Capítulo 1

Conjuntos convexos

1.1. Conceptos básicos.

Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, se define

$$[x, y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} \quad \text{(segmento cerrado)},$$

$$(x, y) = \{\lambda x + (1-\lambda)y \mid 0 < \lambda < 1\} \quad \text{(segmento abierto)},$$

y análogamente definimos los segmentos semiabiertos $[x, y)$, $(x, y]$.

Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice *convexo* si $\forall x, y \in A$, $[x, y] \subset A$. Son ejemplos de conjuntos convexos:

- Un subespacio afín de $\mathbb{R}^n$.
- Una bola abierta: $\mathbb{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < r\}$, centrada en $x \in \mathbb{R}^n$ y de radio $r > 0$ (por la desigualdad triangular).
- Dado $B \subset \mathbb{S}^{n-1}(x, r) = \partial\mathbb{B}(x, r)$, el conjunto $\mathbb{B}(x, r) \cup B$ es convexo. En particular, $\overline{\mathbb{B}}(x, r) = \mathbb{S}^{n-1}(x, r) \cup \mathbb{B}(x, r)$ es convexo.

Una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ definida en un convexo $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice *convexa* (ver figura 1.1) si

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \quad \forall x, y \in A, \forall \lambda \in [0, 1].$$

f se dice *cóncava* si $-f$ es convexa, es decir, si la desigualdad anterior se da para la desigualdad contraria. Se define el *epigrafo* y el *hipografo* de $f\colon A \to \mathbb{R}$ como

$$\text{epi}(f) = \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

$$\text{hipo}(f) = \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} \mid y \leq f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

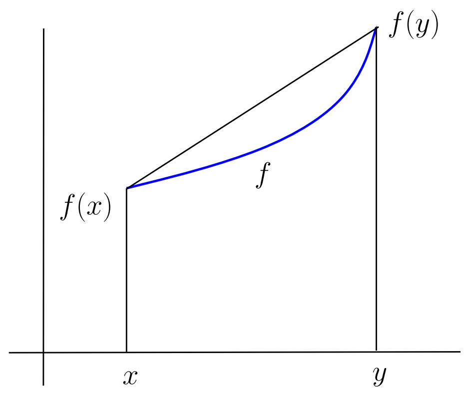


Figura 1.1: Gráfica de una función convexa.

Lema 1.1.1 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo, y $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función.*

1. *Si f es convexa, entonces* $\mathrm{epi}(f)$ *es un convexo de $\mathbb{R}^{n+1}$.*
2. *Si f es cóncava, entonces* $\mathrm{hipo}(f)$ *es un convexo de $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Demostración. 2 es consecuencia directa de 1. Veamos 1: Dados $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathrm{epi}(f)$ y $\lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \overset{(A)}{\leq} \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \overset{(B)}{\leq} \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2,$$

donde en (A) hemos usado que f es convexa, y en (B) que $(x_i, y_i) \in \mathrm{epi}(f)$ y $\lambda \in [0, 1]$. Por tanto, $\lambda(x_1, y_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2) \in \mathrm{epi}(f)$. □

Proposición 1.1.1

(1) *Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia arbitraria de conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$, entonces $\cap_{i\in I} A_i$ es vacío o convexo.*

(2) *Si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación afín y $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ son conjuntos convexos, entonces $f(A)$ es convexo de $\mathbb{R}^m$ y $f^{-1}(B)$ es vacío o convexo de $\mathbb{R}^n$.*

(3) *Si $A, B \subset \mathbb{R}^n$ son convexos y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $A + B$, λA son convexos. Además, si $\lambda, \mu \geq 0$, enotonces $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.*

Demostración. 1 es por comprobación directa de la definición de convexo. Veamos 2: Como f es afín, $f(x) = Ax + b$ con $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in [0, 1]$,

$$\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2) = \lambda(Ax_1+b)+(1-\lambda)(Ax_2+b) = A(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)+b = f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2).$$

Si tomamos x_1, x_2 en el convexo A, entonces el miembro de la derecha anterior está en $f(A)$ luego $f(A)$ es convexo. Y si tomamos x_1, x_2 en $f^{-1}(B)$, entonces el miembro de la izquierda está en B (por ser B convexo) luego $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in f^{-1}(B)$, es decir, $f^{-1}(B)$ es convexo.

Para el apartado 3, sean $x, y \in A + B$ y $\delta \in [0,1]$. Por definición de suma afín de conjuntos, podemos escribir $x = a_x + b_x$, $y = a_y + b_y$ con $a_x, a_y \in A$, $b_x, b_y \in B$. Así,

$$\delta x + (1-\delta)y = \delta(a_x + b_x) + (1-\delta)(a_y + b_y) = [\delta a_x + (1-\delta)a_y] + [\delta b_x + (1-\delta)b_y].$$

Por ser A y b convexos, los corchetes anteriores están en A y B respectivamente, luego $A + B$ es convexo. La convexidad de λA es también un cálculo directo y la dejamos al lector.

Terminaremos probando que $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$: la inclusión $\boxed{\subseteq}$ es cierta para cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^n$ (sólo usa la propiedad distributiva). Para el recíproco, tomemos $z \in \lambda A + \mu A$. Así, $z = \lambda x + \mu y$ para ciertos $x, y \in A$. Discutimos casos:

$\underline{\lambda + \mu = 0}$**.** Como $\lambda, \mu \geq 0$, entonces $\lambda = \mu = 0$ luego $\lambda A + \mu A$ y $(\lambda + \mu)A$ se reducen a $\{\vec{0}\}$.

$\underline{\lambda + \mu \neq 0}$**.** En este caso,

$$z = \lambda x + \mu y = (\lambda + \mu)\left[\frac{\lambda}{\lambda + \mu}x + \frac{\mu}{\lambda + \mu}y\right].$$

Como los coeficientes de la combinación lineal dentro del corchete son no negativos y suman 1, la convexidad de A asegura que el corchete anterior está en A. Por tanto, $z \in (\lambda + \mu)A$.

□

Tomemos $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo y $r > 0$. Como $\mathbb{B}(\vec{0}, r)$ es convexo, el apartado (3) de la Proposición 1.1.1 implica que $A + \mathbb{B}(\vec{0}, r)$ es convexo. Pero

$$A + \mathbb{B}(\vec{0}, r) = \{x = a + b \mid a \in A, \|b\| < r\} \overset{(\star)}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, A) < r\},$$

donde $(\star)$ se prueba fácilmente por doble inclusión: Si $x = a + b \in A + \mathbb{B}(\vec{0}, r)$, entonces $d(x, A) = \text{ínf}_{a' \in A} d(x, a') \leq d(x, a) = \|(a + b) - a\| = \|b\| < r$. Recíprocamente, si $x \in \mathbb{R}^n$ cumple $d(x, A) < r$ entonces existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < r$, y por tanto $x = a + (x - a) \in A + \mathbb{B}(\vec{0}, r)$.

Definición 1.1.1 Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, al conjunto $\mathcal{U}(A, r) = A + \mathbb{B}(\vec{0}, r)$ se le llama *entorno tubular abierto* de A de radio r. Por lo anterior, $\mathcal{U}(A, r)$ es convexo si A lo es.

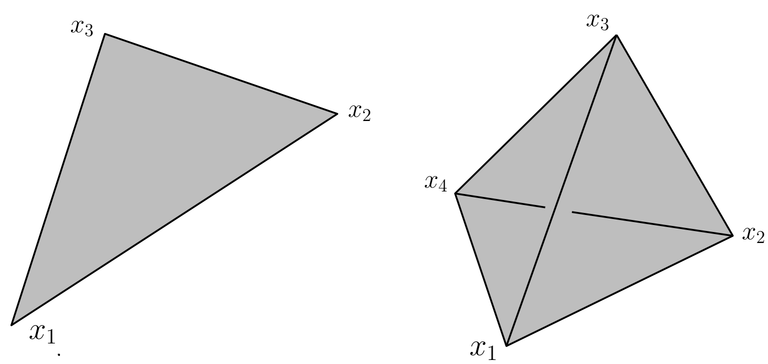


Figura 1.2: Combinación lineal convexa de 3 y 4 puntos.

Corolario 1.1.1 *Si $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo, entonces $\overline{A}$ es convexo.*

Demostración. $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,A) = 0\} = \cap_{r>0}\{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,A) < r\} = \cap_{r>0}\mathcal{U}(A,r)$. Ahora sólo hay que aplicar la convexidad de $\mathcal{U}(A,r)$ y el apartado (1) de la Proposición 1.1.1. □

Definición 1.1.2 Diremos que $x \in \mathbb{R}^n$ es *combinación lineal convexa de* $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ si existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ no negativos con $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ y $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$.

Algunos comentarios sencillos:

- $(k = 1)$: El conjunto de combinaciones lineales convexas de cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ se reduce a $\{x\}$.
- $(k = 2)$: $x \in \mathbb{R}^n$ es combinación lineal convexa de $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si $x \in [x_1, x_2]$.
- $(k = 3)$: Si $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^n$ son afínmente independientes, entonces $x \in \mathbb{R}^n$ es combinación lineal convexa de x_1, x_2, x_3 si y sólo si x está en el triángulo cerrado de $\mathbb{R}^n$ con vértices x_1, x_2, x_3.
- $(k = 4)$: Si $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}^n$ son afínmente independientes, entonces $x \in \mathbb{R}^n$ es combinación lineal convexa de x_1, x_2, x_3, x_4 si y sólo si x está en el tetraedro sólido cerrado de $\mathbb{R}^n$ con vértices x_1, x_2, x_3, x_4.

Definición 1.1.3 Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ no vacío. La *envolvente convexa* de A, $\operatorname{conv}(A)$, es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ que pueden escribirse como combinación lineal convexa de una cantidad finita de puntos de A.

Una forma intuitiva de ver la envolvente convexa de un conjunto finito A de puntos en el plano, es imaginar una banda elástica estirada que los encierra a todos. La elasticidad de la banda hará que ésta tome elástica de la envolvente convexa de los puntos de A. Dicho de forma algo más geométrica, en este caso y si no todos los puntos de A están alineados, entonces su envolvente convexa corresponde a un polígono convexo cuyos vértices son algunos de los puntos del conjunto inicial de puntos.

Volviendo a la situación general, de la definición se tienen:

- $A \subset \text{conv}(A)$.
- Si $A \subset B$, entonces $\text{conv}(A) \subset \text{conv}(B)$.
- $\text{conv}(A)$ es convexo: dados $x, y \in \text{conv}(A)$ y $\lambda \in [0,1]$, existen $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m \in A$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_m \geq 0$ con $\sum_{i=1}^k \lambda_i = \sum_{i=1}^m \mu_i = 1$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = x$, $\sum_{i=1}^m \mu_i y_i = y$. Por tanto,
$$\lambda x + (1-\lambda) y = \lambda \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + (1-\lambda) \sum_{i=1}^m \mu_i y_i,$$
y basta ver que la combinación lineal anterior de $k+m$ sumandos es convexa, es decir, que sus coeficientes son no negativos y suman 1. Lo primero es evidente, y
$$\lambda \sum_{i=1}^k \lambda_i + (1-\lambda) \sum_{i=1}^m \mu_i = \lambda \cdot 1 + (1-\lambda) \cdot 1 = 1.$$

Proposición 1.1.2 *Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ no vacíos.*

(1) *Si A es convexo, entonces $A = \text{conv}(A)$.*

(2) $\text{conv}(A)$ *es la intersección de todos los conjuntos convexos*[1] *de $\mathbb{R}^n$ que contienen a A.*

(3) $\text{conv}(A) + \text{conv}(B) = \text{conv}(A+B)$.

Demostración. Para (1), ya sabíamos que $A \subset \text{conv}(A)$. Recíprocamente, supongamos que A es convexo y veamos que $\text{conv}(A) \subset A$. Si $x \in \text{conv}(A)$ entonces existen $x_1, \ldots, x_k \in A$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$ con $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ y $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = x$. Razonamos por inducción sobre k:

- Si $k = 1$, es evidente que $x \in A$.
- Si $k = 2$, entonces $x \in [x_1, x_2] \subset A$ (por ser A convexo).

[1] Mejoraremos este resultado bajo la hipótesis de compacidad para A, probando que en este caso $\text{conv}(A)$ es la intersección de todos los semiespacios cerrados de $\mathbb{R}^n$ que contienen a A. Esto será consecuencia del Teorema 1.6.1.

- Supongamos por hipótesis de inducción que si $y \in \text{conv}(A)$ se escribe como combinación lineal de *menos* de k puntos de A, entonces $y \in A$. Tomemos $x \in \text{conv}(A)$ como arriba. Si $\lambda_k = 0$, entonces podemos aplicar a x la hipótesis de inducción luego $x \in A$. Si $\lambda_k = 1$, entonces $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{k-1} = 0$ luego x es combinación lineal convexa de *un* sólo punto de A, luego $x \in A$. Supongamos ahora que $\lambda_k \in (0,1)$. Entonces,
$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = (1-\lambda_k) \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_k} x_i + \lambda_k x_k.$$
El miembro de la derecha es combinación lineal convexa de $\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_k} x_i$ y de x_k. Como A es convexo, bastará probar que $\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_k} x_i \in A$ para que x esté en A. Pero $\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_k} x_i$ es combinación lineal convexa de $x_1, \ldots, x_{k-1} \in A$, luego por hipótesis de inducción, $\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_k} x_i \in A$. Esto prueba el apartado (1).

Para el apartado (2), llamemos $\mathcal{D}(A)$ a la intersección de todos los convexos de $\mathbb{R}^n$ que contienen a A. Como $A \subset \text{conv}(A)$ y $\text{conv}(A)$ es convexo, entonces $\mathcal{D}(A) \subset \text{conv}(A)$. Recíprocamente, sea $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo con $A \subset C$. Tomando envolventes convexas, $\text{conv}(A) \subset \text{conv}(C) = C$ (por el apartado (1)). Como C es cualquier convexo conteniendo a A, concluímos que $\text{conv}(A) \subset \mathcal{D}(A)$. Esto prueba (2).

Para (3), veamos primero que $\text{conv}(A+B) \subset \text{conv}(A) + \text{conv}(B)$:
Dado $x \in \text{conv}(A+B)$, existen $a_1, \ldots, a_k \in A$, $b_1, \ldots, b_k \in B$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$ con $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ y $\sum_{i=1}^k \lambda_i (a_i + b_i) = x$. Así,
$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i \in \text{conv}(A) + \text{conv}(B).$$
Recíprocamente, veamos que $x + y \in \text{conv}(A+B)$ $\forall x \in \text{conv}(A)$, $y \in \text{conv}(B)$:
Existen $a_1, \ldots, a_k \in A$, $b_1, \ldots, b_m \in B$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_m \geq 0$ con $\sum_{i=1}^k \lambda_i = \sum_{i=1}^m \mu_i = 1$, $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i$ e $y = \sum_{i=1}^m \mu_i b_i$. Así,
$$x + y = \left(\sum_{j=1}^{m} \mu_j \right) \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i \right) + \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \right) \left(\sum_{i=1}^{m} \mu_j b_j \right) = \sum_{\substack{i=1,\ldots,k \\ j=1,\ldots,m}} \lambda_i \mu_j (a_i + b_j).$$
El miembro de la derecha es una combinación lineal convexa de $a_i + b_j \in A + B$, ya que los coeficientes $\lambda_i \mu_j$ son no negativos y suman 1. Por tanto, $x + y \in \text{conv}(A+B)$ y (3) está probado. $\square$

Sabemos que si $A \subset \mathbb{R}^n$ y $x \in \text{conv}(A)$, entonces x es combinación lineal convexa de puntos de A. Pero ¿existe una cota superior sobre la longitud de esta combinación lineal? Veamos antes un lema previo.

Lema 1.1.2 *$x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ son afínmente dependientes si y sólo si existen $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$ y $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = \vec{0}$.*

Demostración. Si los puntos $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ son afínmente dependientes, entonces los vectores $x_2 - x_1, \dots, x_k - x_1$ son linealmente dependientes. Por tanto, existen $\lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que

$$\vec{0} = \sum_{i=2}^k \lambda_i (x_i - x_1) = \sum_{i=2}^k \lambda_i x_i + \alpha_1 x_1,$$

donde $\alpha_1 = -\sum_{i=2}^k \lambda_i$. Llamamos $\alpha_i = \lambda_i \ \forall i = 2, \dots, k$, que cumplen las condiciones deseadas.

Recíprocamente, supongamos que existen $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$ y $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = \vec{0}$. Entonces,

$$\sum_{i=2}^k \alpha_i (x_i - x_1) = \sum_{i=2}^k \alpha_i x_i - \left(\sum_{i=2}^k \alpha_i \right) x_1 = \sum_{i=2}^k \alpha_i x_i + \alpha_1 x_1 = \vec{0},$$

luego los vectores $x_2 - x_1, \dots, x_k - x_1$ son linealmente dependientes. □

Teorema 1.1.1 (Caratheodory) *Si $A \subset \mathbb{R}^n$ y $x \in \mathrm{conv}(A)$, entonces x es combinación lineal convexa de puntos de A afínmente independientes (en particular, no más de $n+1$).*

Demostración. Sea $x \in \mathrm{conv}(A)$, que será de la forma $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ para ciertos $x_1, \dots, x_k \in A$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ con $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Elegimos esta combinación lineal lo más corta posible, en particular $\lambda_i > 0$ para todo i. Por reducción al absurdo, supongamos que $x_1, \dots, x_k$ son afínmente dependientes. Por el Lema 1.1.2, existen $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$ y $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = \vec{0}$. Salvo reordenación de los índices, podemos suponer que

$$\frac{\lambda_k}{\alpha_k} = \mathrm{mín}\{\frac{\lambda_i}{\alpha_i} \mid \alpha_i > 0\}.$$

Si escribimos x como combinación lineal convexa de $x_1, \dots, x_{k-1}$ tendremos una contradicción (se había supuesto la combinación original lo más corta posible).

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{k-1} \left(\lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i \right) x_i + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i x_i + \lambda_k x_k. \tag{1.1}$$

Los dos últimos términos en el miembro de la derecha suman cero, ya que

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i x_i + \lambda_k x_k = \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i x_i + \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_k x_k = \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \vec{0} = \vec{0}.$$

Por tanto, sólo nos queda ver que el primer término del miembro de la derecha de (1.1) es una combinación lineal convexa.

$$\sum_{i=1}^{k-1}\left(\lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k}\alpha_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i + \lambda_k\right) - \left(\lambda_k + \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\lambda_k}{\alpha_k}\alpha_i\right) = 1 - \frac{\lambda_k}{\alpha_k}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i = 1 - \frac{\lambda_k}{\alpha_k}0 = 1,$$

luego sólo queda ver que cada coeficiente $\lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k}\alpha_i$ es no negativo:

- Si $\alpha_i > 0$, entonces $\frac{\lambda_k}{\alpha_k} \leq \frac{\lambda_i}{\alpha_i}$ luego $\lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k}\alpha_i \geq 0$.
- Si $\alpha_i = 0$, entonces $\lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k}\alpha_i = \lambda_i \geq 0$.
- Si $\alpha_i < 0$, entonces $\frac{\lambda_k}{\alpha_k} \geq 0 \geq \frac{\lambda_i}{\alpha_i}$ luego $\frac{\lambda_k}{\alpha_k}\alpha_i \leq \lambda_i$.

