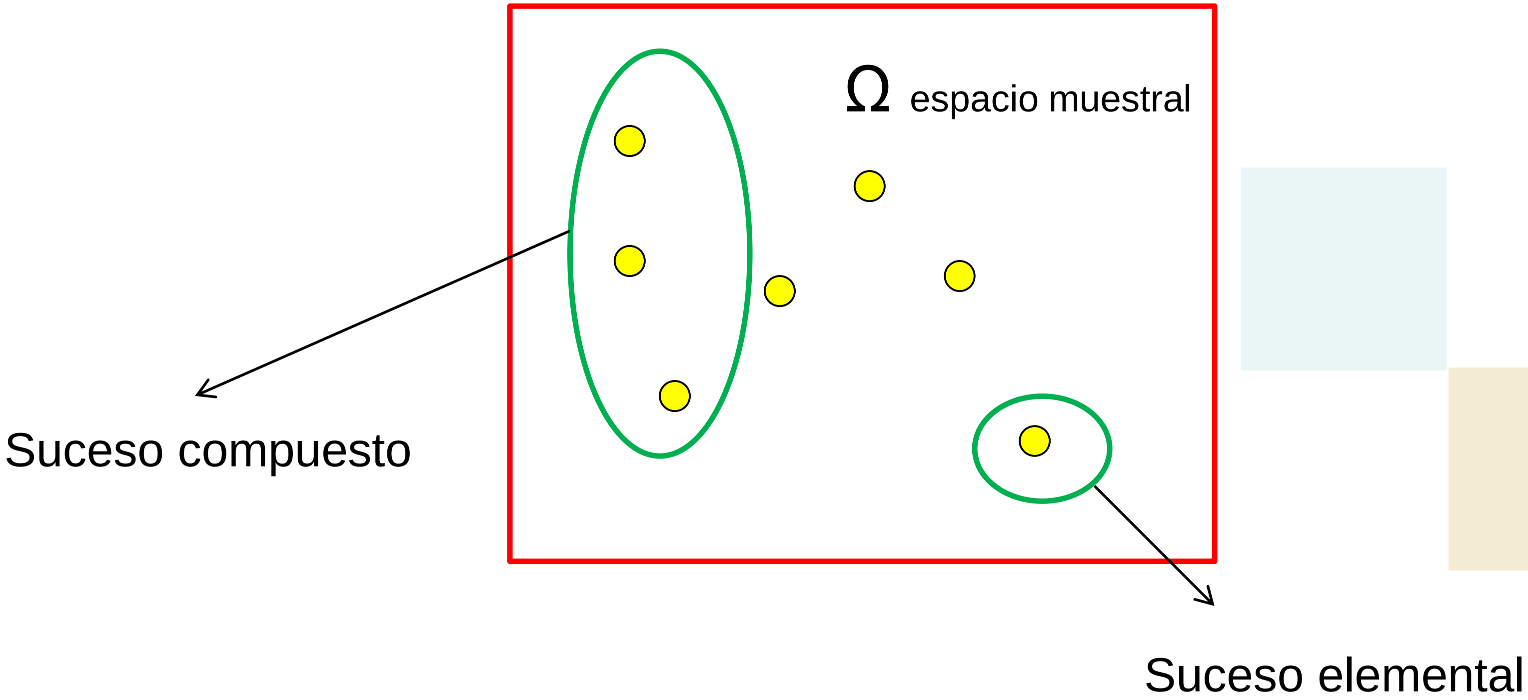
Definición:

Cualquier subconjunto de resultados de un experimento se denomina **<u>suceso</u>.**

Si $\Omega = \{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n\}$

- Suceso elemental $\longrightarrow$ *los posibles resultados del experimento o componentes del espacio muestral (ϵ_i).*
- Suceso compuesto $\longrightarrow$ las uniones de sucesos elementales $(\epsilon_{i_1} \cup \cdots \cup \epsilon_{i_k})$

Introducción a la probabilidad



Introducción a la probabilidad

Ejemplo: el experimento consiste en lanzar un dado.

