Estructuras Algebraicas. Practicas no. 2

1) Demostrar que si $A[x]$ es dominio de ideales principales entonces A es cuerpo.

2 Demostrar que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, y $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ son dominios euclideos, y encontrar sus unidades.

3 Calcular el máximo común divisor en $\mathbb{Z}[i]$ de 17 y $10 + 11i$.

4) Encontrar todos los posibles restos al dividir $1 + 2i$ entre $1 + i$.

5) Demostrar que en $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ los elementos 3 y $2 + \sqrt{-5}$ tienen máximo común divisor igual a 1, pero el ideal $I = (3, 2 + \sqrt{-5})$ no es el total. Concluir que I no es principal.

6) Sean m, n enteros mayores que 1. Demostrar que el sistema de ecuaciones $\{x \equiv 1 (\mod m)\ , x \equiv 0 (\mod n)\}$, tiene solución en los enteros sí y solo sí m, n son primos entre sí.

7) Sean a y b números enteros cuyo máximo común divisor en $\mathbb{Z}$ es 1. Calcular el máximo común divisor de a y b en el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

8 Calcular las soluciones enteras de cada una de las siguientes ecuaciones:

$$(1)\ 25x + 40y = 24,\ \ (2)\ 48x + 30y = 12,$$

$$(3)\ 31x + 17y = 12,\ \ (4)\ 2645x + 1955y = 230.$$

9) (1) Encontrar un entero positivo de tres cifras cuyos restos al dividirlo entre $7, 9$ y 11 son $1, 2$ y 3, respectivamente.

(2) Calcular el menor entero positivo cuyos restos al dividirlo entre $5, 7$ y 9 son $4, 3$ y 1, respectivamente.

10) Resolver en el anillo de los números enteros las siguientes congruencias:

$$(1)\ 5x \equiv 17 \ \mathsf{mod}\ 19,\ \ (2)\ 5x \equiv 17 \ \mathsf{mod}\ 15,\ \ (3)\ 34x \equiv 60 \ \mathsf{mod}\ 98$$

$$(4)\ 35x \equiv 119 \ \mathsf{mod}\ 139,\ \ (5)\ 125x \equiv 27 \ \mathsf{mod}\ 256,\ \ (6)\ 211x \equiv 659 \ \mathsf{mod}\ 900.$$

11) Resolver los siguientes sistemas de congruencias en el anillo de los números enteros.

$$(1)\ \{6x \equiv 8 \ \mathsf{mod}\ 14,\ 9x \equiv 36 \ \mathsf{mod}\ 48\}$$

$$(2)\ \{x \equiv 36 \ \mathsf{mod}\ 41,\ x \equiv 5 \ \mathsf{mod}\ 17\}$$