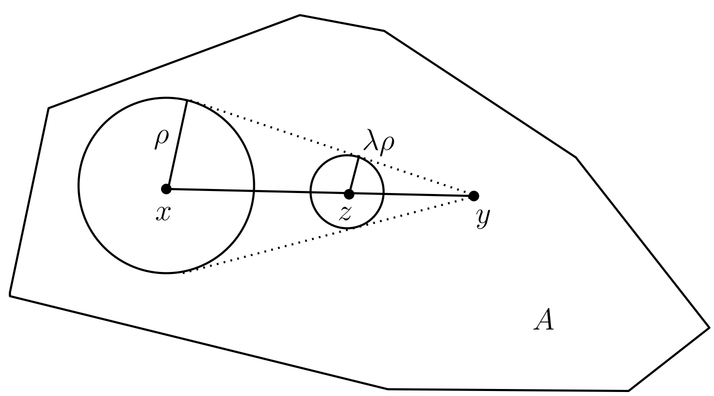
$\square$

Nuestro siguiente objetivo es comprender cómo se comporta la envolvente convexa frente a propiedades topológicas básicas como el interior, clausura, compacidad, etc. Necesitamos dos lemas previos.

Lema 1.1.3 *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo, $x \in \operatorname{int}(A)$, $y \in \overline{A}$. Entonces, $[x, y) \subset \operatorname{int}(A)$.*

Demostración. Discutiremos dos casos.

CASO I: $y \in A$. Sea $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ con $\lambda \in (0, 1]$ cualquier punto de $[x, y)$. Como $x \in \operatorname{int}(A)$, existe $\rho > 0$ tal que $\mathbb{B}(x, \rho) \subset A$. Si vemos que $\mathbb{B}(z, \lambda\rho) \subset A$ habremos terminado este caso.



Dado $w \in \mathbb{B}(z, \lambda\rho) = z + \lambda\mathbb{B}(\vec{0}, \rho)$, existe $u \in \mathbb{B}(\vec{0}, \rho)$ tal que $w = z + \lambda u$. Así, $w = [\lambda x + (1-\lambda)y] + \lambda u = \lambda(x + u) + (1-\lambda)y$. Como $x + u \in \mathbb{B}(x, \rho) \subset A$, $y \in A$ y A es convexo, concluímos que $w \in A$.

Caso II: $\underline{y \in \overline{A} - A}$. Veamos primero que $[x, y) \subset A$. Sea $z \in [x, y)$. Si $z = x$ tenemos $z \in \text{int}(A)$ como queríamos. Supongamos entonces $z \in (x, y)$, y por tanto existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$. Como $x \in \text{int}(A)$, existe $\rho > 0$ tal que $\mathbb{B}(x, \rho) \subset A$. Como $y \in \overline{A}$, existe $a \in A \cap \mathbb{B}(y, \frac{\lambda}{1-\lambda}\rho)$, luego $a = y + \frac{\lambda}{1-\lambda}v$ para algún $v \in \mathbb{B}(\vec{0}, \rho)$. Despejando $(1 - \lambda)y$ y sustituyendo en la ecuación de z, obtenemos $z = \lambda(x - v) + (1 - \lambda)a$, que es una combinación lineal convexa de $x - v, a$. Como $x - v \in \mathbb{B}(x, \rho) \subset A$, $a \in A$ y A es convexo, deducimos que $z \in A$, y por tanto $[x, y) \subset A$.

Finalmente, dado $z \in [x, y)$, el párrafo anterior permite aplicar el caso I a $[x, z)$ luego $[x, z) \subset \text{int}(A)$. Como esto es cierto $\forall z \in [x, y)$, concluímos que $[x, y) \subset \text{int}(A)$.

□

Lema 1.1.4 *Dados $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ y $r > 0$, se tiene:*

$$\mathbb{B}\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, r\right) \subset \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbb{B}\left(x_i, r\right).$$

Demostración. Dado $y \in \mathbb{B}\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i, r\right)$, existe $u \in \mathbb{B}(\vec{0}, r)$ tal que $y = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + u$. Por tanto, $y = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i\right) u = \sum_{i=1}^k \lambda_i (x_i + u) \in \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbb{B}\left(x_i, r\right)$. □

Proposición 1.1.3 *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$.*

(1) *Si A es convexo, entonces* $\text{int}(A)$ *y* $\overline{A}$ *son convexos (supuesto que* $\text{int}(A) \neq \emptyset$*).*

(2) *Si A es abierto, entonces* $\text{conv}(A)$ *es abierta.*

(3) *Si A es acotado, entonces* $\text{conv}(A)$ *es acotada.*

(4) *Si A es compacto, entonces* $\text{conv}(A)$ *es compacta.*

(5) *Si A es convexo e* $\text{int}(A) \neq \emptyset$*, entonces* $\text{int}(A) = \text{int}(\overline{A})$ *y* $\overline{\text{int}(A)} = \overline{A}$*.*

Demostración. Para el apartado (1), supongamos que A es convexo y sean $x, y \in \text{int}(A)$. Por el Lema 1.1.3, $[x, y) \subset \text{int}(A)$. Como $y \in \text{int}(A)$, entonces $[x, y] \subset \text{int}(A)$ luego $\text{int}(A)$ es convexo. Por otro lado $\overline{A}$ es convexo por el Corolario 1.1.1.

Veamos el apartado (2). Sea $z \in \text{conv}(A)$. Así, existen $x_1, \ldots, x_k \in A$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$ tales que $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ y $z = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$. Como A es abierto, existe $r > 0$ tal que $\mathbb{B}(x_i, r) \subset A$

$\forall i = 1, \ldots, k$. Si vemos que $\mathbb{B}(z, r) \subset A$ concluiremos que z interior a A y esto probará (2). Usando el Lema 1.1.4,

$$\mathbb{B}(z, r) = \mathbb{B}\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, r\right) \subset \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbb{B}\left(x_i, r\right) \subset \operatorname{conv}(A).$$

Para el apartado (3), si A es acotado existe $r > 0$ talque $A \subset \mathbb{B}(\vec{0}, r)$ luego $\operatorname{conv}(A) \subset \operatorname{conv}(\mathbb{B}(\vec{0}, r)) = \mathbb{B}(0, r)$ luego $\operatorname{conv}(A)$ es acotado.

Para el apartado (4), consideremos el *símplex estándar* en $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\Delta^{n+1} = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \lambda_i \geq 0 \ \forall i, \ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\}.$$

Δ^{n+1} es un compacto de $\mathbb{R}^{n+1}$ (es cerrado y acotado). Consideremos el producto cartesiano $A^{n+1} = A \times \overset{n+1)}{\cdots} \times A$ y la aplicación

$$f \colon \Delta^{n+1} \times A^{n+1} \to \mathbb{R}^n, \quad f(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}, x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i.$$

Así, $\operatorname{conv}(A)$ es la imagen de f por el Teorema de Caratheodory. Como A es compacto, $\Delta^{n+1} \times A^{n+1}$ también es compacto. Como f es continua, concluímos que $f(\Delta^{n+1} \times A^{n+1}) = \operatorname{conv}(A)$ también es compacto.

Terminamos con el apartado (5). La inclusión $\operatorname{int}(A) \subset \operatorname{int}(\overline{A})$ es trivial (y no necesita ninguna hipótesis sobre A). Recíprocamente, supongamos que A es convexo con interior no vacío, sea $z \in \operatorname{int}(\overline{A})$ y veamos que $z \in \operatorname{int}(A)$. Tomemos $x_0 \in \operatorname{int}(A)$. Si $z = x_0$ no hay nada que probar. Supongamos entonces $z \neq x_0$. Como $z \in \operatorname{int}(\overline{A})$, existe $r > 0$ tal que $\mathbb{B}(z, r) \subset \overline{A}$. Consideremos el punto

$$w = z + \frac{r}{2} \frac{z - x_0}{\|z - x_0\|} \in \mathbb{B}(z, r) \subset \overline{A}.$$

Aplicando el Lema 1.1.3 concluímos que $[x_0, w) \subset \operatorname{int}(A)$ (aquí estamos usando la convexidad de A). Por otro lado, despejando z de la definición de w obtenemos $z = \lambda x_0 + (1-\lambda) w$ donde $\lambda = \frac{r}{r+2\|z-x_0\|} \in (0, 1)$, de donde $z \in (x_0, w) \subset [x_0, w) \subset \operatorname{int}(A)$. Esto prueba la primera igualdad de (5). En cuanto a la segunda, que $\overline{\operatorname{int}(A)} \subset \overline{A}$ es evidente (y no usa ninguna propiedad de A). Recíprocamente, supongamos que A es convexo con interior no vacío y tomemos $x_0 \in \operatorname{int}(A)$ como antes. Dado $z \in \overline{A}$, el Lema 1.1.3 y la convexidad de A implican que $[x_0, z) \subset \operatorname{int}(A)$. Por tanto, z es límite de puntos del interior de A, luego $z \in \overline{\operatorname{int}(A)}$. □

Nota 1.1.1 No es cierto que si $A \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado entonces $\operatorname{conv}(A)$ sea necesariamente cerrada. Como contraejemplo podemos considerar A como la unión de una recta r en $\mathbb{R}^2$ con un punto x_0 exterior a r; en este caso, $\operatorname{conv}(A)$ es la banda semiabierta bordeada por r y la recta paralela r' a r que pasa por x_0, unión con $\{x_0\}$ (Figura 1.3 izquierda).

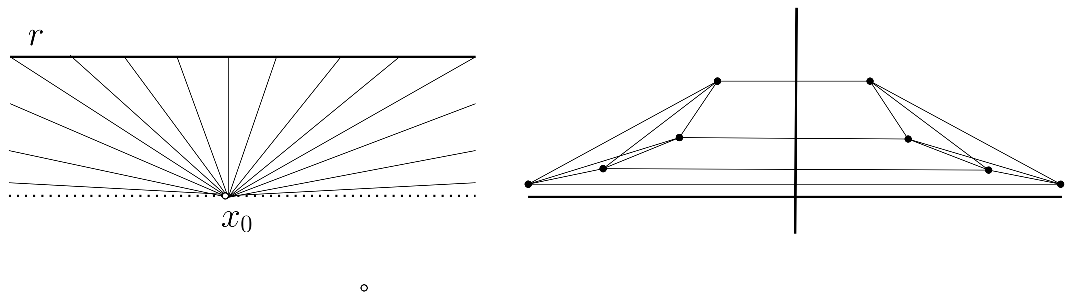


Figura 1.3: Aunque $A \subset \mathbb{R}^2$ sea cerrado, $\operatorname{conv}(A)$ no tiene porqué serlo.

Otro contraejemplo es el conjunto $A = \{(\pm n, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$, cerrado de $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, $\operatorname{conv}(A)$ no es cerrado ya que el eje de abscisas está en $\overline{\operatorname{conv}(A)} - \operatorname{conv}(A)$ (Figura 1.3 derecha).

1.2. Proyección sobre un conjunto convexo

Proposición 1.2.1 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, cerrado y convexo. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, existe un único $p_A(x) \in A$ que minimiza la distancia a x, i.e., tal que $d(x, p_A(x)) = d(x, A)$.*

Demostración. Veamos la existencia. Empezamos eligiendo $r > 0$ tal que $A \cap \overline{\mathbb{B}}(x, r)$ es un compacto no vacío. Consideramos la función distancia $d_x\colon A \cap \overline{\mathbb{B}}(x, r) \to [0, \infty)$, $d_x(z) = d(x, z)$. Como d_x es continua sobre el compacto $A \cap \overline{\mathbb{B}}(x, r)$, admitirá un mínimo $z \in A \cap \overline{\mathbb{B}}(x, r)$.

Este z es el punto $p_A(x)$ buscado: si $y \in A \cap \overline{\mathbb{B}}(x, r)$ entonces $d(x, y) = d_x(y) \geq d_x(z) = d(x, z)$. Y si $y \in A - \overline{\mathbb{B}}(x, r)$, entonces $d(x, y) > r \geq d(x, z)$. Por tanto, $\inf_{y \in A} d(x, y) \geq d(x, z)$, es decir, z minimiza la distancia de x a A. Notemos que no hemos usado que A es convexo.

Para la unicidad, supongamos que $z_1, z_2 \in A$ minimizan $d(x, A)$. Consideremos el punto medio z de $[z_1, z_2]$, que está en A por ser A convexo. Veamos que z también minimiza $d(x, A)$:

$$\langle z_1 - z_2, x - z \rangle = \langle z_1 - z_2, x - \frac{1}{2}(z_1 + z_2) \rangle = \frac{1}{2} \langle z_1 - z_2, 2x - z_1 - z_2 \rangle$$

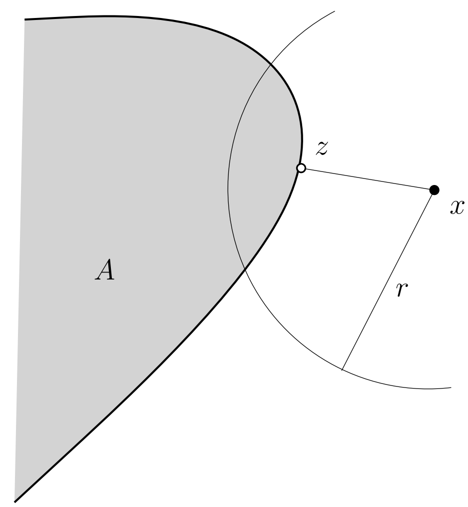


Figura 1.4: Encontrando $z = p_A(x)$.

Sustituyendo $z_1 - z_2 = (x - z_2) - (x - z_1)$ y $2x - z_1 - z_2 = (x - z_1) + (x - z_2)$ en la última expresión obtendremos $\langle z_1 - z_2, x - z \rangle = \frac{1}{2}\left(\|x - z_2\|^2 - \|x - z_1\|^2\right) = \frac{1}{2}(d(x, A)^2 - d(x, A)^2) = 0$. Esto nos dice que el triángulo $\overset{\triangle}{xzz_2}$ es rectángulo en el vértice z. Por el Teorema de Pitágoras,

$$\|x - z\|^2 \leq \|x - z\|^2 + \|z - z_2\|^2 = \|x - z_2\|^2 = d(x, A)^2.$$

Como $z \in A$, se da la igualdad en la cadena anterior, luego $z = z_2$ y por tanto $z_1 = z_2$. $\square$

Nota 1.2.1 El recíproco de la Proposición 1.2.1 es cierto, se conoce como Teorema de Bunt-Motzkin (1934-35): *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ cerrado tal que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, existe un único $a(x) \in A$ con $d(x, a(x)) = d(x, A)$. Entonces, A es convexo.* No probaremos (ni usaremos) este resultado, que puede encontrarse en el Teorema 1.2.4 de [2].

Definición 1.2.1 Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, cerrado y convexo. Se define la *proyección métrica sobre A, $p_A \colon \mathbb{R}^n \to A$*, como la aplicación que a cada $x \in \mathbb{R}^n$ le asocia el único $p_A(x) \in A$ tal que $d(x, p_A(x)) = d(x, A)$.

Proposición 1.2.2 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, cerrado y convexo.*

(1) *Si $x \in \mathbb{R}^n - A$, entonces $p_A(x) \in \partial A$.*

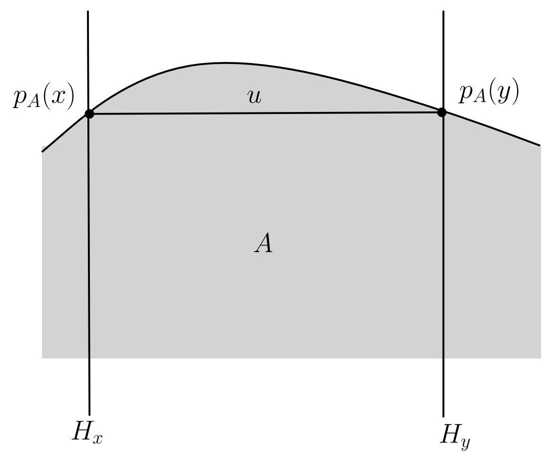
(2) *$x \in A$ si y sólo si $p_A(x) = x$.*

(3) *p_A es una aplicación contractiva, i.e. $d\,(p_A(x), p_A(y)) \leq d(x, y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (en particular, p_A es Lipschitziana).*

Demostración. Para el apartado (1), tomemos $x \in \mathbb{R}^n - A$. Si fuera $p_A(x) \in \text{int}(A)$, es claro que podríamos decrecer la distancia a x dentro de A (consideremos puntos dentro de una bola centrada en x contenida en A).

En cuanto al apartado (2), $p_A(x) = x \iff d(x, A) = d(x, x) = 0 \iff x \in \overline{A} = A$.

Veamos (3): tomemos $x, y \in \mathbb{R}^n$. Si $p_A(x) = p_A(y)$, no hay nada que probar. Así que supongamos que $p_A(x) \neq p_A(y)$. Sea $u = p_A(x) - p_A(y) \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$. Sean H_x, H_y los hiperplanos afines de $\mathbb{R}^n$ ortogonales a u que pasan por $p_A(x), p_A(y)$ respectivamente.

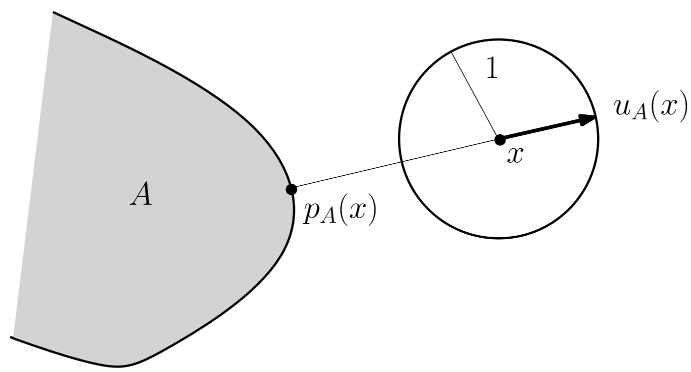


Sea B la banda abierta bordeada por $H_x \cup H_y$. Veamos que $x \notin B$: Si $x \in B$, consideremos el triángulo $\overset{\triangle}{p_A(x) x p_A(y)}$, que tiene ángulos agudos en $p_A(x)$ y en $p_A(y)$, luego x está a menor distancia a cierto punto del segmento $(p_A(x), p_A(y))$ que de sus extremos. Pero $(p_A(x), p_A(y)) \subset A$ por ser A convexo, lo que contradice la definición de $p_A(x)$. Esto nos dice que $x \notin B$, y razonando análogamente, $y \notin B$. Por tanto, $d(x, y) \geq d(H_x, H_y) = \|u\| = d(p_A(x), p_A(y))$. $\square$

Nuestro próximo objetivo es probar que la frontera de un compacto convexo con interior no vacío es homeomorfa a la esfera $(n-1)$-dimensional. Necesitaremos algo de notación y tres lemas previos.