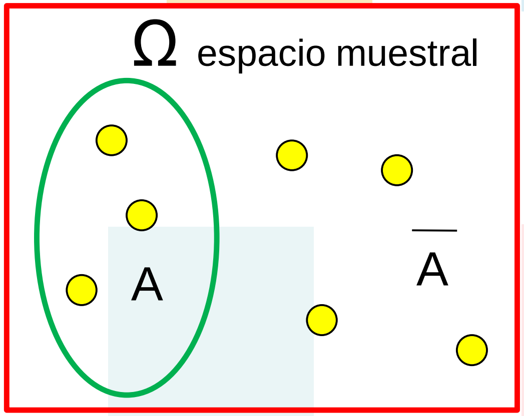
❖ **SUCESO ELEMENTAL:** los sucesos elementales son 1,2,3,4,5,6

❖ **SUCESO COMPUESTO**: sacar un número par, A = {2,4,6}

Introducción a la probabilidad

Operaciones con sucesos

- Se llama suceso contrario (complementario) de un suceso A, al formado por los sucesos que no están en A.



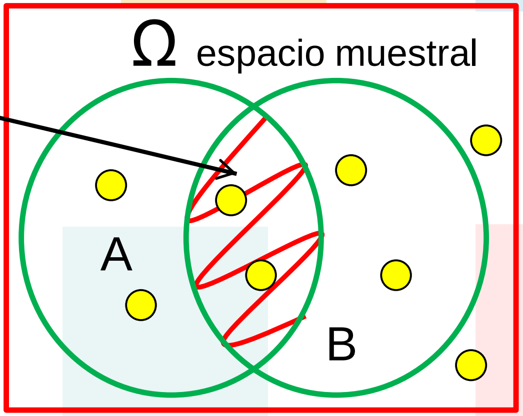
- El suceso seguro, Ω, es aquel que siempre ocurre al realizar el experimento.

- El suceso imposible, Ø, es aquel que nunca ocurre como resultado del experimento.

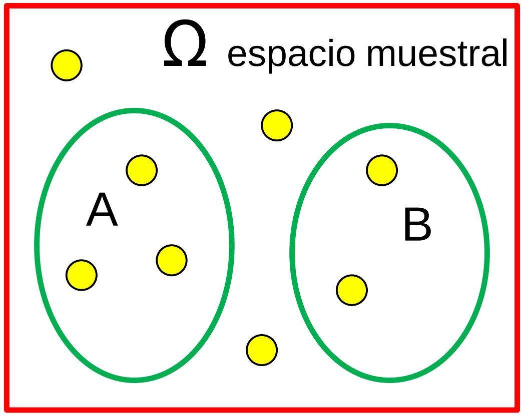
Introducción a la probabilidad

Operaciones con sucesos

- Se llama suceso intersección de A y B, A∩B o AB, al formado por los resultados experimentales que están simultáneamente en A y B.



- Se dice que dos sucesos A y B son incompatibles si no pueden ocurrir a la vez, es decir, A∩B = Ø.

