Propiedades de la aplicación módulo

Porposición. La aplicación $|\ |: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada $z \in \mathbb{C}$ le hace corresponder el número real

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

satisface las siguientes propiedades:

1. $|z| \geq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Además, $|z| = 0$ si y sólo si $z = 0$.
2. Para todo $z \in \mathbb{C}$, se tiene $\begin{cases} \operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq |z|, \\ \operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im} z| \leq |z|. \end{cases}$
3. $|z| = |\bar{z}| = |-z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
4. $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ para todo $z \in \mathbb{C}$. En consecuencia, $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$ par todo $z \neq 0$.
5. Para cualesquiera $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, se tiene $\begin{cases} |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \\ \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{si } z_2 \neq 0. \end{cases}$

   En particular, $|\lambda \cdot z| = |\lambda| \cdot |z|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y para todo $z \in \mathbb{C}$.
6. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ para cualesquiera $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
7. $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$ para cualesquiera $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Demostración. Las propiedades 1, 2, 3 y 4 se siguen directamente de la definición de módulo.

5. Para demostrar la quinta propiedad es suficiente probar la igualdad referida al producto y que el módulo del inverso de un número no nulo es el inverso del módulo.

Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se cumple

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 z_2) \cdot (\overline{z_1 z_2}) = (z_1 \bar{z}_1) \cdot (z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

y tomando raíces cuadradas resulta $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Por otra parte, para $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se tiene

$$1 = |z \cdot z^{-1}| = |z| \cdot |z^{-1}| \Longrightarrow |z^{-1}| = \frac{1}{|z|}.$$

6. Se trata de probar la denominada *desigualdad triangular*,:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 \\ &= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} + z_2\bar{z}_2 = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1\bar{z}_2| + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

y tomando raíces cuadradas se obtiene la desigualdad.

7. Para probar la conocida por *desigualdad triangular inversa* se aplica la desigualdad triangular:

Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, se verifica

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2| \quad \Longrightarrow \quad |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|,$$

ahora intercambiando z_1 y z_2 resulta $|z_2| - |z_1| \leq |z_2 - z_1|$, y teniendo en cuenta que según la propiedad 2 es $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$, entonces

$$|z_1 - z_2| \geq \text{máx}\left\{|z_1| - |z_2|, -(|z_1| - |z_2|)\right\} = ||z_1| - |z_2||\,.$$

$\square$

Por verificar las propiedades 1, 5 (en el caso particular de producto por escalares reales) y 6, la aplicación módulo es una *norma* en $\mathbb{C}$, denominada *norma euclídea* pues no es otra cosa que la norma euclídea de $\mathbb{R}^2$ (dados $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene $\|(x, y)\|_2 = |x + iy|$). Por tanto, $(\mathbb{C}, +, \cdot, |\ |)$ es un *espacio vectorial normado* y, además, es equivalente a $(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \|\ \|)$.