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un cerrado convexo no vacío. Definimos

$$u_A \colon \mathbb{R}^n - A \to \mathbb{S}^{n-1}(1), \qquad u_A(x) = \frac{x - p_A(x)}{\|x - p_A(x)\|}. \tag{1.2}$$



Así, $u_A(x)$ es una 'especie' de normal unitario asociado a x en el punto $p_A(x) \in \partial A$:

También definimos la semirrecta 'normal' a ∂A en $p_A(x)$ exterior a A:

$$R_A(x) = \{p_A(x) + \lambda u_A(x) \mid \lambda \geq 0\}$$

Lema 1.2.1 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un cerrado convexo no vacío y $x \in \mathbb{R}^n - A$. Entonces, $p_A(y) = p_A(x)$ para todo $y \in R_A(x)$.*

Demostración. Tomemos $y \in R_A(x)$.

CASO I: $\underline{y \in [p_A(x), x]}$.

$$\begin{aligned} d(x, p_A(y)) &\leq d(x,y) + d(y, p_A(y)) \\ &\leq d(x,y) + d(y, p_A(x)) \quad \text{(porque } p_A(x) \in A \text{ y por def. de } p_A(y)\text{)} \\ &= d(x, p_A(x)) \quad \text{(porque } y \in [p_A(x), x]\text{).} \end{aligned}$$

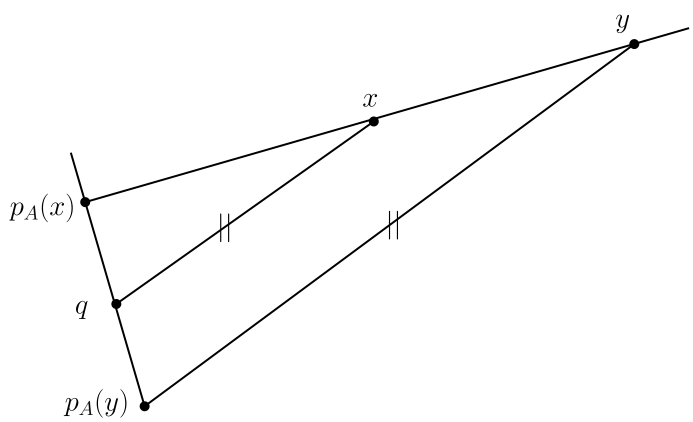
Aplicando la definición de $p_A(x)$, concluímos que $p_A(y) = p_A(x)$.

CASO II: $\underline{y \notin [p_A(x), x]}$ (luego $x \in [p_A(x), y]$).

Consideremos el segmento $[p_A(x), p_A(y)]$ (queremos ver que se reduce a un punto), que está contenido en A por ser A convexo. Tomemos el punto $q \in [p_A(x), p_A(y)]$ tal que la recta $\overline{qx}$ es paralela a la recta $\overline{p_A(y)y}$:

Por proporcionalidad, $\dfrac{d(y, p_A(x))}{d(x, p_A(x))} = \dfrac{d(y, p_A(y))}{d(x,q)}$ luego

$$\begin{aligned} d(x,q) &= d(x, p_A(x)) \frac{d(y, p_A(y))}{d(y, p_A(x))} \\ &\leq d(x, p_A(x)) \quad \text{(por def. de } p_A(y)\text{).} \end{aligned}$$



Pero $q \in A$ por ser A convexo, luego la igualdad debe darse en la última desigualdad. Esto implica que $d(y, p_A(y)) = d(y, p_A(x))$. Por tanto, $p_A(y) = p_A(x)$ (por definición de $p_A(y)$).

□

Lema 1.2.2 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un cerrado convexo no vacío, y $\mathbb{S} = \mathbb{S}^{n-1}(p,r)$ una esfera en $\mathbb{R}^n$ tal que $A \subset \mathbb{B}(p,r)$ (en particular, A es compacto). Entonces, $p_A(\mathbb{S}) = \partial A$.*

Demostración. Sabemos que $p_A(\mathbb{R}^n - A) \subset \partial A$. Como $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n - A$, tenemos $p_A(\mathbb{S}) \subset \partial A$. Recíprocamente, sea $x \in \partial A$. Tomemos una sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{B}(p,r) - A$ tal que $d(x_i, x) < \frac{1}{i}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Así,

$$\begin{array}{rcll} d(p_A(x_i), x) & = & d(p_A(x_i), p_A(x)) & (x = p_A(x) \text{ porque } x \in A) \\ & \leq & d(x_i, x) & (\text{por ser } p_A \text{ contractiva}) \\ & < & 1/i, & \end{array}$$

y por tanto $p_A(x_i)$ converge a x cuando $i \to \infty$. Ahora consideremos para cada $i \in \mathbb{N}$ la semirrecta $R_A(x_i)$, que tiene sentido porque $x_i \notin A$. Llamemos z_i al único punto de $R_A(x_i) \cap \mathbb{S}$. Como $\mathbb{S}$ es compacta, tras pasar a una parcial podemos suponer que $\{z_i\}_i$ converge a un punto $z \in \mathbb{S}$. Por último,

$$\begin{array}{rcll} p_A(z) & = & p_A\left(\lim_{i\to\infty} z_i\right) = \lim_{i\to\infty} p_A(z_i) & (\text{por ser } p_A \text{ continua}) \\ & = & \lim_{i\to\infty} p_A(x_i) & (\text{por el Lema 1.2.1}) \\ & = & x. & \end{array}$$

□

Lema 1.2.3 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un cerrado convexo y $z \in \operatorname{int}(A)$. Si R es una semirrecta que parte de z, entonces R no puede cortar a ∂A en más de un punto.*

Demostración. Supongamos que R corta a ∂A en dos puntos x, y distintos. Entonces, uno de estos dos puntos, digamos x, es interior al segmento $[z, y]$. Como $z \in \operatorname{int}(A)$, existe $\rho > 0$ tal que $\mathbb{B}(z, \rho) \subset A$. Por convexidad de A, para todo $w \in \mathbb{B}(z, \rho)$ el segmento $[w, y]$ está contenido en A. Pero $\cup_{w \in \mathbb{B}(z,\rho)}[w, y]$ es un entorno de x, luego x admite un entorno contenido en A. Esto contradice que $x \in \partial A$. □

Teorema 1.2.1 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un compacto convexo con interior no vacío. Entonces, ∂A es homeomorfa a $\mathbb{S}^{n-1}$.*

Demostración. Tomemos un punto $x_0 \in \operatorname{int}(A)$. Así, existe $r > 0$ tal que $\overline{\mathbb{B}}(x_0, r) \subset \operatorname{int}(A)$. Sea $\overline{\mathbb{B}} = \overline{\mathbb{B}}(x_0, r)$ y $\mathbb{S} = \partial\overline{\mathbb{B}}$. Como $\overline{\mathbb{B}}$ es cerrado y convexo, tiene sentido la proyección métrica $p_{\overline{\mathbb{B}}} \colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{B}}$. Por el apartado (1) de la Proposición 1.2.2, $p_{\overline{\mathbb{B}}}(x) \in \mathbb{S}\ \forall x \in \mathbb{R}^n - \overline{\mathbb{B}}$. Como $\partial A \subset \mathbb{R}^n - \overline{\mathbb{B}}$, tenemos $p_{\overline{\mathbb{B}}}(\partial A) \subset \mathbb{S}$. Esto nos permite considerar la restricción

$$F = \left(p_{\overline{\mathbb{B}}}\right)|_{\partial A} \colon \partial A \to \mathbb{S}. \tag{1.3}$$

El teorema estará probado si vemos que la siguiente propiedad es cierta:

Afirmación 1.2.1 *F es un homeomorfismo.*

Demostración de la afirmación. F es continua, por ser restricción de $p_{\overline{\mathbb{B}}}$, que era Lispchitziana. F es cerrada, por ir de un compacto a un espacio Hausdorff. Por tanto, F será un homeomorfismo si vemos que F es biyectiva.

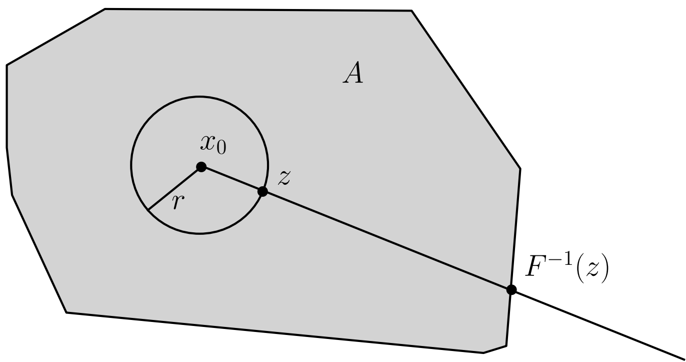
F ES SOBREYECTIVA. Sea $z \in \mathbb{S}$. Tomemos una sucesión $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{int}(A) - \overline{\mathbb{B}}$ convergiendo a z y consideremos la semirrecta $R_{\overline{\mathbb{B}}}(z_i)$, para cada $i \in \mathbb{N}$. $R_{\overline{\mathbb{B}}}(z_i)$ corta a ∂A en al menos un punto w_i (porque la semirrecta $R_{\overline{\mathbb{B}}}(z_i)$ empieza en $z_i \in \operatorname{int}(A)$ y es no acotada, mientras que A sí es acotado). Por el Lema 1.2.3, $R_{\overline{\mathbb{B}}}(z_i) \cap \partial A$ se reduce al punto w_i. Como $\{w_i\}_i$ es una sucesión en el compacto ∂A, tras pasar a una parcial podemos suponer que $\{w_i\}_i$ converge a un punto $w \in \partial A$. Por último,

$$\begin{aligned}
p_{\overline{\mathbb{B}}}(w) &= p_{\overline{\mathbb{B}}}\left(\operatorname{lím}_{i\to\infty} w_i\right) = \operatorname{lím}_{i\to\infty} p_{\overline{\mathbb{B}}}(w_i) \\
&= \operatorname{lím}_{i\to\infty} p_{\overline{B}}(z_i) && \text{(por el Lema 1.2.1)} \\
&= p_{\overline{\mathbb{B}}}\left(\operatorname{lím}_{i\to\infty} z_i\right) \\
&= p_{\overline{\mathbb{B}}}(z) \\
&= z && \text{(porque } z \in \mathbb{S} = \partial\mathbb{B}\text{)}
\end{aligned}$$

F ES INYECTIVA. Supongamos que $a, b \in \partial A$ cumplen $p_{\overline{\mathbb{B}}}(a) = p_{\overline{\mathbb{B}}}(b)$. Esto nos dice que a, b están sobre la misma semirrecta $R_{\overline{\mathbb{B}}}(a) = R_{\overline{\mathbb{B}}}(b)$. Esto contradice el Lema 1.2.3.

□

Nota 1.2.2 En la Afirmación 1.2.1 se ha visto que si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un compacto convexo con interior no vacío, y $\overline{\mathbb{B}} = \overline{\mathbb{B}}(x_0, r)$ es una bola cerrada contenida en $\text{int}(A)$, entonces la aplicación $F = \left(p_{\overline{\mathbb{B}}}\right)|_{\partial A} \colon \partial A \to \mathbb{S} = \partial\overline{\mathbb{B}}$ es un homeomorfismo. La inversa de F es la aplicación que a cada $z \in \mathbb{S}$ le asocia el *único* punto de ∂A obtenido al cortar la semirrecta $\{x_0 + \lambda(z - x_0) \mid \lambda \geq 0\}$ con ∂A.



Corolario 1.2.1 *Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un compacto convexo con interior no vacío, entonces A es homeomorfo a una bola cerrada n-dimensional.*

Demostración. Tomemos una bola cerrada $\overline{\mathbb{B}} = \overline{\mathbb{B}}(x_0, r)$ contenida en $\text{int}(A)$. Sea $\phi = F^{-1} \colon \mathbb{S} = \partial\mathbb{B} \to \partial A$ la aplicación inversa de $F = \left(p_{\overline{\mathbb{B}}}\right)|_{\partial A}$. Construímos ahora una aplicación $\Phi \colon \overline{\mathbb{B}} \to A$ de manera que $\forall z \in \mathbb{S}$, el segmento $[x_0, z]$ se transforme linealmente en el segmento $[x_0, \phi(z)]$. Esto significa que debe cumplirse que $\forall x \in \overline{\mathbb{B}} - \{x_0\}$,

$$\frac{\|x - x_0\|}{r} = \frac{\|\Phi(x) - x_0\|}{\|\phi(z) - x_0\|}, \quad \text{donde } z = r\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}. \tag{1.4}$$

Por tanto, debemos definir

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= x_0 + \|\Phi(x) - x_0\| \tfrac{z - x_0}{\|z - x_0\|} \\ &= x_0 + \tfrac{\|\phi(z) - x_0\|}{r} \|x - x_0\| \tfrac{z - x_0}{\|z - x_0\|} \quad &\text{(por la ecuación (1.4))} \\ &= x_0 + \tfrac{\|\phi(z) - x_0\|}{r}(x - x_0) \quad &\text{(el normalizado de } z - x_0 \text{ coincide con el de } x - x_0\text{),} \end{aligned}$$

es decir, definimos

$$\Phi(x) = \begin{cases} x_0 + \dfrac{\left\|\phi\left(r\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}\right) - x_0\right\|}{r}(x - x_0) & \text{si } x \in \overline{\mathbb{B}} - \{x_0\}, \\ x_0 & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

Es fácil comprobar que $\Phi\colon \overline{\mathbb{B}} \to A$ es un homeomorfismo. $\square$

1.3. Dimensión de un conjunto convexo

Definición 1.3.1 Dado $A \subset \mathbb{R}^n$, denotaremos por $\text{aff}(A)$ al menor subespacio afín de $\mathbb{R}^n$ que contenga a A. La dimensión de A es por definición

$$\dim A = \dim \text{aff}(A).$$

En la situación anterior, tomemos puntos $x_0, \ldots, x_k \in A$ afínmente independientes. Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ el subespacio afín generado por $x_0, \ldots, x_k$. Entonces, $V \subset \text{aff}(A)$. Claramente, $\text{aff}(A)$ se obtiene tomando la *mayor* cantidad de puntos posible en A afínmente independientes, es decir, si $x_0, \ldots, x_k \in A$ es un conjunto *maximal* de puntos afínmente independientes, entonces

$$\begin{aligned}
\text{aff}(A) &= \left\{ x_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (x_i - x_0) \mid \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, k \right\} \\
&= \left\{ \left(1 - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right) x_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \mid \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, k \right\} \quad \left(\text{llamo} \begin{cases} \lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \\ \lambda_i = \alpha_i \ \forall i \geq 1 \end{cases} \right) \\
&= \left\{ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i x_i \mid \lambda_0, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}, \ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1 \right\}.
\end{aligned}$$

En particular, $\text{conv}(A) \subset \text{aff}(A)$. En la situación anterior, $\dim A = \dim \text{aff}(A) = k$ y dado $x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i x_i$ con $\lambda_0, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$, a $(\lambda_0, \ldots, \lambda_k)$ se les llama *coordenadas afines*[2] de x respecto a $x_0, \ldots, x_k$.

También definimos el *interior relativo* de A como

$$\text{rel int}(A) = \text{int}(A)^{\text{aff}(A)},$$

y la *frontera relativa* de A como

$$\text{rel fr}(A) = \text{fr}(A)^{\text{aff}(A)}$$

(ambos se refieren a la topología inducida en $\text{aff}(A)$). Nótese que la clausura relativa de A sería $\overline{A}^{\text{aff}(A)} = \overline{A} \cap \text{aff}(A) = \overline{A}$, siendo esta última igualdad cierta porque $\text{aff}(A)$ es cerrado de $\mathbb{R}^n$. Así que no usaremos la clausura relativa de A por coincidir con la clausura de A en $\mathbb{R}^n$.

[2] Como $x_0, \ldots, x_k$ son puntos afínmente independientes, los vectores $\{x_i - x_0 \mid i = 1, \ldots, k\}$ son linealmente independientes, luego los escalares α_i tales que $x = x_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (x_i - x_0)$ son únicos. De aquí deducimos que las coordenadas afines $(\lambda_0, \ldots, \lambda_k)$ también son únicas.

Proposición 1.3.1 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un convexo no vacío. Entonces,* rel int$(A) \neq \emptyset$.

Demostración. Sea $x_0, \ldots, x_k \in A$ puntos afínmente independientes que generan aff(A). Así, $\forall x \in \text{aff}(A)$ existen únicos $\lambda_0, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ con $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$ y $x = \sum_{i=0}^k \lambda_i x_i$. Además, $\lambda_i = \lambda_i(x)$ es función *continua* de x (se obtiene resolviendo un sistema de ecuaciones lineales). Consideremos el punto $c = \frac{1}{k+1}(x_0 + \ldots + x_k) \in \text{aff}(A)$, obtenido tomando $\lambda_0 = \ldots = \lambda_k = \frac{1}{k+1}$. Salvo una transformación afín de aff$(A) \equiv \mathbb{R}^k$, podemos suponer que $x_0, \ldots, x_k$ forman los vértices de un poliedro regular cuyo baricentro en c (es decir, los puntos x_i equidistan entre ellos y están en una $(k-1)$-esfera centrada en c). De aquí es fácil deducir que existe $\rho > 0$ tal que $\mathbb{B}^k(c, \rho) \subset \text{conv}(\{x_1, \ldots, x_k\})$. Deshaciendo la transformación afín, concluimos que existe $\rho_1 > 0$ tal que $\mathbb{B}^k(c, \rho_1) \subset \{\sum_{i=0}^k \mu_i x_i \mid \mu_i \geq 0, \sum_{i=0}^k \mu_i = 1\}$. Ahora consideramos la bola n-dimensional $\mathbb{B}^n(c, \rho_1)$ en $\mathbb{R}^n$, que cumple $\mathbb{B}^n(c, \rho_1) \cap \text{aff}(A) \subset A$, luego $c \in$ rel int(A). $\square$

La misma idea de la última demostración prueba que

Proposición 1.3.2 *Si $x_0, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ son puntos afínmente independientes, entonces*

$$\text{rel int}\left[\text{conv}\left(\{x_0, \ldots, x_k\}\right)\right] = \left\{ \sum_{i=0}^k \lambda_i x_i \mid \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1,\ \lambda_i > 0\ \forall i \right\}.$$

1.4. Hiperplanos soporte

Dado $H \subset \mathbb{R}^n$ un hiperplano, denotaremos por H^+, H^- a los dos semiespacios *cerrados* cuyo borde es H.

Definición 1.4.1 Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ y $x_0 \in A$, un hiperplano $H \subset \mathbb{R}^n$ se dice *hiperplano soporte de A en x_0* si cumple

(a) $x_0 \in A \cap H$.

(b) $A \subset H^+$ ó $A \subset H^-$ (si $A \subset H^+$ decimos que H^+ es un *semiespacio soporte* de A en x_0; análogamente si $A \subset H^-$).

Notemos que si existe un hiperplano soporte H de A en $x_0 \in A$, entonces $x_0 \notin \text{int}(A)$ (la condición (b) anterior es imposible si existe una bola centrada en x_0 contenida en A). Por tanto, $x_0 \in A - \text{int}(A) \subset \partial A$. Tampoco es posible esperar unicidad del hiperplano soporte: por ejemplo, si A es un triángulo en $\mathbb{R}^2$, el hiperplano soporte de S en cualquiera de sus vertices no es único. ¿Bajo qué condiciones existe siempre un hiperplano soporte $\forall x_0 \in \partial A$?