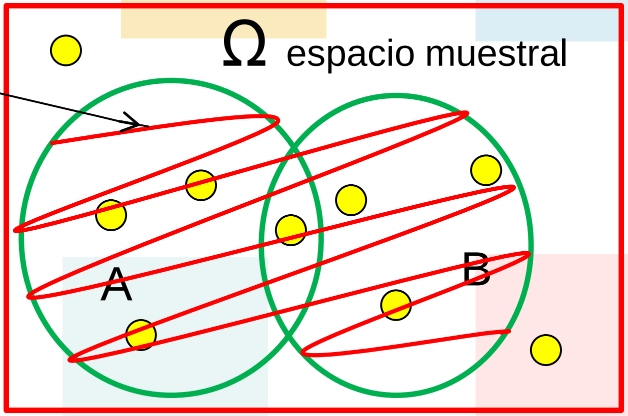


Universidad Europea de Madrid

Introducción a la probabilidad

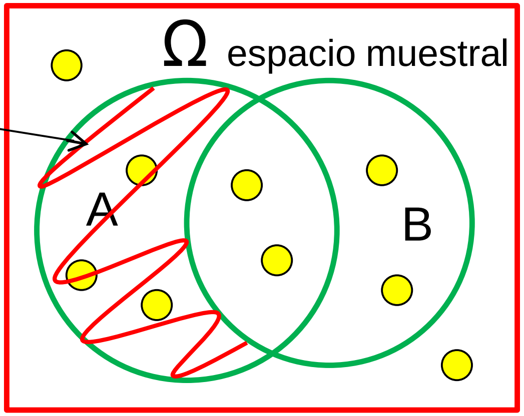
Operaciones con sucesos

- Se llama suceso unión de A y B, AUB, al suceso formado por los resultados experimentales que están en A o en B (incluyendo los que están en ambos)



- Se llama suceso diferencia de A y B, A-B, al formado por todos los sucesos de A que no están en B, es decir, $A \cap B^c$

Consecuencia: $A^c = \Omega - A$



Introducción a la probabilidad

Ejemplo

Hallar un espacio muestral adecuado para describir las puntuaciones obtenidas al lanzar dos veces un dado.

Si A, B y C son sucesos definidos por:

A = { el primer resultado es 2}, B = { el segundo resultado es 2} y C = { la suma de los resultados es 5}.

Caracterizar: $A \cup B$, $A \cap B$ $A^c \cap B^c$, $(A \cup B) \cap C^c$, $A \cup (B \cap C^c)$

Universidad Europea de Madrid

Ejemplo

Ω ={ (1,1), (1,2), ..., (1,6), (2,1),..., (2,6), (3,1), ..., (5,6), (6,6)}

A = { (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6) }; B = { (1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2) }

C = {(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)}.

$A \cap B$ = {(2,2) },

$A \cup B$ = {(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(2,4),(4,2),(2,5),(5,2),(2,6),(6,2) }

$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$= {ninguno de los resultados es dos}

$(A \cup B) \cap C^c$ = {alguno de los resultados es 2, pero la suma no es 5 } =

{ (1,2),(2,1),(2,2),(2,4),(4,2),(2,5),(5,2),(2,6),(6,2) }

$A \cup (B \cap C^c)$ = { o bien el primer resultado es 2, o bien el segundo es 2 y el primero no es 3 } =

{ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(1,2),(4,2),(5,2),(6,2) }

Introducción a la probabilidad

Ejercicio

Una cafetería ofrece un menú con tres platos. Se puede elegir un plato principal, un complemento y un postre. Las posibles elecciones de cada uno son las siguientes:

Menú	**Elección**
Plato principal	Pollo o filete
Complemento	Pasta, arroz o patata
Postre	Helado, gelatina o tarta de manzana

Cada individuo debe elegir un elemento de cada categoría.

1. Listar todos los resultados del espacio muestral Ω.
2. Si A es el suceso consistente en que elije helado de postre, listar los resultados de A.
3. Si B es el suceso consistente en que elije pollo, listar los resultados de B.
4. Listar los resultados de $A \cap B$.
5. Si C es el suceso consistente en que elije arroz, listar los resultados de C.
6. Listar los resultados de $A \cap B \cap C$.

Introducción a la probabilidad

Leyes de Morgan

Hay ciertas propiedades de la unión, intersección y suceso contrario que son conocidas bajo las leyes de Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Probabilidad

Enfoque frecuentista

Es un hecho empíricamente comprobado que, sí se repite un experimento sucesivamente, bajo las mismas condiciones, la frecuencia relativa:

$$f_n(A) = \frac{n^{\underline{o}}\ de\ veces\ que\ ocurre\ A}{n}$$

converge hacia una cantidad que llamamos probabilidad:

$$Pr(A) = \lim_{n \to \infty} f_n(A)$$

Es esta proporción (o frecuencia relativa) a largo plazo la que se tiene en mente cuando se habla de probabilidad de un suceso.