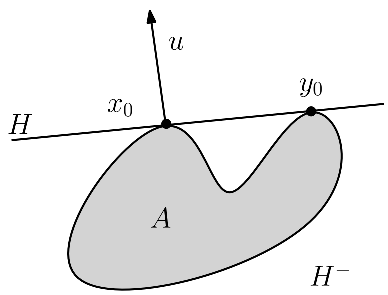


Figura 1.5: H es hiperplano soporte de A en los puntos x_0, y_0. u es un vector normal exterior a A en ambos puntos.

Supongamos que H es un hiperplano soporte de A en $x_0 \in \partial A$, con $A \subset H^-$. Siempre podremos escribir H, H^- como

$$H = H_{u,\alpha} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u\rangle = \alpha\}, \quad H^- = H^-_{u,\alpha} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u\rangle \leq \alpha\}$$

para ciertos $u \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Como $A \subset H^-$, diremos que u es un *vector normal exterior* a A en x_0 (u no tiene porqué ser único, como tampoco lo es el hiperplano soporte a A en x_0 caso de existir).

Lema 1.4.1 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un cerrado convexo no vacío. Consideremos la proyección métrica $p_A \colon \mathbb{R}^n \to A$ y la aplicación $u_A \colon \mathbb{R}^n - A \to \mathbb{S}^{n-1}(1)$ definida en (1.2). Entonces, dado $x \in \mathbb{R}^n - A$ el hiperplano $H = p_A(x) + \langle u_A(x)\rangle^\perp$ es un hiperplano soporte de A en $p_A(x)$, y $u_A(x)$ es un vector normal exterior a A en $p_A(x)$.*

Demostración. Sólo queda comprobar que $A \subset H^- = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y - p_A(x), u_A(x)\rangle \leq 0\}$. Por reducción al absurdo, supongamos que existe $z \in A$ tal que $\langle z - p_A(x), u_A(x)\rangle > 0$. Consideremos el punto $z_t = p_A(x) + t(z - p_A(x))$ que está en A para cada $t \in [0,1]$ por convexidad de A, y la función $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = \|z_t - x\|^2 = \|p_A(x) - x\|^2 + 2t\langle p_A(x) - x, z - p_A(x)\rangle + t^2\|z - p_A(x)\|$$

(polinómica de grado 2, luego de clase C^∞). Así,

$$f'(0) = 2\langle p_A(x) - x, z - p_A(x)\rangle = -2\|x - p_A(x)\|\langle u_A(x), z - p_A(x)\rangle < 0.$$

Por tanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(t) < f(0)$ para cada $t \in (0, \varepsilon)$. Esto es, $d(z_t, x) < d(p_A(x), x)$ para cada $t \in (0, \varepsilon)$, lo que contradice la definición de $p_A(x)$. $\square$

Corolario 1.4.1 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un cerrado convexo no vacío. Entonces, A es la intersección de todos sus semiespacios soporte.*

Demostración. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de los semiespacios soporte de A. Así, $A \subset S\ \forall S \in \mathcal{S}$, luego $A \subset \cap_{S\in\mathcal{S}} S$. Y existiera $x \in (\cap_{S\in\mathcal{S}} S) - A$, entonces $p_A(x) + \langle u_A(x)\rangle^\perp$ sería un hiperplano soporte de A que no pasa por x, luego el semiespacio soporte de A en $p_A(x)$ no contendría a x, contradicción. □

Asociados a cada hiperplano soporte tenemos el punto base y el vector normal exterior. Nos preguntamos ahora por la existencia de hiperplanos soporte con cualquiera de estos datos prefijados.

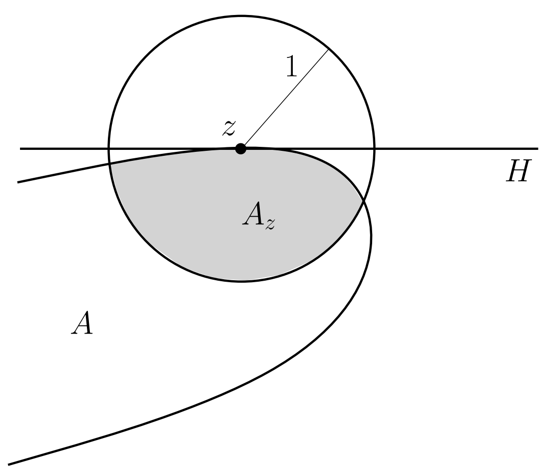
Teorema 1.4.1 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un cerrado no vacío.*

(1) Si A es convexo, dado $z \in \partial A$, existe un hiperplano soporte de A en z.

(2) Si A es acotado, dado $u \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ existe un hiperplano soporte de A con vector normal exterior u.

Demostración. Veamos el apartado (1). Empezaremos suponiendo que A es acotado. Por tanto, existe $R > 0$ tal que $A \subset \mathbb{B}(\vec{0}, R)$. Por el Lema 1.2.2, $p_A(\mathbb{S}) = \partial A$ donde $\mathbb{S} = \mathbb{S}^{n-1}(\vec{0}, R)$. Por tanto dado $z \in \partial A$, existe $x \in \mathbb{S}$ tal que $p_A(x) = z$. Como $x \in \mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n - A$, el Lema 1.4.1 asegura que $H = p_A(x) + \langle u_A(x)\rangle^\perp$ es un hiperplano soporte de A en $p_A(x) = z$.

Ahora probaremos el apartado (1) en el case de que A no sea acotado. Tomemos $z \in \partial A$ y consideremos el conjunto cerrado, acotado y convexo $A_z = A \cap \overline{\mathbb{B}}(z, 1)$.



Como $z \in \partial A_z$, el párrafo anterior garantiza que existe un hiperplano H soporte de A_z en z. Queda probar que H es también hiperplano soporte de A en z. Sea H^- el semiespacio cerrado bordeado por H que contiene a A_z. Si existiera $y \in A - H^-$, entonces $(z, y]$ estaría contenido en $\mathbb{R}^n - H^-$. Como z, y están en el convexo A, entonces $[z, y] \subset A$, luego $(z, y] \cap [A \cap \mathbb{B}(z, 1)] \neq \emptyset$. Esto contradice que $(z, y] \subset \mathbb{R}^n - H^-$ y $A_z \subset H^-$.

En cuanto al apartado (2), sea $u \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$. Consideremos la función altura $f_u \colon A \to \mathbb{R}$, $f_A(x) = \langle x, u \rangle$. Como A es compacto (es cerrado y acotado) y f_u es continua, f_u admite un máximo absoluto $x_0 \in A$. Esto nos dice que $A \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u \rangle \leq f_u(x_0)\} = H^-_{u, f_u(x_0)}$, de donde $H_{u, f_u(x_0)}$ es un hiperplano soporte de A en x_0 con vector normal exterior u. □

Nota 1.4.1 (a) El apartado (1) del Teorema 1.4.1 sigue siendo cierto si A está contenido en un hiperplano H de $\mathbb{R}^n$, independientemente de que A sea convexo o no: es este caso, H es un hiperplano soporte de A en cada $x_0 \in A = \partial A$.

(b) El apartado (2) del Teorema 1.4.1 no es cierto si eliminamos la hipótesis de acotación sobre A. Por ejemplo, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$ es convexo, cerrado, no acotado, y el conjunto de los vectores $u \in \mathbb{S}^1(1)$ para los que existe un hiperplano (recta) soporte de A con vector normal exterior u es $\mathbb{S}^1_- = \{u \in \mathbb{S}^1(1) \mid u_2 < 0\}$, donde $u = (u_1, u_2)$.

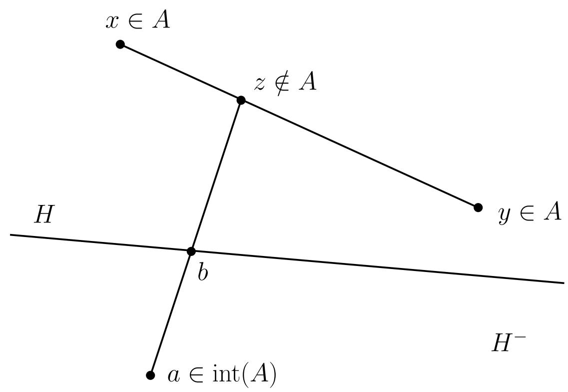
A continuación veremos el recíproco del apartado (1) del Teorema 1.4.1.

Teorema 1.4.2 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un cerrado con interior no vacío, tal que para cada $x_0 \in \partial A$ existe un hiperplano soporte de A en x_0. Entonces, A es convexo.*

Nota 1.4.2 Si eliminamos la hipótesis $\text{int}(A) \neq \emptyset$ del Teorema 1.4.2, éste ya no es cierto: basta considerar un subconjunto no convexo A contenido en un hiperplano de $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que A no es convexo. Así, existen $x, y \in A$ y $z \in [x, y] - A$. Tomemos un punto $a \in \text{int}(A)$. Como los extremos del segmento $[a, z]$ cumplen $a \in \text{int}(A)$, $z \notin A$, entonces existe $b \in (a, z) \cap \partial A$. Por hipótesis existe un hiperplano H soporte de A en b. Sea H^- el semiespacio determinado por H que contiene a A.

Como $a \in \text{int}(A)$, tenemos $a \notin H$ luego $a \in H^- - H$. Como $b \in H$, deducimos que la recta que pasa por a y b corta *transversalmente* a H. Por tanto, $z \notin H^-$. Por último, $x, y \in A \subset H^-$ y H^- es convexo, luego $[x, y] \subset H^-$, lo que contradice que $z \notin H^-$. □



1.5. Separación

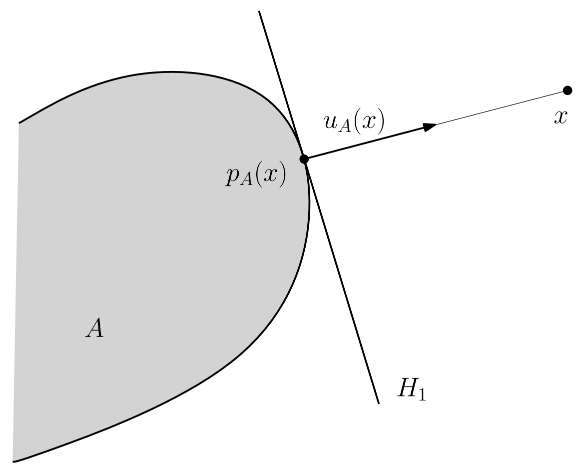
Definición 1.5.1 Diremos que un hiperplano $H \subset \mathbb{R}^n$ *separa* dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ si $A \subset H^+$ y $B \subset H^-$, donde H^+, H^- son los semiespacios *cerrados* determinados por H.
H separa *estrictamente* A y B si $A \subset \mathrm{int}(H^+)$ y $B \subset \mathrm{int}(H^-)$.
H separa *fuertemente* A y B si existe $\varepsilon > 0$ tal que $A \subset H^+_{u,\alpha+\varepsilon}$ y $B \subset H^-_{u,\alpha-\varepsilon}$, donde $H = H_{u,\alpha} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u\rangle = \alpha\}$.

Teorema 1.5.1 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un convexo no vacío, y $x \in \mathbb{R}^n - A$. Entonces, A y $\{x\}$ pueden separarse por un hiperplano. Si además A es cerrado, entonces A y $\{x\}$ pueden separarse fuertemente por un hiperplano.*

Demostración. Empezaremos suponiendo que A es cerrado (y convexo). En este caso, tiene sentido la proyección métrica $p_A : \mathbb{R}^n \to A$ y la aplicación $u_A : \mathbb{R}^n - A \to \mathbb{S}^{n-1}(1)$ definida en (1.2). En la demostración del Lema 1.4.1 vimos que si llamamos $H_1 = p_A(x) + \langle u_A(x)\rangle^\perp$, entonces H_1 es un hiperplano soporte de A en $p_A(x)$ con vector normal exterior $u_A(x)$ a A en $p_A(x)$, y que $A \subset H_1^- = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y - p_A(x), u_A(x)\rangle \leq 0\}$.

Como $x \in \mathbb{R}^n - A$ y A es cerrado, tenemos $d(x, A) > 0$. Por tanto, el hiperplano $H = \frac{1}{2}(x + p_A(x)) + \langle u_A(x)\rangle^\perp$ separa fuertemente A y $\{x\}$, tomando $\varepsilon = \frac{d(x,A)}{2}$ en la Definición 1.5.1.

Supongamos ahora que A es un convexo no necesariamente cerrado. Si $x \notin \overline{A}$, entonces $d(x, A) > 0$ y el argumento anterior aplicado al convexo cerrado $\overline{A}$ prueba que H separa fuertemente A y $\{x\}$. Queda estudiar el caso $x \in \partial A$. Aplicando el apartado (1) del Teorema 1.4.1 al convexo cerrado $\overline{A}$ y al punto $x \in \partial\overline{A} = \partial A$, deducimos que existe un hiperplano soporte H_2 de $\overline{A}$ en x. Por definición de hiperplano soporte, tenemos $x \in \overline{A} \cap H_2$ y $\overline{A} \subset H_2^-$ (salvo orientación), luego H_2 separa A de $\{x\}$. □



Nuestro siguiente objetivo será generalizar el Teorema 1.5.1 para separar fuertemente no un cerrado convexo de un punto fuera de éste, sino un cerrado convexo de otro convexo compacto disjunto con el primero. Necesitaremos dos lemas previos.

Lema 1.5.1 *Sean A, B dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}^n$.*

(a) *A y B pueden separarse por un hiperplano si y sólo si $A - B$ y $\{\vec{0}\}$ pueden separarse por un hiperplano.*

(b) *A y B pueden separarse fuertemente por un hiperplano si y sólo si $A-B$ y $\{\vec{0}\}$ pueden separarse fuertemente por un hiperplano.*

Nota 1.5.1 *El lema no es cierto para separación estricta: tomemos en $\mathbb{R}^2$ los subconjuntos (convexos) $A = \{(x, y) \mid x > 0, y \geq 1/x\}$, $B = \{(x, 0) \mid x > 0, y \leq -1/x\}$. Así, el eje x separa estrictamente A y B. Sin embargo, $A - B$ no puede separarse estrictamente de $\vec{0}$ porque $\vec{0} \in \overline{A - B}$. Para comprobar esto, consideremos las sucesiones $p_n = (n, 1/n) \in A$, $q_n = (n, -1/n) \in B$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces, $p_n - q_n = (0, 2/n) \in A - B$ tiende a $\vec{0}$ cuando $n \to \infty$.*

Demostración. Probaremos (a) y (b) a la vez: basta tomar en lo que sigue $\varepsilon > 0$ para (b) y $\varepsilon = 0$ para (a).

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que existen $u \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon \geq 0$ tales que $A \subset H^-_{u,\alpha-\varepsilon}$ y $B \subset H^+_{u,\alpha+\varepsilon}$. Dado $x \in A - B$, existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $x = a - b$. Como $\langle a, u\rangle \leq \alpha - \varepsilon$ y $\langle b, u\rangle \geq \alpha + \varepsilon$, entonces $\langle x, u\rangle \leq -2\varepsilon$.

Si $\varepsilon = 0$, lo anterior nos dice que $A-B \subset H^-_{u,0}$. Como $\vec{0} \in H^+_{u,0}$, concluímos que $A-B$, $\vec{0}$ pueden separarse por $H_{u,0}$.

Si $\varepsilon > 0$, deducimos que $A - B \subset H^-_{u,\alpha-\varepsilon}$ donde $\alpha = -\varepsilon$. Como $\vec{0} \in H^+_{u,0} = H^+_{u,\alpha+\varepsilon}$, concluímos que $A - B$, $\vec{0}$ pueden separarse fuertemente por $H_{u,-\varepsilon}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que existen $u \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$, $\overline{\alpha} \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon \geq 0$ tales que $A - B \subset H^-_{u,\overline{\alpha}-\varepsilon}$ y $\vec{0} \in H^+_{u,\overline{\alpha}+\varepsilon}$. Por tanto,

$$\langle a, u\rangle - \langle b, u\rangle \leq \overline{\alpha} - \varepsilon, \quad \forall a \in A,\ b \in B. \tag{1.5}$$

Tomando supremo en A, $(\sup_{a\in A}\langle a, u\rangle) - \langle b, u\rangle \leq \overline{\alpha} - \varepsilon$, luego existe $\alpha := \sup_{a\in A}\langle a, u\rangle \in \mathbb{R}$. Tomando ínfimo en B en (1.5), obtenemos $\langle a, u\rangle - (\text{ínf}_{b\in B}\langle b, u\rangle) \leq \overline{\alpha} - \varepsilon$, luego existe $\beta := \text{ínf}_{b\in B}\langle b, u\rangle \in \mathbb{R}$, y además

$$\alpha - \beta \leq \overline{\alpha} - \varepsilon. \tag{1.6}$$

Por otro lado, como $\vec{0} \in H^+_{u,\overline{\alpha}+\varepsilon}$ entonces

$$0 = \langle \vec{0}, u\rangle \geq \overline{\alpha} + \varepsilon. \tag{1.7}$$

Finalmente, dados $a \in A, b \in B$,

$$\langle a, u\rangle \leq \alpha = (\alpha - \beta) + \beta \overset{(1.6)}{\leq} (\overline{\alpha} - \varepsilon) + \beta = (\overline{\alpha} + \varepsilon) - 2\varepsilon + \beta \overset{(1.7)}{\leq} -2\varepsilon + \beta \overset{(\star)}{\leq} \beta \leq \langle b, u\rangle.$$

Por tanto, si $\varepsilon = 0$ entonces A y B pueden separarse por un hiperplano, mientras que si $\varepsilon > 0$, $(\star)$ nos asegura que A y B pueden separarse fuertemente por un hiperplano. □

Lema 1.5.2 *Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$.*

(a) *Si A, B son convexos, entonces $A - B$ es convexo.*

(b) *Si A es compacto y B cerrado, entonces $A - B$ es cerrado.*

(c) *$A \cap B = \emptyset$ si y sólo si $\vec{0} \notin A - B$.*

Demostración. Para (a), como B es convexo, $-B$ también lo es (apartado (3) de la Proposición 1.1.1). Como A y $-B$ son convexos, $A - B = A + (-B)$ también lo es (apartado (3) de la Proposición 1.1.1).

Veamos (b). Dado $x \in \overline{A - B}$, existen $\{a_n\}_n \subset A$, $\{b_n\}_n \subset B$ tales que $a_n - b_n$ converge a x cuando $n \to \infty$. Como A es compacto, tras pasar a una parcial podemos suponer que $\{a_n\}_n$ converge a un elemento $a \in A$. Así, $\{b_n\}_n$ converge y su límite es $a - x$. Como $b_n \in B$ y B es cerrado, $a - x \in B$. Esto nos dice que $x = a - (a - x) \in A - B$, luego $A - B$ es cerrado.

(c) es evidente. □

Ya podemos probar el resultado que buscábamos.

Teorema 1.5.2 *Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ convexos, no vacíos, disjuntos, con A compacto y B cerrado. Entonces, A y B pueden separarse fuertemente por un hiperplano.*

Demostración. Como A, B son convexos, A compacto y B cerrado, y $A \cap B = \emptyset$, el Lema 1.5.2 asegura que $\vec{0} \notin A - B$ (apartado (c)), $A - B$ es cerrado (apartado (b)), y $A - B$ es convexo (apartado (a)). Aplicando a $A - B$ y a $\vec{0}$ el Teorema 1.5.1 tendremos que $A - B$, $\{\vec{0}\}$ pueden separarse fuertemente por un hiperplano. Finalmente, el Lema 1.5.1 implica que A, B pueden separarse fuertemente por un hiperplano. $\square$

Nota 1.5.2 Si eliminamos la hipótesis de compacidad sobre A, el Teorema 1.5.2 ya no es cierto: basta considerar el mismo par de conjuntos A, B de la Nota 1.5.1, que no pueden separarse fuertemente ($d(A, B) = 0$) pero A, B cumplen las demás hipótesis del Teorema 1.5.2.

1.6. Envolvente convexa

Recordemos que la envolvente convexa de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es la intersección de todos los conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ que contienen a A (apartado (2) de la Proposición 1.1.2). Vamos a refinar este resultado tomando una intersección en una familia menor (a cambio, debemos imponer que A sea compacto).

Teorema 1.6.1 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un compacto no vacío. Entonces, la envolvente convexa de A es la intersección de todos los semiespacios cerrados de $\mathbb{R}^n$ que contienen a A.*

Demostración. Llamemos $\mathcal{S}$ a la familia de todos los semiespacios cerrados de $\mathbb{R}^n$ que contienen a A; $\mathcal{S}$ es no vacía, ya que A es acotado por ser compacto. Dado $S \in \mathcal{S}$, tenemos $A \subset S$ luego $\mathrm{conv}(A) \subset \mathrm{conv}(S) = S$, y por tanto $\mathrm{conv}(A) \subset \cap_{S \in \mathcal{S}} S$. Recíprocamente, tomemos un punto $x \in \mathbb{R}^n - \mathrm{conv}(A)$ y veamos que existe $S \in \mathcal{S}$ tal que $x \notin S$. Como A es compacto, el apartado (4) de la Proposición 1.1.3 asegura que $\mathrm{conv}(A)$ es compacta. Aplicando el Teorema 1.5.2 al convexo compacto $\mathrm{conv}(A)$ y al cerrado $\{x\}$ podremos separar fuertemente $\mathrm{conv}(A)$ y $\{x\}$ por un hiperplano, lo que termina la demostración. $\square$

Recordemos que dado $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$, el *diámetro* de A se define como $\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\} \in [0, \infty]$. Así,

- A es acotado si y sólo si $\mathrm{diam}(A) < \infty$.
- Si $\mathrm{diam}(A) < r < \infty$, entonces cualquier bola abierta de radio r centrada en un punto de A contiene a A.

El diámetro es claramente no decreciente respecto a la inclusión. Sin embargo, el diámetro no crece al tomar envolvente convexa:

Teorema 1.6.2 *Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es no vacío, entonces* diam(A) =diam (conv(A)).

Demostración. Como $A \subset \text{conv}(A)$, entonces $\text{diam}(A) \leq \text{diam}\,(\text{conv}(A))$. Para otra desigualdad, primero notemos que si A es no acotado, entonces $\text{diam}(A) = \infty$ y $\text{conv}(A)$ también es no acotado por contener a A, luego también $\text{diam}\,(\text{conv}(A)) = \infty$. Es decir, sólo queda probar:

($\star$) Si A es acotado, entonces $\text{diam}\,(\text{conv}(A)) \leq \text{diam}(A)$.

Veamos entonces ($\star$). Como A es acotado, $\text{diam}(A)$ es finito. Tomemos un número real $r > \text{diam}(A)$ Por la última observación antes del Teorema 1.6.2, tenemos

$$A \subset \mathbb{B}(a, r), \ \forall a \in A. \tag{1.8}$$

en particular,

$$\text{conv}(A) \subset \text{conv}(\mathbb{B}(a, r)) = \mathbb{B}(a, r), \ \forall a \in A. \tag{1.9}$$

Fijados $y \in \text{conv}(A)$ y $a \in A$, (1.9) implica que $y \in \mathbb{B}(a, r)$ luego $a \in \mathbb{B}(y, r)$. Moviendo a en A,

$$A \subset \mathbb{B}(y, r), \ \forall y \in \text{conv}(A). \tag{1.10}$$

Y de nuevo tomando envolventes convexas,

$$\text{conv}(A) \subset \mathbb{B}(y, r), \ \forall y \in \text{conv}(A). \tag{1.11}$$

Ya podemos probar ($\star$): Fijemos $r > \text{diam}(A)$. Dados $y, y' \in \text{conv}(A)$, tenemos $y' \in \mathbb{B}(y, r)$ por (1.11), luego $d(y, y') < r$. moviendo y, y' en $\text{conv}(A)$ obtenemos $\text{diam}\,(\text{conv}(A)) \leq r$. Como esto es cierto $\forall r > \text{diam}(A)$, deducimos ($\star$). $\square$

Nuestro siguiente objetivo será responder las siguiente cuestión: Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo, es claro que existe $A_0 \subset \mathbb{R}^n$ tal que $A = \text{conv}(A_0)$ (por ejemplo, podemos tomar $A_0 = A$; de hecho, esta elección es el *mayor* $A_0 \subset \mathbb{R}^n$ tal que $A = \text{conv}(A_0)$). Pero ¿cómo elegir A_0 para que sea lo menor posible? Un ejemplo sencillo en el que pensar es cuando A es un triángulo, y A_0 es el conjunto de sus vértices.

Definición 1.6.1 Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo. Un punto $x \in A$ se dice *extremo* de A si no existen $x_1, x_2 \in A$ tales que $x \in (x_1, x_2)$. Llamaremos

$$\text{extr}(A) = \{x \in A \mid x \text{ es punto extremo de } A\}.$$

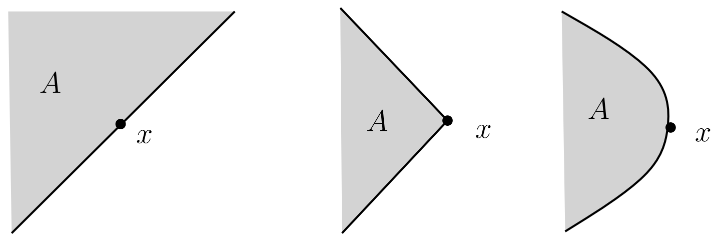


Figura 1.6: Izquierda: x no es un punto extremo de A. Centro, derecha: x sí es punto extremo.

Por ejemplo, si $A = [x_1, x_2] \subset \mathbb{R}^n$, entonces $\mathrm{extr}(A) = \{x_1, x_2\}$. En general, es claro que si $x \in A$ es un punto extremo de A, entonces $x \notin \mathrm{int}(A)$. En particular, un convexo abierto no tiene puntos extremos. Un semiespacio cerrado tampoco tiene puntos extremos.

Lema 1.6.1 *Sea $H \subset \mathbb{R}^n$ un hiperplano soporte de un convexo $A \subset \mathbb{R}^n$. Entonces,* $\mathrm{extr}(A) \cap H = \mathrm{extr}(A \cap H)$.

Demostración. Sea $x \in \mathrm{extr}(A) \cap H$. Por reducción al absurdo, supongamos que existen $x_1, x_2 \in A \cap H$ tales que $x \in (x_1, x_2)$. Como $x_1, x_2 \in A$ deducimos que $x \notin \mathrm{extr}(A)$, contradicción.

Recíprocamente, $\mathrm{extr}(A \cap H) \subset A \cap H \subset H$, luego sólo queda comprobar que $\mathrm{extr}(A \cap H) \subset \mathrm{extr}(A)$. Por reducción al absurdo, supongamos que $x \in \mathrm{extr}(A \cap H) - \mathrm{extr}(A)$. Así, $x \in A \cap H$ y existen $x_1, x_2 \in A$ tales que $x \in (x_1, x_2)$. Si el segmento (x_1, x_2) es transversal a H en x, entonces H no puede ser un hiperplano soporte de A, contradicción. Por tanto, (x_1, x_2) no atraviesa H. Como $x \in (x_1, x_2) \cap H$, entonces $(x_1, x_2) \subset H$, lo que contradice que $x \in \mathrm{extr}(A \cap H)$. $\square$

Teorema 1.6.3 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un compacto convexo no vacío. Entonces, todo hiperplano soporte[3] de A contiene al menos un punto extremo de A.*

Demostración. Por inducción sobre n: para $n = 1$, un compacto convexo no vacío es un intervalo $A = [x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$, cuyos puntos extremos son $\mathrm{extr}(A) = \{x_1, x_2\}$, y los hiperplanos soporte de A son $\{x_1\}, \{x_2\}$, luego el teorema se cumple trivialmente.

Supongamos que el teorema es cierto para compactos convexos no vacíos de $\mathbb{R}^{n-1}$ y sean $A \subset \mathbb{R}^n$ un compacto convexo no vacío y H un hiperplano soporte de A. Por el Lema 1.6.1, $\mathrm{extr}(A) \cap H = \mathrm{extr}(A \cap H)$. Como $A \cap H$ es un convexo compacto no vacío de

[3]Por el Teorema 1.4.1, existen hiperplanos soporte de A pasando por cada punto de ∂A, luego en particular el teorema asegura que $\mathrm{extr}(A) \neq \emptyset$.

H (es decir, de $\mathbb{R}^{n-1}$), por hipótesis de inducción se tiene que $\text{extr}(A \cap H) \neq \emptyset$. De nuevo por el Lema 1.6.1, tenemos $\text{extr}(A) \cap H \neq \emptyset$. $\square$

Es claro que un polígono convexo en $\mathbb{R}^2$ queda determinado sólo por sus vértices, que son sus puntos extremos. A continuación veremos una versión más general de este resultado, válida para convexos compactos de $\mathbb{R}^n$ no necesariamente 'poligonales'. Usaremos más adelante esta versión generalizada para caracterizar los politopos (Teorema 1.10.1). Conviene mencionar que este mismo tipo de resultado es válido en situaciones mucho más generales, como en ciertos espacios vectoriales topológicos que aparecen en Análisis Funcional; el teorema en su mayor generalidad se conoce como *Teorema de Krein-Milman,* aunque fue Minkowski el que lo probó en $\mathbb{R}^n$.

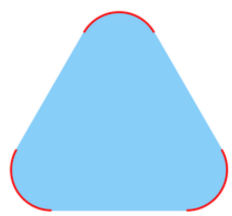


Figura 1.7: En rojo: los puntos extremos del convexo.

Teorema 1.6.4 *(Teorema de Krein-Milman en $\mathbb{R}^n$). Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un compacto convexo no vacío. Entonces, $A = \overline{\text{conv}\,(\text{extr}(A))}$.*

Demostración.
$\boxed{\supseteq}$ $\text{extr}(A) \subset A$ luego $\text{conv}(\text{extr}(A)) \subset \text{conv}(A) = A$ por ser A convexo. Tomando clausuras, $\overline{\text{conv}\,(\text{extr}(A))} \subset \overline{A} = A$ por ser A cerrado.
$\boxed{\subseteq}$ Por reducción al absurdo, supongamos que $x \in A - \overline{\text{conv}\,(\text{extr}(A))}$. Así, $\{x\}$ es un compacto convexo, $\overline{\text{conv}\,(\text{extr}(A))}$ es un cerrado convexo, y ambos conjuntos de $\mathbb{R}^n$ son disjuntos. Por el Teorema 1.5.2, $\{x\}$ y $\overline{\text{conv}\,(\text{extr}(A))}$ pueden separarse fuertemente por un hiperplano $H_{u,\alpha}$, luego existe $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{\text{conv}\,(\text{extr}(A))} \subset H^-_{u,\alpha-\varepsilon}$ y $x \in H^+_{u,\alpha+\varepsilon}$.

Por el apartado (2) del Teorema 1.4.1, al ser A compacto podemos prefijar el vector normal exterior y encontrar un hiperplano soporte de A con dicho vector normal exterior. Aplicando esto al vector u, encontramos un $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $H_{u,\beta}$ es un hiperplano soporte de A en cierto punto:

Por tanto, $A \subset H^-_{u,\beta}$ luego $\alpha + \varepsilon \leq \beta$.

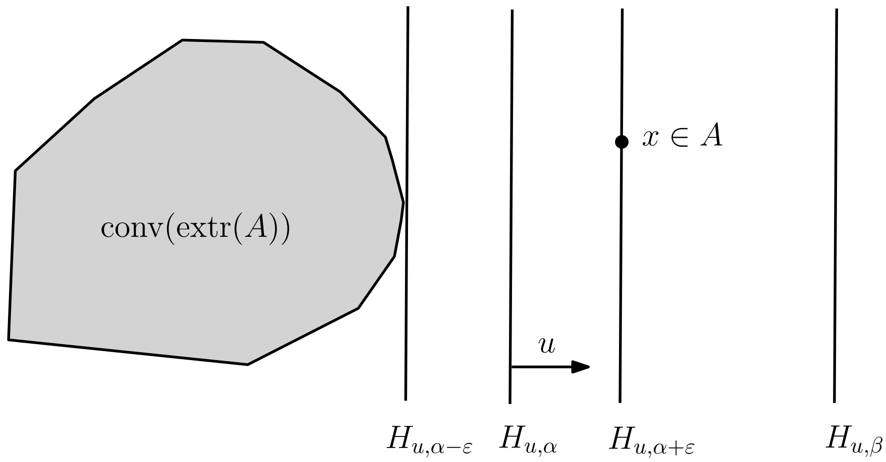


Figura 1.8: x podría quedar a la derecha de $H_{u,\alpha+\varepsilon}$, pero nunca a su izquierda.

Por otro lado, el Teorema 1.6.3 asegura que $H_{u,\beta}$ contiene algún punto extremo de A. Pero $\mathrm{extr}(A) \subset \overline{\mathrm{conv}\,(\mathrm{extr}(A))} \subset H^-_{u,\alpha-\varepsilon}$. Y como $\alpha < \beta$, entonces $H_{u,\beta} \cap H^-_{u,\alpha-\varepsilon} = \emptyset$, contradicción. $\square$

Por completitud, enunciaremos el Teorema de Minkowski, que no demostraremos ni usaremos. Puede consultarse una demostración en [2], Corolario 1.4.5.

Teorema 1.6.5 (Minkowski) *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un compacto convexo no vacío. Entonces, $A = \mathrm{conv}\,(\mathrm{extr}(A))$.*

Aún puede mejorarse la elección $A_0 = \mathrm{extr}(A)$ para la igualdad $A = \overline{\mathrm{conv}\,(A_0)}$ del Teorema de Krein-Milman; es decir, podemos elegir un subconjunto $A_0 \subset \mathrm{extr}(A)$ para que la igualdad anterior siga siendo sea cierta: estos son los *puntos expuestos.*

Definición 1.6.2 Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo. Un punto $x \in A$ se dice un *punto expuesto* si existe un hiperplano soporte $H \subset \mathbb{R}^n$ de A en x tal que $A \cap H = \{x\}$. Al conjunto de los puntos expuestos de A lo denotaremos por $\exp(A)$.

Es evidente que $\exp(A) \subset \mathrm{extr}(A)$, aunque la igualdad no se da en general:

Puede probarse (no lo haremos ni lo usaremos) que todo punto extremo es límite de puntos expuestos, es decir, $\overline{\exp(A)} = \mathrm{extr}(A)$. Respecto al problema que hemos estudiado en esta sección, el mejor resultado (que tampoco usaremos) es

Teorema 1.6.6 (Straszewicz) *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un compacto convexo no vacío. Entonces, $A = \overline{\mathrm{conv}\,(\exp(A))}$.*

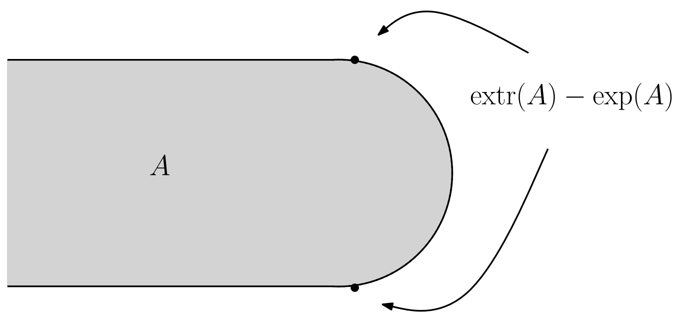


Figura 1.9: Puntos extremos no expuestos en un convexo.

Puede encontrarse una demostración de este resultado en [2], Teorema 1.4.7.

1.7. Función soporte de un conjunto convexo

A lo largo de esta sección, $A \subset \mathbb{R}^n$ denotará un conjunto cerrado y convexo. Consideremos la función

$$h_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \mid h_A(u) = \sup_{a \in A} \langle a, u \rangle.$$

Así, $h_A(\vec{0}) = 0$. Denotaremos por $\mathrm{Dom}(h_A) = \{u \in \mathbb{R}^n \mid h_A(u) < \infty\}$. A la restricción $h_A \colon \mathrm{Dom}(h_A) \to \mathbb{R}$ se la llama la *función soporte* de A. La interpretación geométrica de $h_A(u)$ para $u \in \mathbb{S}^{n-1}(1) \cap \mathrm{Dom}(h_A)$ es la altura máxima que A alcanza respecto al hiperplano *vectorial* de $\mathbb{R}^n$ ortogonal a u. Tomemos $u \in \mathrm{Dom}(h_A) - \{\vec{0}\}$. Consideremos el hiperplano (afín)

$$H(A, u) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u \rangle = h_A(u)\}.$$

El semiespacio cerrado bordeado por $H(A, u)$ que contiene a A es

$$H^-(A, u) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u \rangle \leq h_A(u)\}.$$

En general, A no tiene porqué cortar a $H(A, u)$. Pero si $F(A, u) = A \cap H(A, u) \neq \emptyset$, entonces $H(A, u)$ es un hiperplano soporte de A en cada punto $x_0 \in F(A, u)$. Llamaremos a $H(A, u)$ el *hiperplano soporte de A en la dirección del normal exterior u,* independientemente de si $F(A, u)$ es o no vacío. Análogamente, $H^-(A, u)$ será el *semiespacio soporte de A en la dirección del vector normal exterior u.*

Veamos algunas propiedades sencillas de la función soporte.

Proposición 1.7.1 *Sean $A, A' \subset \mathbb{R}^n$ convexos cerrados. Entonces,*

(1) *Existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $h_A(u) = \langle x, u \rangle$ $\forall u \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si $A = \{x\}$.*

(2) $h_{A+x}(u) = h_A(u) + \langle x, u\rangle$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathrm{Dom}(h_A)$.