Universidad Europea de Madrid

Probabilidad

Enfoque frecuentista

Así definida se pueden deducir las siguientes propiedades básicas que poseen las probabilidades.

1. Para cualquier suceso A, $0 \leq P(A) \leq 1$

2. $P(A) = \sum_{i:\epsilon_i \in A} P(\epsilon_i)$

3. $P(\Omega) = 1$

4. Si A y B son sucesos incompatibles, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Probabilidad

Ejercicio

A partir de las propiedades anteriores pueden deducirse otras:

1. $P(A^c) = 1 - P(A)$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. Si A' es un subconjunto de A, entonces $P(A-A') = P(A) - P(A')$
4. $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Probabilidad

Ejemplo

Una máquina ha producido 50 piezas del Tipo I y 200 del Tipo II.Cada una de estas piezas puede ser defectuosa o aceptable. La distribución bivariante es la siguiente:

	Tipo I	Tipo II	TOTAL
Aceptables	46	184	230
Defectuosas	4	16	20
TOTAL	50	200	250

Si seleccionamos un artículo al azar ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

- P(Defectuoso)=20/250=0.08

Si seleccionamos un artículo al azar ¿Cuál es la probabilidad de que sea del Tipo II?

P(Tipo II)=200/250=0.80

Universidad Europea de Madrid

Probabilidad

Ejemplo

Una máquina ha producido 50 piezas del Tipo I y 200 del Tipo II.Cada una de estas piezas puede ser defectuosa o aceptable. La distribución bivariante es la siguiente:

	Tipo I	Tipo II	TOTAL
Aceptables	46	184	230
Defectuosas	4	16	20
TOTAL	50	200	250

Un comprador quiere una pieza del Tipo II que funcione. Se extrae una pieza al azar de las 250, ¿Cuál es la probabilidad de sacar una pieza NO VÁLIDA)

Universidad Europea de Madrid

Probabilidad

Ejemplo

Una máquina ha producido 50 piezas del Tipo I y 200 del Tipo II.Cada una de estas piezas puede ser defectuosa o aceptable. La distribución bivariante es la siguiente:

	Tipo I	**Tipo II**	**TOTAL**
Aceptables	46	184	230
Defectuosas	4	16	20
TOTAL	50	200	250

Solución 1:

P(no vale) = P(Defectuosa UTipo I) = P(Defectuosa) + P(Tipo I)-

P(Defectuosa∩Tipo I) = $\frac{20}{250}+\frac{50}{250}-\frac{4}{250}=0{,}264$

Probabilidad

Ejemplo

Una máquina ha producido 50 piezas del Tipo I y 200 del Tipo II.Cada una de estas piezas puede ser defectuosa o aceptable. La distribución bivariante es la siguiente:

	Tipo I	Tipo II	TOTAL
Aceptables	46	184	230
Defectuosas	4	16	20
TOTAL	50	200	250

Solución 2:

P(no vale) = 1- P(vale) = 1- P(Aceptable ∩ Tipo II)

$$= 1 - \frac{184}{250} = 0{,}264$$

Universidad Europea de Madrid

Probabilidad

Definición axiomática (Kolmogorov)

Sea Ω el espacio muestral de cierto experimento aleatorio. La ***probabilidad*** de cada suceso se define como una función

P: Ω $\longrightarrow$ R que verifica:

1. Cualquiera que sea el suceso *A*, *P(A)* ≥ 0.
2. La probabilidad total es 1. Es decir, *P(Ω)* = 1.
3. Si dos sucesos son incompatibles, la probabilidad de su unión es igual a la suma de sus probabilidades. Es decir, si A ∩ B= *Ø, entonces P(A U B) = P(A) + P(B).*

Observación*: esta última propiedad se generaliza a cualquier número de sucesos disjuntos:*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right) = \sum_{i=1}^{5} P(A_i), si\ A_k \cap A_j = \emptyset, para\ todo\ k, j = 1, \ldots, 5$$

Universidad Europea de Madrid

Probabilidad

Espacios equiprobables (regla de Laplace)

En algunas situaciones, la definición del experimento asegura que todos los sucesos elementales tienen la misma probabilidad de ocurrir.

En este caso, se dice que el espacio muestral es **equiprobable**.

Si el espacio muestral es equiprobable y contiene *k sucesos elementales,* $\Omega = \{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n\}$, luego se tiene *P(* ϵ_i *) = 1/k* para *i = 1, 2, . . . , k.*

Para cualquier suceso *A entonces, la probabilidad* de *A es:*

P(A) =1/*k*×*número de sucesos elementales en A.*

O, en forma equivalente

$$P(A) = \frac{nº\ de\ casos\ favorables\ a\ A}{nº\ de\ casos\ posibles}$$

Universidad Europea de Madrid

Probabilidad

EJEMPLOS

1) Lanzamiento de una moneda: $\Omega = \{C,X\} \rightarrow P(C)=1/2 = P(X)$

2) Lanzamiento de un dado: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \rightarrow P(3) = 1/6$

3) Extracción de cartas de la baraja:

$\Omega = \{As\ de\ copas,\ dos\ de\ copas....\}$

P(Sacar una carta de oros) = 10 / 40

Universidad Europea de Madrid

Probabilidad

EJEMPLO 1

Supongamos que lanzamos dos veces *una moneda* **equilabrada.**

Tenemos entonces cuatro *sucesos elementales,*

(C,C), (C,X), (X,C), (X,X)

donde cada suceso tiene probabilidad ¼

Entonces, la probabilidad de observar el suceso A = exactamente una es cara, sería P(A) = P({(C,X), (X,C)}) = P((C,X)) + P((X,C)) = 2· ¼ = ½

Además, la probabilidad de que la primera tirada sea cara es P(B) = 2/4 = ½

Universidad Europea de Madrid

Probabilidad

EJEMPLO 2 (Lote de ordenadores)

En un lote de 9 ordenadores hay 3 que son defectuosos, el comprador del lote lo rechazará si al inspeccionar dos de ellos elegidos al azar resultan ser defectuosos:

¿Cuál es la probabilidad de que el comprador rechace el lote?

A $\rightarrow$ Rechazar el lote = Encontrar dos defectuosos

$$P(A) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}$$

de cuantas maneras puedo seleccionar dos defectuosos

de cuantas maneras puedo seleccionar dos ordenadores

COMBINATORIA

Probabilidad

COMBINATORIA

	SIN REEMPLAZAMIENTO	CON REEMPLAZAMIENTO
IMPORTA EL ORDEN VARIACIONES	$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$VR_n^k = n^k$
NO IMPORTA EL ORDEN COMBINACIONES	$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$	$CR_n^k = \binom{n+k-1}{k}$

Si $n = k \rightarrow$ Permutaciones

Probabilidad

EJEMPLO 2 (Lote de ordenadores)

¿Cuál es la probabilidad de que el comprador rechace el lote?

$$P(A) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}$$

¿De cuántas maneras puedo seleccionar 2 defectuosos de entre los tres que hay?

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = 3$$

Universidad Europea de Madrid

Probabilidad

EJEMPLO 2 (Lote de ordenadores)

¿Cuál es la probabilidad de que el comprador rechace el lote?

$$P(A) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}$$

¿De cuántas maneras puedo seleccionar 2 ordenadores de entre todos los que hay?

$$C_9^2 = \frac{9!}{2!\,(9-2)!} = \frac{9!}{2!\,7!} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

Universidad Europea de Madrid

Probabilidad

EJEMPLO 2 (Lote de ordenadores)

¿Cuál es la probabilidad de que el comprador rechace el lote?