(3) $h_A(\lambda u) = \lambda h_A(u)$, $\forall \lambda \geq 0$, $u \in \mathrm{Dom}(h_A)$ *(h_A es positivamente homogénea).*

(4) $h_A(u + v) \leq h_A(u) + h_A(v)$, $\forall u, v \in \mathrm{Dom}(h_A)$ *(h_A) es subaditiva). En particular,* $\mathrm{Dom}(h_A)$ *es un convexo de* $\mathbb{R}^n$ *y* $h_A \colon \mathrm{Dom}(h_A) \to \mathbb{R}$ *es una función convexa).*

(5) $h_A \leq h_{A'}$ *si y sólo si* $A \subset A'$.

(6) $h_{\lambda A} = \lambda h_A$, $\forall \lambda \geq 0$.

(7) $h_{-A}(u) = h_A(-u)$, $\forall u \in \mathrm{Dom}(h_{-A}) = -\mathrm{Dom}(h_A)$.

Demostración. Veamos el apartado (1).
$\boxed{\Rightarrow}$ Sea $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, en coordenadas respecto a la base canónica $e_1, \ldots, e_n$. Así, $x_i = \langle x, e_i\rangle = h_A(e_i)$ luego $A \subset \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z, e_i\rangle \leq x_i\} = H^-_{e_i,x_i}$. Por otro lado, $-x_i = \langle x, -e_i\rangle = h_A(-e_i)$ luego $A \subset \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z, -e_i\rangle \leq -x_i\} = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z, e_i\rangle \geq x_i\} = H^+_{e_i,x_i}$. Así, $A \subset H_{e_i,x_i}$. Haciendo esto para cada $i = 1, \ldots, n$ obtenemos $A = \{x\}$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Trivial.

Para el apartado (2), sea $x \in \mathbb{R}^n$.

$$h_{A+x}(u) = \sup_{b\in A+x} \langle b, u\rangle = \sup_{a\in A} \langle a + x, u\rangle = \left(\sup_{a\in A} \langle a, u\rangle\right) + \langle x, u\rangle = h_A(u) + \langle x, u\rangle.$$

Para el apartado (3), sea $x \in \mathbb{R}^n$.

$$h_A(\lambda u) = \sup_{a\in A} \langle a, \lambda u\rangle = \lambda \sup_{a\in A} \langle a, u\rangle = \lambda h_A(u).$$

Para el apartado (4),

$$h_A(u + v) = \sup_{a\in A} \langle a, u + v\rangle = \sup_{a\in A} (\langle a, u\rangle + \langle a, v\rangle) \leq \sup_{a\in A} \langle a, u\rangle + \sup_{a\in A} \langle a, v\rangle = h_A(u) + h_A(v).$$

Veamos el apartado (5):
$\boxed{\Rightarrow}$ Sea $H_{u,\alpha} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u\rangle = \alpha\}$ un hiperplano soporte de A', con semiespacio soporte $H^-_{u,\alpha}$. Entonces,

$$\sup_{a\in A} \langle a, u\rangle = h_A(u) \leq h_{A'}(u) = \sup_{a'\in A'} \langle a', u\rangle = \alpha,$$

luego $A \subset H^-_{u,\alpha}$. Moviendo el semiespacio soporte de A', deducimos que A está contenido en la intersección de todos los semiespacios soporte de A', que es A' por el Corolario 1.4.1,
$\boxed{\Leftarrow}$ Trivial.

Para el apartado (6),

$$h_{\lambda A}(u) = \sup_{a\in A}\langle \lambda a, u\rangle \overset{(\lambda\geq 0)}{=} \lambda \sup_{a\in A}\langle a, u\rangle = \lambda h_A(u).$$

Finalmente, el apartado (7):

$$h_{-A}(u) = \sup_{b\in -A}\langle b, u\rangle = \sup_{a\in A}\langle -a, u\rangle = \sup_{a\in A}\langle a, -u\rangle = h_A(-u).$$

$\square$

Definición 1.7.1 Una función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice *sublineal* si cumple $f(u+v) \leq f(u) + f(v)$, $f(\lambda u) = \lambda f(u)$, $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \geq 0$. En particular, f es convexa y $f(\vec{0}) = 0$.

Lema 1.7.1 *Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces, f es continua en $\mathbb{R}^n$ y Lipschitziana en cada compacto de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Veamos que f es continua en un entorno de x_0. Elegimos $n+1$ puntos afínmente independientes $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ tales que x_0 está en el interior del simplex $\mathcal{S}$ generado por los puntos x_i:

$$\mathcal{S} = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Dado $x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \in \mathcal{S}$, por convexidad de f tenemos

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i) \leq c := \text{máx}\{f(x_i) \mid 1 = 1, \ldots, n+1\}. \tag{1.12}$$

Como $x \in \text{int}(\mathcal{S})$, existe $\rho > 0$ tal que $\mathbb{B}(x_0, \rho) \subset \mathcal{S}$. Veamos que $|f(x_0) - f(y)| \leq C\|x_0 - y\|$ para todo $y \in \mathbb{B}(x_0, \rho)$, donde $C = C(x_0, \rho) \geq 0$ y f será continua en $\mathbb{B}(x_0, \rho)$ (y por tanto lo será en todo $\mathbb{R}^n$): Dado $y \in \mathbb{B}(x_0, \rho)$, existirá $u \in \mathbb{S}^{n-1}(\rho) = \partial\mathbb{B}(\vec{0}, \rho)$ y $\alpha \in [0, 1]$ tales que $y = x_0 + \alpha u = (1-\alpha)x_0 + \alpha(x_0 + u)$, luego por convexidad de f

$$f(y) = f((1-\alpha)x_0 + \alpha(x_0+u)) \leq (1-\alpha)f(x_0) + \alpha f(x_0+u), \tag{1.13}$$

de donde

$$f(y) - f(x_0) \leq \alpha[f(x_0+u) - f(x_0)] \overset{(1.12)}{\leq} \alpha[c - f(x_0)]. \tag{1.14}$$

Ahora queremos una cota por arriba para $f(x_0)-f(y)$, que obtendremos usando un argumento similar al anterior pero cambiando x_0 por y. Necesitamos primero una combinación lineal convexa de dos puntos que produzca x_0; sustituyendo $y = x_0 + \alpha u$ obtenemos

$$\frac{1}{1+\alpha} y + \frac{\alpha}{1+\alpha}(x_0 - u) = x_0,$$

luego de nuevo por convexidad de f

$$f(x_0) \leq \frac{1}{1+\alpha} f(y) + \frac{\alpha}{1+\alpha} f(x_0 - u).$$

Quitando denominadores y dejando en un miembro de la desigualdad lo que lleve el coeficiente α,

$$f(x_0) - f(y) \leq \alpha[f(x_0 - u) - f(x_0)] \overset{(1{,}12)}{\leq} \alpha[c - f(x_0)]. \tag{1.15}$$

De (1.14), (1.15) deducimos

$$\|f(x_0) - f(y)\| \leq \alpha[c - f(x_0)] = \frac{\|y - x_0\|}{\rho}[c - f(x_0)], \quad \forall y \in \mathbb{B}(x_0, \rho).$$

Es decir, tenemos la desigualdad deseada con $C(x_0, \rho) = \frac{c - f(x_0)}{\rho}$. Por tanto, f es continua en $\mathbb{R}^n$.

Ahora fijemos un compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ y un $\mu > 0$. Tomemos $x, y \in K$ distintos y definamos $z = y - \mu \frac{x-y}{\|x-y\|} \in K + \mathbb{B}(\vec{0}, \mu)$. Sustituyendo esta última ecuación, un cálculo sencillo nos lleva a la combinación lineal convexa

$$\left(1 - \frac{\|x-y\|}{\mu + \|x-y\|}\right) x + \frac{\|x-y\|}{\mu + \|x-y\|} z = y,$$

que simplificaremos escribiendo $\lambda = \frac{\|x-y\|}{\mu + \|x-y\|}$. Aplicando una vez más la convexidad de f, tenemos $f(y) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(z)$, de donde

$$f(y) - f(x) \leq \lambda[f(z) - f(x)] = \frac{\|x-y\|}{\mu + \|x-y\|}[f(z) - f(x)] \leq \frac{\|x-y\|}{\mu}[f(z) - f(x)] \leq \frac{2M}{\mu}\|x-y\|,$$

donde $M = M(K, \mu) = \text{máx}_{K + \overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, \mu)} |f|$, que existe por ser K compacto. Intercambiando los papeles de x, y obtendremos $f(x) - f(y) \leq \frac{2M}{\mu}\|x-y\|$, luego $|f(x) - f(y)| \leq \frac{2M}{\mu}\|x-y\|$ para cualesquiera $x, y \in K$ distintos, de donde f es Lipschitziana en K. □

Lema 1.7.2 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un cerrado que cumple $\lambda x \in A$, $\forall x \in A$, $\lambda \geq 0$ (esto se lee “A es un cono”). Sea $x_0 \in \partial A$ y $H \subset \mathbb{R}^n$ un hiperplano soporte de A en x_0 Entonces, $\vec{0} \in H$.*

Demostración. Como A en cerrado y $x_0 \in \partial A$, entonces $x_0 \in A$. Sea $r_{x_0} = \{\lambda x_0 \mid \lambda \geq 0\}$. Por ser A un cono, $r_{x_0} \subset A$. Como $A \subset H^-$, deducimos que r_{x_0} no puede ser transversal a H en x_0, es decir, $r_{x_0} \subset H$ luego $\vec{0} \in H$. □

Teorema 1.7.1 *Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función sublineal. Entonces, existe un único compacto convexo $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que la función soporte h_A de A es f.*

Demostración. La unicidad es consecuencia directa del apartado (5) de la Proposición 1.7.1. En cuanto a la existencia, definimos $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u\rangle \leq f(u)\ \forall u \in \mathbb{R}^n\}$. Debemos probar:

1. A es no vacío.
2. A es compacto y convexo.
3. $f = h_A$.

La demostración de 1 es la más complicada, y partes de la misma se usarán en la demostración de 3. El esquema para probar 1 es el siguiente:

1.1. Consideremos el epigrafo de f, $\mathrm{epi}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}$. Probaremos que $\mathrm{epi}(f)$ es un convexo cerrado de $\mathbb{R}^{n+1}$ y que es un cono en el sentido del Lema 1.7.2.

1.2. Fijamos un $u_0 \in \mathbb{R}^n$. El Teorema 1.4.1 asegura la existencia de un hiperplano soporte $H_{(y,\eta),\alpha}$ de $\mathrm{epi}(f)$ en $(u_0, f(u_0))$ (hemos denotado por $(y, \eta) = (y(u_0), \eta(u_0)) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) - \{(\vec{0}, 0)\}$ a la dirección ortogonal de $H_{(y,\eta),\alpha}$ en $\mathbb{R}^{n+1}$). Salvo un cambio de signo en dicha dirección ortogonal, podemos suponer que $\mathrm{epi}(f) \subset H^-_{(y,\eta),\alpha}$. Veremos que $\alpha = 0$ y que $\eta < 0$. Por tanto, normalizando de nuevo la dirección (y, η) (esta vez por un múltiplo positivo), podremos suponer que $\eta = -1$. En estas condiciones, probaremos que $y = y(u_0) \in A$, luego $A \neq \emptyset$.

Vamos a desarrollar cada uno de los puntos anteriores:

1.1. $\mathrm{epi}(f)$ es un convexo de $\mathbb{R}^{n+1}$, por ser f una función convexa y por el Lema 1.1.1. Además, $\mathrm{epi}(f)$ es cerrado por ser f continua (por ser f sublineal es convexa, luego su continuidad es consecuencia del Lema 1.7.1). La igualdad $f(\lambda u) = \lambda f(u)\ \forall \lambda \geq 0$, $\forall u \in \mathbb{R}^n$ implica directamente que si $(x, y) \in \mathrm{epi}(f)$ y $\lambda \geq 0$, entonces $\lambda(x, y) \in \mathrm{epi}(f)$, es decir, $\mathrm{epi}(f)$ es un cono.

1.2. Por ser $\mathrm{epi}(f)$ un cerrado convexo de $\mathbb{R}^{n+1}$, el Teorema 1.4.1 asegura la existencia de un hiperplano soporte $H_{(y,\eta),\alpha} = \{(z, t) \mid \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \langle y, z\rangle_{\mathbb{R}^n} + \eta t = \alpha\}$ de $\mathrm{epi}(f)$

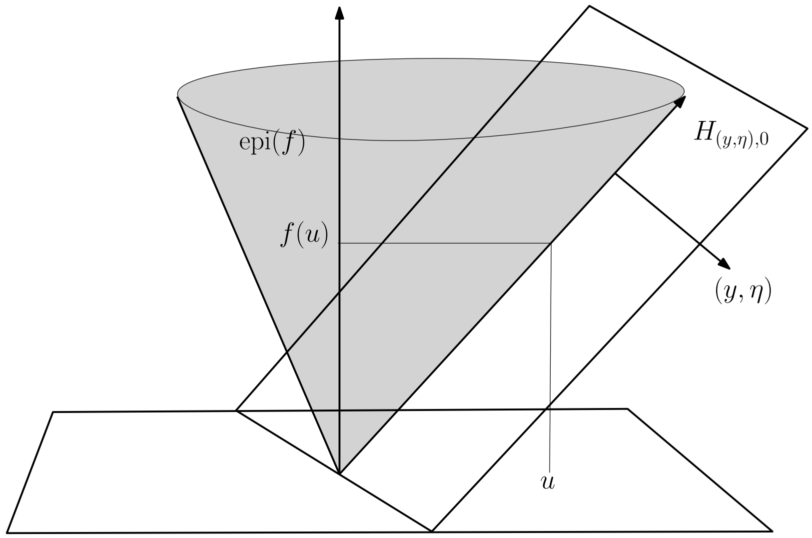


Figura 1.10: El 'plano' de abscisas representa $\mathbb{R}^n$, el eje de ordenadas es $\mathbb{R}$.

en $(u_0, f(u_0))$, para algunos $(y,\eta) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) - \{(\vec{0}, 0)\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ (que dependen de u_0). Salvo cambiar de signo (y,η), podemos suponer $\text{epi}(f) \subset H^-_{(y,\eta),\alpha}$. Como $(\vec{0}, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ está en $H_{(y,\eta),\alpha}$ por el Lema 1.7.2, entonces $\alpha = 0$. Esto nos dice que

$$H_{(y,\eta),0} = \{(z,t) \mid \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \langle y, z\rangle_{\mathbb{R}^n} + \eta t = 0\}, \quad \text{y } \langle y, z\rangle_{\mathbb{R}^n} + \eta t \le 0, \quad \forall (z,t) \in \text{epi}(f).$$

Veamos ahora que $\eta < 0$. Tomemos $\lambda > 0$; entonces $f(u_0) + \lambda > f(u_0)$ luego

$$(u_0, f(u_0)) + \lambda e_{n+1} \in \text{int}\,(\text{epi}(f)), \quad \forall \lambda > 0. \tag{1.16}$$

Por tanto,

$$\langle y, u_0\rangle_{\mathbb{R}^n} + \eta(f(u_0) + \lambda) < 0, \quad \forall \lambda > 0,$$

lo que prueba que $\eta \le 0$ (tomar λ suficientemente grande y positivo). Si η fuera cero, tendríamos $\langle y, u_0\rangle_{\mathbb{R}^n} < 0$. Esto contradice que $H_{(y,\eta),0}$ es hiperplano soporte de $\text{epi}(f)$ en $(u, f(u_0))$ (ya que $0 = \langle y(u_0), u_0\rangle_{\mathbb{R}^n} + \eta f(u_0) = \langle y(u_0), u_0\rangle_{\mathbb{R}^n}$). Por tanto, $\eta < 0$. Normalizando de nuevo la dirección (y,η) (dividiendo por $-\eta > 0$), podemos suponer que $\eta = -1$. Esto hace que el hiperplano soporte de $\text{epi}(f)$ en $(u_0, f(u_0))$ se escriba

$$H_{(y(u_0),-1),0} = \{(z,t) \mid \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \langle y(u_0), z\rangle_{\mathbb{R}^n} = t\}, \quad \text{con } \text{epi}(f) \subset H^-_{(y(u_0),-1),0}.$$

Veamos que $y(u_0) \in A$: por definición de A, esto se tendrá si $\langle y(u_0), u\rangle_{\mathbb{R}^n} \le f(u)$ $\forall u \in \mathbb{R}^n$. Dado $u \in \mathbb{R}^n$, tenemos $(u, f(u)) \in \partial\text{epi}(f) \subset \text{epi}(f) \subset H^-_{(y(u_0),-1),0}$ luego $\langle y(u_0), u\rangle_{\mathbb{R}^n} \le f(u)$, que es lo que buscábamos. Por tanto, $y(u_0) \in A$ y $A \neq \emptyset$.

2. A es cerrado, por su definición y por ser f continua. Veamos que A es convexo: Sea $u \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$. Entonces, $A \subset H^-_{u,f(u)}$ luego

$$A \subset \bigcap_{u \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}} H^-_{u,f(u)}. \tag{1.17}$$

   Recíprocamente, si $x \in \cap_{u\in\mathbb{R}^n-\{\vec{0}\}} H^-_{u,f(u)}$ entonces $\langle x, u\rangle \leq f(u)$ $\forall u \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$. Como esta última desigualdad se cumple trivialmente para $u = \vec{0}$, concluímos que $x \in A$. Esto nos dice que se da la igualdad en (1.17). Por el apartado (1) de la Proposición 1.1.1, A es convexo (ya que no es vacío).

   Terminaremos este apartado probando que A es acotado. Sea $e_1, \ldots, e_n$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Dado $x \in A$, $\langle x, e_i\rangle \leq f(e_i)$ y $\langle x, -e_i\rangle \leq f(-e_i)$, de donde

$$-f(-e_i) \leq \langle x, e_i\rangle \leq f(e_i),$$

   luego $A \subset \prod_{i=1}^n [-f(-e_i), f(e_i)]$, y A es acotado.

3. Como $A \subset \mathbb{R}^n$ es convexo y compacto, tiene sentido $h_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Veamos que $f = h_A$ probando las dos desigualdades. Dado $u \in \mathbb{R}^n$,

$$h_A(u) = \sup_{a\in A} \langle a, u\rangle \leq \sup_{a \in A} f(u) = f(u)$$

   luego $h_A \leq f$. Recíprocamente, recordemos que dado $u \in \mathbb{R}^n$, hemos probado en 1.2 que si escribimos el hiperplano soporte de $\text{epi}(f)$ en $(u, f(u))$ de la forma $H_{(y(u),-1),0}$ con $\text{epi}(f) \subset H^-_{(y(u),-1),0}$, entonces $y(u) \in A$. Por tanto,

$$h_A(u) = \sup_{a\in A} \langle a, u\rangle_{\mathbb{R}^n} \overset{(y(u)\in A)}{\geq} \langle y(u), u\rangle_{\mathbb{R}^n} \overset{((u,f(u))\in H_{(y(u),-1),0})}{=} f(u),$$

   luego $f \leq h_A$.

□

Definición 1.7.2 A cualquier subconjunto no vacío, compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$ lo llamaremos *cuerpo convexo*. Denotaremos por

$$\mathcal{K}^n = \{A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ es un cuerpo convexo}\}, \quad \mathcal{K}^n_0 = \{A \in \mathcal{K}^n \mid \text{int}(A) \neq \emptyset\}.$$

Dados $K, L \in \mathcal{K}^n$, a la suma afín $K + L$ la llamaremos *suma de Minkowski* de K y L. Notemos que $K + L \in \mathcal{K}^n$ (la convexidad es consecuencia del apartado (3) de la

Proposición 1.1.1; la compacidad se deduce de que la suma $+\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continua). Esto hace de $\mathcal{K}^n$ un *semigrupo*[4] abeliano.

Una función $f\colon \mathcal{K}^n \to G$, donde G es un semigrupo, se dice *Minkowski-aditiva* si cumple $f(K+L) = f(K) + f(L)$, $\forall K, L \in \mathcal{K}^n$.

Para $K \in \mathcal{K}^n$, recordemos las definiciones

$$h_K\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid h_K(u) = \sup_{a\in K}\langle a, u\rangle,$$

$$H(K,u) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u\rangle = h_K(u)\}, \quad F(K,u) = K \cap H(K,u), \ \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

Proposición 1.7.2 *Dados $K, L \in \mathcal{K}^n$, se tienen:*

(1) $h_{K+L} = h_K + h_L$.

(2) $H(K+L,\cdot) = H(K,\cdot) + H(L,\cdot)$.

(3) $F(K+L,\cdot) = F(K,\cdot) + F(L,\cdot)$.

Es decir, las tres funciones son Minkowski-aditivas.

Demostración. Para el apartado (1), dado $u \in \mathbb{R}^n$ se tiene $h_{K+L}(u) = \sup_{a\in K+L}\langle a, u\rangle$. Por ser $K+L$ compacto, este supremo se alcanza en algún $a_0 = k_0 + l_0 \in K+L$, luego $h_{K+L}(u) = \langle a_0, u\rangle = \langle k_0, u\rangle + \langle l_0, u\rangle \leq h_K(u) + h_L(u)$. Recíprocamente, la compacidad de K y de L asegura que dado $u \in \mathbb{R}^n$ existen $k_0' \in K$ y $l_0' \in L$ tales que $h_K(u) = \langle k_0', u\rangle$ y $h_L(u) = \langle l_0', u\rangle$, de donde $h_K(u) + h_L(u) = \langle k_0' + l_0', u\rangle \leq h_{K+L}(u)$.

Veamos el apartado (2). Por el apartado (1),

$$H(K+L,u) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u\rangle = h_{K+L}(u)\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u\rangle = h_K(u) + h_L(u)\}.$$

Por tanto, si $x \in H(K,u) + H(L,u)$, entonces $x = a + b$ con $\langle a, u\rangle = h_K(u)$ y $\langle b, u\rangle = h_L(u)$, de donde $\langle x, u\rangle = h_K(u) + h_L(u)$ luego $x \in H(K+L,u)$. Esto prueba que $H(K,u) + H(L,u) \subset H(K+L,u)$. Como la suma de dos hiperplanos ortogonales a $u \neq \vec{0}$ es otro hiperplano ortogonal a u, de la inclusión anterior se obtiene la igualdad sin más que contar dimensiones. En el caso $u = \vec{0}$, $H(K,u) = \mathbb{R}^n$ $\forall K \in \mathcal{K}^n$, luego la igualdad en (2) es trivial.

Para el apartado (3), Si $x \in F(K,u) + F(L,u)$, entonces $x = a + b$ con $a \in F(K,u) = K \cap H(K,u)$ y $b \in L \cap H(L,u)$. Así, $x \in K + L$ y $\langle x, u\rangle = \langle a, u\rangle + \langle b, u\rangle = h_K(u) + h_L(u) = h_{K+L}(u)$ luego $x \in H(K+L,u)$. Esto prueba que $x \in (K+L) \cap H(K+L,u) = F(K+L,u)$, y por tanto, $F(K,u) + F(L,u) \subset F(K+L,u)$. Recíprocamente, si $x \in F(K+L,u) = (K+L) \cap H(K+L,u)$ entonces $x = a + b$ con $a \in K$, $b \in L$ y $\langle a, u\rangle + \langle b, u\rangle = \langle x, u\rangle =$

[4]Un *semigrupo* $G \equiv (G,+)$ es un par donde G es un conjunto y $+\colon G \times G \to G$ es una ley de composición interna asociativa. Si esta ley cumple la propiedad conmutativa, el semigrupo se llama *abeliano.*

$h_{K+L}(u) = h_K(u) + h_L(u)$. Como $\langle a, u\rangle \leq h_K(u)$ (porque $a \in K$ y por definición de h_K) y análogamente $\langle b, u\rangle \leq h_L(u)$, deducimos que $\langle a, u\rangle = h_K(u)$ y $\langle b, u\rangle = h_L(u)$, de donde $a \in K \cap H(K, u) = F(K, u)$ y $b \in F(L, u)$, es decir, $x \in F(K, u) + F(L, u)$. □

El semigrupo $\mathcal{K}^n$ tiene la siguiente propiedad de cancelación:

Corolario 1.7.1 *Si $K + M = L + M$ para $K, L, M \in \mathcal{K}^n$, entonces $K = L$.*

Demostración.

$$\begin{array}{rcll} h_K + h_M & = & h_{K+M} & \text{(por el apartado (1) de la Proposición 1.7.2)} \\ & = & h_{L+M} & = h_L + h_M, \qquad \text{luego } h_K = h_L. \end{array}$$

Finalmente, el apartado (5) de la Proposición 1.7.1 implica que $K = L$. □

Veamos otras propiedades algebraicas sencillas de $\mathcal{K}^n$:

Corolario 1.7.2 *Sean $K, L \in \mathcal{K}^n$, $\lambda, \mu \geq 0$.*

(1) *$\lambda K \in \mathcal{K}^n$ ($\mathcal{K}^n$ es un cono abstracto).*

(2) *$\lambda(K + L) = \lambda K + \lambda L$.*

(3) *$(\lambda + \mu)K = \lambda K + \mu K$.*

(4) *$\lambda(\mu K) = (\lambda\mu)K$, $1 \cdot K = K$.*

Demostración. (1) y (3) son consecuencias del apartado (3) de la Proposición 1.1.1. (2) y (4) son triviales. □

Definición 1.7.3 Dado $K \in \mathcal{K}^n$, se define la *anchura de K en la dirección de $u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)$* como $w(K, u) = h(K, u) + h(K, -u) = \sup_{x\in K}\langle x, u\rangle - \text{ínf}_{x\in K}\langle x, u\rangle \geq 0$.

Diremos que K tiene *anchura constante* si existe $c \geq 0$ tal que $w(K, u) = c$, $\forall u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)$.

Algunos comentarios sencillos:

- Si existe $u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)$ tal que $w(K, u) = 0$, entonces $K \subset H_{u,h_K(u)} = H(K, u)$. En particular, $\dim K \leq n - 1$.
- Si $K \in \mathcal{K}^n_0$, entonces $\text{int}(K) \neq \emptyset$ luego $\dim K = n$ y así, el punto anterior implica que $w(K, u) > 0$ $\forall u \in \mathbb{R}^n$.

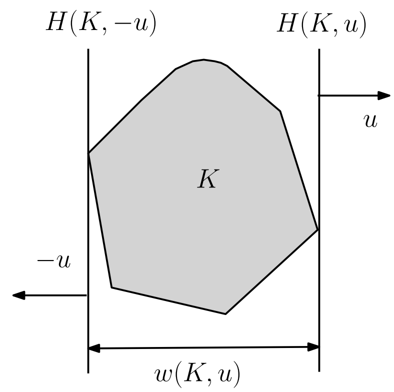


Figura 1.11: La anchura $w(K,u)$ de $K \in \mathcal{K}^n$ mide la distancia entre los dos hiperplanos soporte $H(K,u), H(K,-u)$.

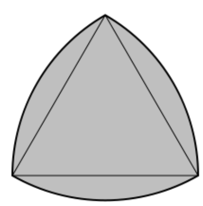


Figura 1.12: Un triángulo de Reuleaux.

- Una bola cerrada en $\mathbb{R}^n$ es un convexo compacto con anchura constante. Pero existen convexos compactos que no son bolas cerradas. Por ejemplo, el convexo de $\mathbb{R}^2$ obtenido al añadir a un triángulo equilátero las regiones encerradas por arcos circulares centrados en cada uno de sus vértices y que unen los vértices opuestos, llamado *triángulo de Reuleaux*. Esta construcción puede generalizarse a polígonos regulares de $\mathbb{R}^2$ con un número impar de lados (necesitamos la condición de imparidad para poder unir mediante un arco circular centrado en un vértice P del polígono los dos vértices "opuestos" a P). Estos polígonos se llaman *polígonos de Reuleaux*.

- La función $w(K,\cdot)\colon \mathbb{S}^{n-1}(1) \to [0,\infty)$ que a cada $u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)$ le asocia la anchura de K en la dirección de u es *continua:* esto se deduce de que $w(K,u) = h_K(u) + h_K(-u)$ y de que h_K es continua (h_K es convexa en $\mathbb{R}^n$ por el apartado (4) de la Proposición 1.7.1, luego continua por el Lema 1.7.1).

- Como $w(K,\cdot)$ es continua en el compacto $\mathbb{S}^{n-1}(1)$, existen su máximo y mínimo absolutos:

$$D(K) = \text{máx}\{w(K,u) \mid u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)\}, \quad \Delta(K) = \text{mín}\{w(K,u) \mid u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)\}.$$

A $\Delta(K)$ se le llama la *anchura total* de K.

Proposición 1.7.3 *Dado $K \in \mathcal{K}^n$, se tiene $D(K) = \operatorname{diam}(K)$.*

Demostración. Como K es compacto, existen $x, y \in K$ tales que $\operatorname{diam}(K) = \|x - y\|$. Si $\operatorname{diam}(K) = 0$, entonces $K = \{x\}$ luego $w(K,u) = 0$ $\forall u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)$, de donde $D(K) = 0$. Así que podemos suponer $\operatorname{diam}(K) > 0$ en lo que sigue. En particular, $x \neq y$. Consideremos los hiperplanos

$$H_x = x + \langle x - y\rangle^\perp, \quad H_y = y + \langle x - y\rangle^\perp.$$

H_x, H_y son hiperplanos soporte de K (ya que $x, y \in K$ y K está contenido en el semiespacio determinado por H_x en el que está y, y en el semiespacio determinado por H_y en que que está x). Por tanto,

$$D(K) \geq w\left(K, \frac{x-y}{\|x-y\|}\right) = d(H_x, H_y) = \|x - y\| = \operatorname{diam}(K).$$

Para la desigualdad contraria, tomemos $u_0 \in \mathbb{S}^{n-1}(1)$ tal que $D(K) = w(K, u_0)$, que existe por ser $\mathbb{S}^{n-1}(1)$ compacto y $w(K, \cdot)$ continua. Así, $H_{u_0, h_K(u_0)}, H_{-u_0, h_K(-u_0)}$ son hiperplanos soporte de K y las distancia entre ambos hiperplanos es $D(K)$. Tomemos $x_0 \in K \cap H_{u_0, h_K(u_0)}$, $y_0 \in K \cap H_{-u_0, h_K(-u_0)}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
D(K) &= d\left(H_{u_0,h_K(u_0)}, H_{-u_0,h_K(-u_0)}\right) \\
&= \text{ínf}\{d(x,y) \mid x \in H_{u_0,h_K(u_0)},\ y \in H_{-u_0,h_K(-u_0)}\} \\
&\leq d(x_0, y_0) \\
&\leq \operatorname{diam}(K).
\end{aligned}$$

□

Proposición 1.7.4 *Dados $K, L \in \mathcal{K}^n$, se tienen:*

(1) $\operatorname{diam}(K + L) \leq \operatorname{diam}(K) + \operatorname{diam}(L)$.

(2) $\Delta(K + L) \geq \Delta(K) + \Delta(L)$.

Demostración. Veamos (1):

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}(K+L) &= \sup\{d(x,y) \mid x, y \in K + L\} \\
&= \sup\{d(a_x + b_x, a_y + b_y) \mid a_x, a_y \in K,\ b_x, b_y \in L\} \\
&= \sup\{\|(a_x - a_y) + (b_x - b_y)\| \mid a_x, a_y \in K,\ b_x, b_y \in L\} \\
&\leq \sup\{\|a_x - a_y\| + \|b_x - b_y\| \mid a_x, a_y \in K,\ b_x, b_y \in L\} \\
&\leq \sup\{\|a_x - a_y\| \mid a_x, a_y \in K\} + \sup\{\|b_x - b_y\| \mid b_x, b_y \in L\} \\
&= \operatorname{diam}(K) + \operatorname{diam}(L).
\end{aligned}$$

En cuanto a (2),

$$\begin{aligned}
\Delta(K+L) &= \text{mín}\{w(K+L,u) \mid u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)\} \\
&= \text{mín}\{h_{K+L}(u) + h_{K+L}(-u) \mid u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)\} \\
&= \text{mín}\{h_K(u) + h_L(u) + h_K(-u) + h_L(-u) \mid u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)\} \text{ (Proposición 1.7.2-(1))} \\
&\geq \text{mín}\{h_K(u) + h_K(-u) \mid u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)\} + \text{mín}\{h_L(u) + h_L(-u) \mid u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)\} \\
&= \Delta(K) + \Delta(L).
\end{aligned}$$

□

1.8. Dualidad

El término dualidad aparece en muchos campos aparentemente distintos de las matemáticas, relacionando dos teorías, en cierto modo de forma inversa. Esto ocurre, por ejemplo, con la geometría lineal de un espacio vectorial n-dimensional V y su dual V^*: los subespacios k-dimensionales de V se corresponden con subespacios $(n-k)$-dimensionales de V^* una vez que hemos prefijado una métrica no degenerada (por medio de la relación de ortogonalidad vista como núcleo de una aplicación lineal). Algo parecido ocurre en geometría afín o proyectiva, o en álgebra exterior. Hay teorías de dualidad fuera del ámbito (multi)lineal, como la dualidad de Poincaré en cohomología.

En nuestro caso, asociados a los conjuntos convexos, los conos y las funciones convexas, existen objetos duales de la misma clase. De hecho, ya hemos visto algún resultado en esta línea, con la relación entre compactos convexos de $\mathbb{R}^n$ y funciones sublineales $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (ver la Proposición 1.7.1 y el Teorema 1.7.1). En esta sección exploraremos esta dualidad con más profundidad y trasladaremos ciertos resultados sobre puntos frontera de conjuntos convexos a resultados sobre hiperplanos soporte y viceversa. En este sentido, nos valdremos de la linealidad de la función altura $y \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle x, y\rangle$ respecto a una dirección $x \in \mathbb{R}^n$, para estudiar convexos.

Recordemos que el *espacio dual* de $\mathbb{R}^n$ es

$$(\mathbb{R}^n)^* = \{\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ es lineal}\} = \{\langle x, \cdot\rangle \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R}^n\}.$$

En $\mathbb{R}^n$ tenemos una dualidad entre puntos distintos de $\vec{0}$ e hiperplanos: Podemos identificar cada $x \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ con el hiperplano $\ker(\langle x, \cdot\rangle) = H_{x,0}$.

Definición 1.8.1 Dado $K \in \mathcal{K}^n$, definimos su *dual* K^* como $\{\varphi \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \varphi(y) \leq 1,\ \forall y \in K\}$, o salvo identificación,

$$K^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y\rangle \leq 1,\ \forall y \in K\} \qquad \text{(conjunto } \textit{polar} \text{ de } K).$$

Notemos que K^* no tiene porqué estar en $\mathcal{K}^n$ aunque $K \in \mathcal{K}^n$: por ejemplo, $\{\vec{0}\} \in \mathcal{K}$ y $\{\vec{0}\}^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, \vec{0}\rangle \leq 1\} = \mathbb{R}^n \notin \mathcal{K}$.

Proposición 1.8.1

(1) *Si* $K, L \in \mathcal{K}^n$ *y* $K \subset L$*, entonces* $L^* \subset K^*$.

(2) $\overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, R)^* = \overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, 1/R)$, $\forall R > 0$.

(3) *Dado* $z \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$, $\{z\}^* = H^-_{z,1}$.

Demostración. (1) es trivial. Veamos (2): $\overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, R)^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y\rangle \leq 1,\ \forall y \in \mathbb{B}(\vec{0}, R)\}$. Pongamos $x = \rho\theta$, $y = \mu\alpha$ con $\rho, \mu \geq 0$ y $\theta, \alpha \in \mathbb{S}^{n-1}(1)$. Entonces,

$$\overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, R)^* = \{\rho\theta \mid \rho \geq 0, \theta \in \mathbb{S}^{n-1}(1) \text{ y } \rho\mu\langle\theta, \alpha\rangle \leq 1,\ \forall \mu \in [0, R], \alpha \in \mathbb{S}^{n-1}(1)\} = \overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, 1/R).$$

Finalmente, dado $z \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ tenemos $\{z\}^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, z\rangle \leq 1\} = H^-_{z,1}$. □

Teorema 1.8.1 *Si* $K \in \mathcal{K}^n_0$ *y* $\vec{0} \in \text{int}(K)$*, entonces* $K^* \in \mathcal{K}^n_0$, $\vec{0} \in \text{int}(K^*)$ *y* $(K^*)^* = K$.

Demostración. Empezamos probando que K^* es convexo. Sean $x_1, x_2 \in K^*$ y $\lambda \in [0, 1]$. Dado $y \in K$, $\langle\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, y\rangle = \lambda\langle x_1, y\rangle + (1-\lambda)\langle x_2, y\rangle \leq \lambda + (1-\lambda) = 1$, luego $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in K^*$ y K^* es convexo. K^* es trivialmente cerrado (razonar por sucesiones).

Veamos que $\vec{0} \in \text{int}(K^*)$ y que K^* es acotado: Sabemos que $\vec{0} \in \text{int}(K)$ y K es acotado, luego existen $r, R > 0$ tales que $\overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, r) \subset K \subset \overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, R)$ luego los apartados (1) y (2) de la Proposición 1.8.1 implican que

$$\overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, 1/R) = \overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, R)^* \subset K^* \subset \overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, r)^* = \overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, 1/r),$$

luego $\vec{0} \in \text{int}(K^*)$ y K^* es acotado.

De lo anterior se deduce que $K^* \in \mathcal{K}^n_0$ luego $(K^*)^*$ tiene sentido y está en $\mathcal{K}^n_0$. De la definición de polar tenemos $(K^*)^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y\rangle \leq 1,\ \forall y \in K^*\}$. Por tanto, $K \subset (K^*)^*$. Recíprocamente, supongamos razonando por reducción al absurdo que existe $x \in (K^*)^* - K$. Por el Teorema 1.5.1, existe un hiperplano $H_{u,\alpha} \subset \mathbb{R}^n$ que separa estrictamente (incluso fuertemente) K y $\{x\}$, pongamos $K \subset \text{int}(H^-_{u,\alpha})$ y $\langle x, u\rangle > \alpha$. Como $\vec{0} \in K \subset \text{int}(H^-_{u,\alpha})$, entonces $0 = \langle\vec{0}, u\rangle < \alpha$, es decir, α es positivo. Veamos que $u/\alpha \in K^*$: Dado $y \in K$, dividiendo la desigualdad $\langle y, u\rangle \leq \alpha$ por $\alpha > 0$ obtenemos $\langle y, u/\alpha\rangle \leq 1, \forall y \in K$, de donde $u/\alpha \in K^*$. Finalmente, dividiendo la desigualdad $\langle x, u\rangle > \alpha$ por $\alpha > 0$ obtenemos $\langle x, u/\alpha\rangle > 1$. Como $u/\alpha \in K^*$, concluímos que $x \notin (K^*)^*$, contradicción. □

Nuestro siguiente objetivo es estudiar la relación entre los puntos de ∂K^* (para un $K \in \mathcal{K}^n_0$) y los hiperplanos soporte de K. Necesitamos dos lemas.