$$P(A) = \frac{n^{\underline{o}}\ de\ casos\ favorables}{n^{\underline{o}}\ de\ casos\ posibles} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Ejemplo

- Una urna contiene 3 bolas blancas y 4 negras, si sacamos una bola ¿Qué probabilidad hay de que sea blanca? ¿y negra?

$$P\,(\text{ Blanca })=\frac{3}{7}$$

$$P\,(\text{ Negra })=\frac{4}{7}$$

Probabilidad Condicionada

- **La probabilidad de un suceso depende de la mayor o menor <u>información</u> que tengamos.**

Por ejemplo: Una persona extrae una carta al azar de una baraja española, la mira y la coloca boca abajo sobre la mesa.

¿Qué probabilidad tiene de ser un rey?

$$P(\text{ rey }) = \frac{4}{40}$$

Y ¿ si nos dicen que es una figura ?

$$P(\text{rey sabiendo que es figura}) = \frac{4}{12}$$

Probabilidad condicionada

Probabilidad de A condicionada a B (sabiendo que ha sucedido B)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

En el ejemplo:

P (Rey | figura) = P(rey y figura) / P (figura) = $\frac{4/40}{12/40} = \frac{4}{12}$

Sucesos independientes

- Dos sucesos se dicen independientes cuando la ocurrencia de alguno de ellos NO nos da información nueva sobre la ocurrencia de otro.
  Dos sucesos son independientes si se cumple

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

En este caso se cumple

$$P(A \mid B) = P(A)$$

Tres Teoremas Importantes

- Teorema de la Multiplicación

Sirve para calcular la probabilidad de la intersección de sucesos concatenados.

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid A \cap B)$$

Ejemplo: En una urna hay 20 bolas blancas y 10 negras. Se realizan 3 extracciones sin reposición. Calcular la probabilidad de obtener 3 bolas blancas.

Tres teoremas importantes

Solución ejemplo: Llamamos B_1 al suceso obtener una bola blanca en la primera extracción, B_2 a obtener blanca en la segunda y B_3 a obtenerla en la tercera.

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1)P(B_2 \mid B_1)P(B_3 \mid B_1 \cap B_2) =$$

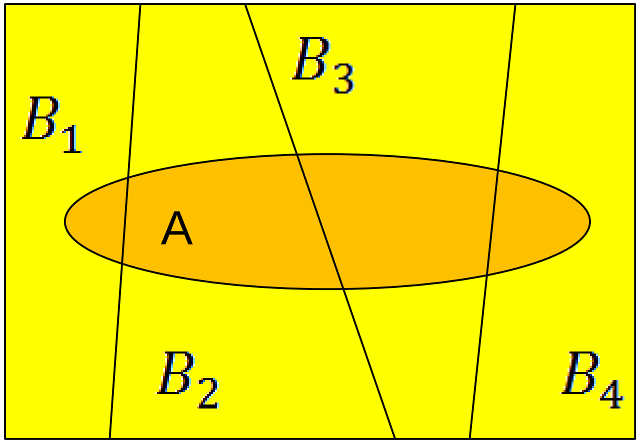
$$= \frac{20}{30}\frac{19}{29}\frac{18}{28}$$

Universidad Europea de Madrid

Probabilidad total

Sean $B_1, B_2, \cdots, B_n$ sucesos de un experimento cuya unión sea Ω, es decir

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$



Sea A un suceso, se tiene que

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i)$$

O, equivalentemente

(fórmula de la probabilidad total)

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$

Universidad Europea de Madrid

Probabilidad total

Ejemplo 1

En una sala hay 300 personas, que se pueden clasificar de la siguiente forma:

	Chicas	Chicos	**TOTAL**
Fuman	15	15	**30**
No fuman	105	165	**270**
TOTAL	**120**	**180**	**300**

Si se elige una persona al azar, calcular la probabilidad de que fume:

P(Fuma|chica) = 15/120 = 0,125 P(Fuma|chico) = 15/180 = 0,0833

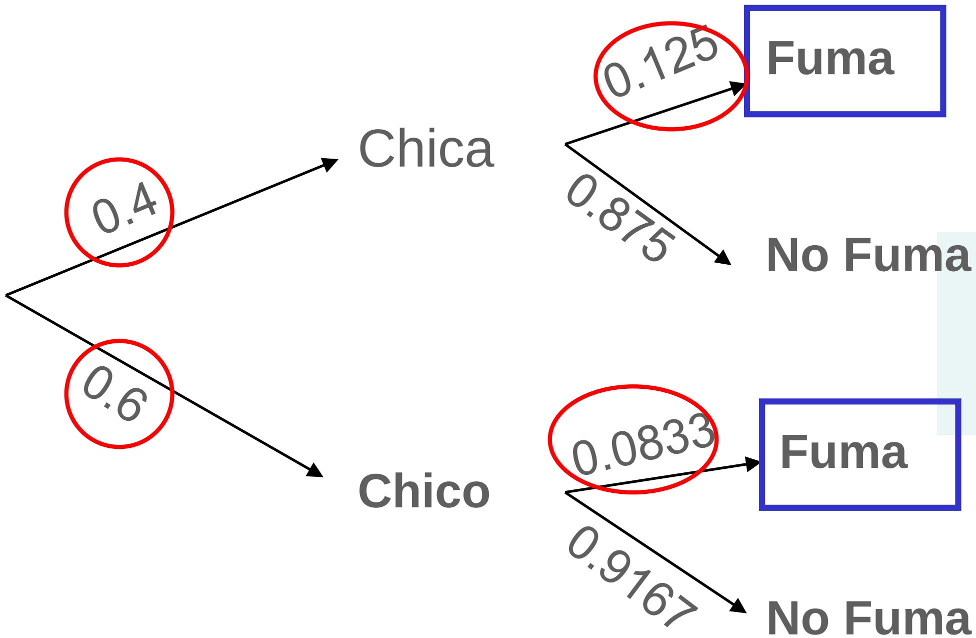
P(Chica) = 120/300=0.40 P(Chico) = 180/300 = 0.60

P(Fuma) = P(Fuma|Chica)P(Chica) + P(Fuma|Chico)P(Chico)

= 0,125 · 0,40 + 0,0833 · 0,60 = 0,10

Universidad Europea de Madrid

Árbol de probabilidad



P(Fuma)= 0.4·0.125 +0.6·0.083 =0.10

Teorema de Bayes

Problema:

Conocemos P(B|A), ¿Cómo podemos calcular P(A|B)?

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}$$

y usando la fórmula de la probabilidad total, tenemos

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \mid A)P(A) + P(B \mid A^c)P(A^c)}$$

Teorema de Bayes

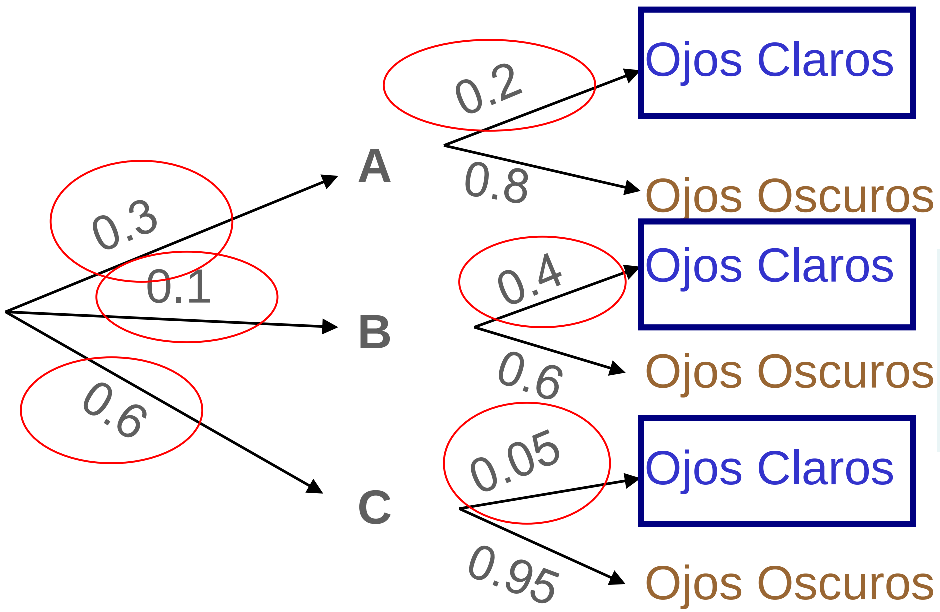
Ejercicio

Una población está formada por tres grupos étnicos A(30%), B(10%) y C(60%). Los porcentajes de ojos claros son 20%, 40% y 5% respectivamente.

Calculemos:

1. La probabilidad de que un individuo elegido al azar tenga los ojos claros.
2. La probabilidad de que un individuo de ojos oscuros sea del tipo A.
3. Si un individuo elegido al azar tiene los ojos claros, ¿a qué grupo es más probable que pertenezca?

Árbol de probabilidad



Calculad la probabilidad de que tenga los ojos claros

Solución

1. Aplicando el Teorema de la Probabilidad Total obtenemos la probabilidad de que un individuo elegido al azar tenga los ojos claros.

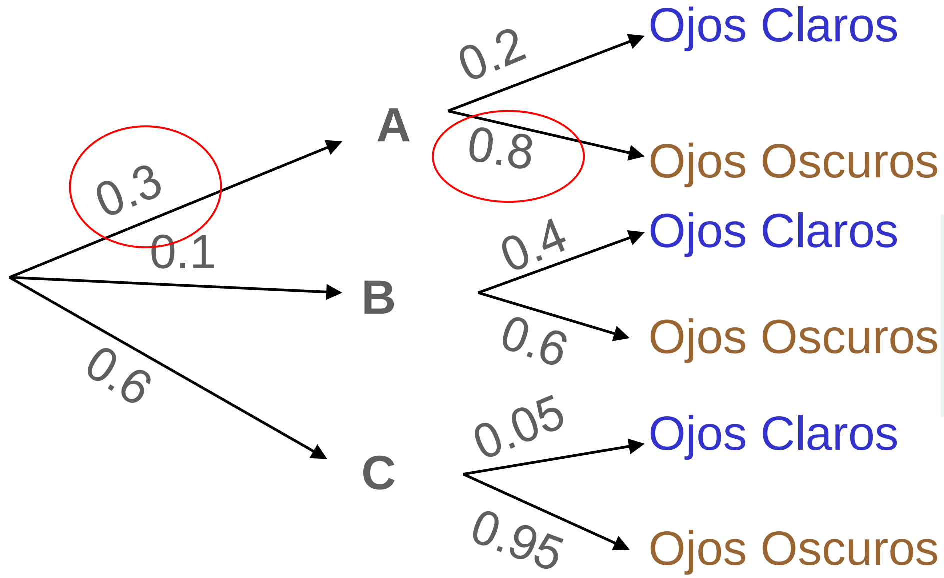
$$P(OC) = P(OC \mid A)P(A) + P(OC \mid B)P(B) + P(OC \mid C)P(C)$$
$$= 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}1 + 0{,}05 \cdot 0{,}6 = 0{,}13$$

Obs. La probabilidad de que tenga ojos oscuros es $P(OO)=1 - P(OC)=0.87$

Universidad Europea de Madrid

Árbol de probabilidad

2. La probabilidad de que un individuo de ojos oscuros sea del tipo A.



Por el Teorema de Bayes

$$P(A|OO) = \frac{P(A \cap OO)}{P(OO)} = \frac{P(OO|A) \cdot P(A)}{P(OO)} = \frac{0.3 \cdot 0.8}{0.87}$$