Lema 1.8.1 *Sea* $K \in \mathcal{K}^n_0$ *tal que* $\vec{0} \in \text{int}(K)$.

(1) *Dado* $u \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$, *se tiene* $h_K(u) > 0$.

(2) *Si* $u \in K^* - \{\vec{0}\}$, *entonces* $K \subset H^-_{h_K(u)u,h_K(u)}$.

Demostración. Como $\vec{0} \in \text{int}(K)$, existe $r > 0$ tal que $\overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, r) \subset K$. Tomemos $u \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$. Entonces, la Figura 1.13 muestra que

$$h_K(u) = \sup\{\langle x, u\rangle \mid x \in K\} \geq \langle r\tfrac{u}{\|u\|}, u\rangle = r\|u\| > 0,$$

y (1) está probado.

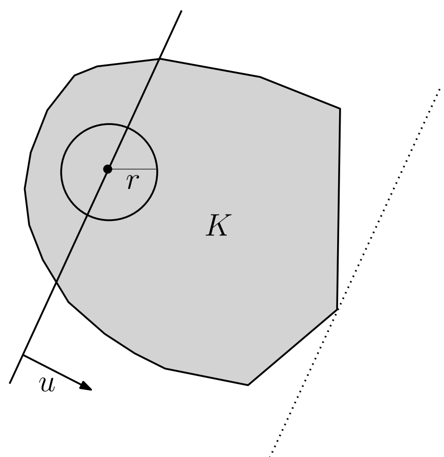


Figura 1.13: $h_K(u) \geq r\|u\| > 0$.

Para ver (2), de $u \in K^*$ se deduce $\langle x, u\rangle \leq 1$ $\forall x \in K$. Como $u \neq \vec{0}$, el apartado (1) asegura que $h_K(u) > 0$. Multiplicando por $h_K(u)$ la penúltima desigualdad tendremos $\langle x, h_K(u)u\rangle \leq h_K(u)$ $\forall x \in K$, de donde $K \subset H^-_{h_K(u)u,h_K(u)}$, que es (2). $\square$

Lema 1.8.2 *Sea* $K \in \mathcal{K}^n_0$ *tal que* $\vec{0} \in \text{int}(K)$.

(1) *Dado* $u \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$, *se tiene* $h_K(u)^{-1}u \in \partial K^*$ *(recordemos que* $h_K(u) > 0$ *por el apartado (1) del Lema 1.8.1).*

(2) *Dado* $z \in \partial K^*$, *el hiperplano* $H_{z,1}$ *es un hiperplano soporte de* K, *siendo* z *un vector normal exterior a* K *en ese punto.*

Demostración. Veamos primero que $h_K(u)^{-1}u \in K^*$. Dado $x \in K$,

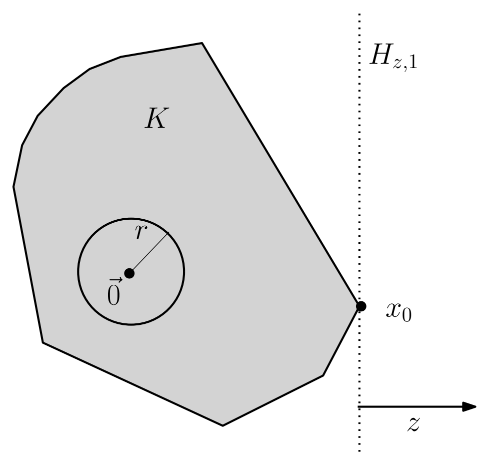
$$\langle x, h_K(u)^{-1}u\rangle = h_K(u)^{-1}\langle x, u\rangle \overset{(\star)}{\leq} h_K(u)^{-1} \sup_{x\in K}\langle x, u\rangle = h_K(u)^{-1}\ h_K(u) = 1.$$

donde en $(\star)$ hemos usado que $h_K(u) > 0$.

Para ver que $h_K(u)^{-1}u \in \partial K^*$ razonamos por reducción al absurdo; supongamos $h_K(u)^{-1}u \in \text{int}(K^*)$. Como $\vec{0} \in \text{int}(K^*)$ por el Teorema 1.8.1 y K^* es convexo (por el mismo teorema), entonces $[\vec{0}, h_K(u)^{-1}u] \subset K^*$, y los dos extremos de este segmento son interiores a K^*. Así, existe $\lambda > 1$ (próximo a 1) tal que $\lambda h_K(u)^{-1}u \in K^*$. Esto quiere decir que $\langle x, \lambda h_K(u)^{-1}u\rangle \leq 1$ $\forall x \in K$, o equivalentemente, $\langle x, u\rangle \leq \frac{h_K(u)}{\lambda} < h_K(u)$ $\forall x \in K$. Esto contradice que $H_{u,h_K(u)}$ es un hiperplano soporte de K. Por tanto, $h_K(u)^{-1}u \in \partial K^*$ y el apartado (1) está probado.

Observación: *El argumento del último párrafo aplicado a $z = h_K(u)^{-1}u$ prueba que si $H_{z,1}$ es un hiperplano soporte de K (siendo $z \in K^* - \{\vec{0}\}$), entonces $z \in \partial K^*$.*

Para el apartado (2), tomemos $z \in \partial K^*$. Notemos que $z \neq \vec{0}$ porque $\vec{0} \in \text{int}(K^*)$, luego el hiperplano $H_{z,1}$ tiene sentido. Como $z \in K^*$, tenemos $K \subset H_{z,1}^-$ luego para ver que $H_{z,1}$ es un hiperplano soporte de K con z vector normal exterior a K, basta probar que $K \cap H_{z,1} \neq \emptyset$. Por reducción al absurdo, supongamos que $K \cap H_{z,1} = \emptyset$. Así, $\langle x, z\rangle < 1$ $\forall x \in K$. Por compacidad de K, existe $x_0 \in K$ tal que $\langle x, z\rangle \leq \langle x_0, z\rangle$ (< 1), $\forall x \in K$. Además, $0 = \langle\vec{0}, z\rangle < \langle x_0, z\rangle$ (la desigualdad estricta se tiene porque $\vec{0} \in \text{int}(K)$).



Dado $x \in K$, $\langle x, \frac{1}{\langle x_0,z\rangle}z\rangle = \frac{\langle x,z\rangle}{\langle x_0,z\rangle} \leq 1$. Por tanto, $\frac{1}{\langle x_0,z\rangle}z \in K^*$. Como $\vec{0} \in K^*$ y K^* es convexo, deducimos que $[\vec{0}, \frac{1}{\langle x_0,z\rangle}z] \subset K^*$. Como $\vec{0} \in \text{int}(K)$, $\frac{1}{\langle x_0,z\rangle}z \in K^*$ y $z \in [\vec{0}, \frac{1}{\langle x_0,z\rangle}z)$, el Lema 1.1.3 asegura que $z \in \mathrm{int}(K^*)$, lo que contradice que habíamos supuesto $z \in \partial K^*$. Esto termina la demostración del Lema. □

Ya podemos enunciar la relación que buscábamos entre los puntos de ∂K^* y los hiperplanos soporte de un convexo $K \in \mathcal{K}_0^n$:

Teorema 1.8.2 *Sea $K \in \mathcal{K}_0^n$ tal que $\vec{0} \in \mathrm{int}(K)$. Entonces, $z \in \partial K^*$ si y sólo si $H_{z,1}$ es un hiperplano soporte de K, siendo z un vector normal exterior a K.*

Demostración. Por el apartado (2) del Lema 1.8.2, basta probar la condición suficiente. Supongamos que $H_{z,1}$ es un hiperplano soporte de K, con $z \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$. Como z es un vector normal exterior a K, entonces $K \subset H_{z,1}^-$ luego $z \in K^*$. Aplicando la observación en la demostración del último lema, concluímos que $z \in \partial K^*$. □

Definición 1.8.2 Sea $K \in \mathcal{K}_0^n$ y $x \in \partial K$. Por el apartado (1) del Teorema 1.4.1, existe un hiperplano soporte de K en x. Diremos que x es un punto *regular* si el hiperplano soporte de K en x es único (en caso contrario, x se dice un punto *singular*).

Dado $K \in \mathcal{K}_0^n$ y $u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)$, diremos que u es un *vector normal regular exterior a K* si $F(K,u) = H(K,u) \cap K = H_{u,h_K(u)} \cap K$ se reduce a un punto: $F(K,u) = \{x(u)\}$. Por la Definición 1.6.2, $u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)$ es vector normal regular exterior a K si y sólo si $x(u) \in \partial K$ es un *punto expuesto.*

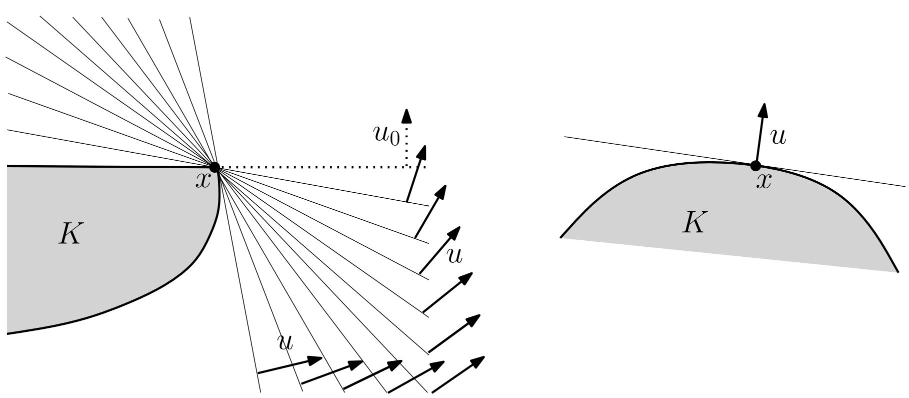


Figura 1.14: Izquierda: $x \in \partial K$ es singular, pero todos los demás puntos de ∂K son regulares. u_0 no es vector normal regular exterior a K, pero todos los demás vectores u son normales exteriores regulares a K. Derecha: En el caso ∂K diferenciable con curvatura positiva, $x \in \partial K$ es un punto regular y el vector normal unitario u a ∂K en x es un vector normal regular exterior a K.

Supongamos que $K \in \mathcal{K}_0^3$ tiene por frontera una superficie diferenciable. Si H es un plano soporte de K en un punto $x \in \partial K$, entonces H es el plano tangente afín a la superficie ∂K. En particular, H es único, o equivalentemente, x es un punto regular. Esto puede generalizarse a $K = \overline{\mathbb{B}}(x_0, R) \subset \mathbb{R}^n$ o a cualquier convexo compacto cuyo borde es una hipersuperficie diferenciable compacta de $\mathbb{R}^n$ (Figura 1.14 derecha).

En el ejemplo del párrafo anterior, todos los puntos de ∂K son regulares y si la curvatura de Gauss de ∂K es positiva, entonces todos los vectores $u \in \mathbb{S}^2(1)$ son vectores normales regulares exteriores a K (porque la aplicación de Gauss $N \colon \partial K \to \mathbb{S}^2(1)$ es un difeomorfismo y todos los puntos de ∂K son de tipo elíptico). Ninguna de estas dos propiedades son ciertas para un $K \in \mathcal{K}_0^n$ general: los vértices de un polígono en $\mathbb{R}^2$ no son regulares, y los vectores unitarios normales exteriores a los lados del polígono no son regulares. Pero veremos que si $K \in \mathcal{K}_0^n$, entonces el conjunto de puntos singulares de ∂K y el conjunto de vectores normales exteriores a K no regulares son, en cierta forma, "pequeños":

Teorema 1.8.3 *Sea $K \in \mathcal{K}_0^n$. Entonces:*

(1) *El conjunto $\{x \in \partial K \mid x \text{ es regular}\}$ es denso en ∂K.*

(2) *El conjunto $\{u \in \mathbb{S}^{n-1}(1) \mid u \text{ es un vector normal regular exterior a } K\}$ es denso en $\mathbb{S}^{n-1}(1)$.*

Demostración. Para el apartado (1), tomemos $z \in \partial K$ y $\delta > 0$, y veamos que existe $x \in \partial K$ regular en $\mathbb{B}(z, \delta)$. Elegimos $y \in \text{int}(K) \cap \mathbb{B}(z, \delta/3)$ y sea $r_0 = \sup\{r > 0 \mid \overline{\mathbb{B}}(y, r) \subset K\}$ (este supremo existe y es un máximo, por ser K compacto). Notemos que:

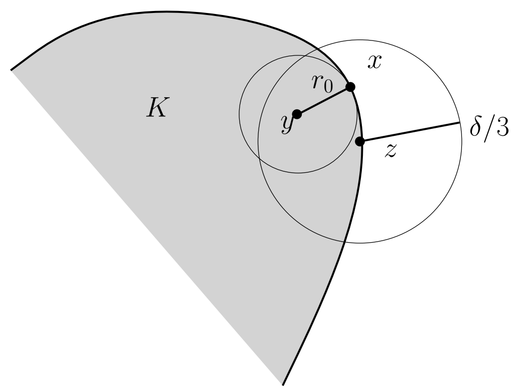
- $r_0 \leq d(y, z)$: en caso contrario, tomando $\varepsilon \in (0, r_0 - d(y, z))$ tendríamos $\overline{\mathbb{B}}(y, d(y, z) + \varepsilon) \subset K$ luego $z \in \text{int}(K)$, contradicción.
- Por ser r_0 un máximo, existe $x \in \partial \overline{\mathbb{B}}(y, r_0) \cap \partial K$.

Veamos que $x \in \overline{\mathbb{B}}(z, \delta)$: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = r_0 + d(y, z) < r_0 + \frac{\delta}{3}$. Como $r_0 \leq d(y, z) < \frac{\delta}{3}$, entonces $d(x, z) < r_0 + \frac{\delta}{3} < 2\frac{\delta}{3} < \delta$. Por tanto, $x \in \overline{\mathbb{B}}(z, \delta)$.

Veamos ahora que x es un punto regular de ∂K: Si H es un hiperplano soporte de K en x, con $K \subset H^-$, entonces $\mathbb{B}(y, r_0) \subset K \subset H^-$ y $x \in H \cap \partial \overline{\mathbb{B}}(y, r_0)$, luego H es un hiperplano soporte de $\overline{\mathbb{B}}(y, r_0)$. Por la observación del penúltimo párrafo antes de este teorema, H debe ser el hiperplano tangente a $\mathbb{S}^{n-1}(y, r_0)$ en x, luego H es único; esto nos dice que x es un punto regular de ∂K, y (1) está probado.

Para el apartado (2), tras una traslación de K en $\mathbb{R}^n$ podemos suponer que $\vec{0} \in \text{int}(K)$. La clave del argumento está en la siguiente

Afirmación 1.8.1 *Sea $K \in \mathcal{K}_0^n$ con $\vec{0} \in \text{int}(K)$. Entonces, $u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)$ es un vector normal singular exterior a K si y sólo si $z = h_K(u)^{-1}(u)$ es un punto singular de ∂K^*.*



Demostración de la Afirmación 1.8.1. Primero notemos que $h_K(u) > 0$ por el apartado (1) del Lema 1.8.1, y que $z \in \partial K^*$ por el apartado (1) del Lema 1.8.2.
$\boxed{\Rightarrow}$ Si $u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)$ es un vector normal singular exterior a K, entonces $F(K, u)$ contiene más de un elemento. Como $F(K, u) = H(K, u) \cap K$ es convexo, entonces $F(K, u)$ contiene un segmento I no trivial. Tomemos un punto $z_1 \in I$ (en particular, $z_1 \neq \vec{0}$). Así, $\{z_1\} \subset I \subset K$ luego los apartados (1) y (3) de la Proposición 1.8.1 aseguran que

$$K^* \subset I^* \subset \{z_1\}^* = H^-_{z_1,1}, \quad \forall z_1 \in I. \tag{1.18}$$

Por otro lado, $I \subset F(K, u) \subset H(K, u) = H_{u,h_K(u)} = H_{z,1}$ (porque $z = h_K(u)^{-1}u$), luego $\langle z_1, z\rangle = 1$ $\forall z_1 \in I$, es decir

$$z \in H_{z_1,1}, \quad \forall z_1 \in I. \tag{1.19}$$

Por el apartado (1) del Lema 1.8.2, $z \in \partial K^*$. De (1.18) y (1.19) deducimos que $H_{z_1,1}$ es un hiperplano soporte de K^* en z, $\forall z_1 \in I$. Como I no se reduce a un sólo punto, concluímos que el hiperplano soporte de K^* en z no es único, luego z es un punto singular de ∂K^*.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos ahora que $z = h_K(u)^{-1}(u)$ es un punto singular de ∂K^* (z está en ∂K^* por el apartado (1) del Lema 1.8.2). Así, existen hiperplanos soporte distintos de K^* en z, que podemos escribir de la forma $H_{v,1}, H_{w,1} \subset \mathbb{R}^n$, con $v \neq w$ en $\mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ ya que $z \neq \vec{0}$ por ser $z \in \partial K^*$ y $\vec{0} \in \text{int}(K^*)$ por el Teorema 1.8.1. Este mismo teorema nos dice que $K^* \in \mathcal{K}^n_0$ luego podemos aplicar el Teorema 1.8.2 a K^* y a sus hiperplanos soporte $H_{v,1}, H_{w,1}$ para concluir que

$$v, w \in \partial\left[(K^*)^*\right] = \partial K, \tag{1.20}$$

donde en la última igualdad hemos usado de nuevo el Teorema 1.8.1. Por otro lado, como $H_{v,1}$ es un hiperplano soporte de K^* en z, tenemos $1 = \langle v, z\rangle = \langle v, h_K(u)^{-1}(u)\rangle$, luego

$\langle v, u\rangle = h_K(u)$, es decir, $v \in H(K, u)$. Análogamente, $w \in H(K, u)$. Esto junto con (1.20) implica que $v, w \in F(K, u)$, luego u es un vector normal singular exterior a K, y la afirmación está probada. $\square$

Veamos ya la demostración del apartado (2) del Teorema 1.8.3: Consideremos las aplicaciones

$$\begin{array}{rccc} \phi\colon & \mathbb{S}^{n-1}(1) & \to & \partial K^* \\ & u & \mapsto & h_K(u)^{-1}u = z \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \psi\colon & \partial K^* & \to & \mathbb{S}^{n-1}(1) \\ & z & \mapsto & \frac{z}{\|z\|}. \end{array}$$

Notemos que ϕ tiene sentido por el apartado (1) del Lema 1.8.2, y ψ tiene sentido porque $\vec{0} \in \text{int}(K)$ (Teorema 1.8.1). Veamos que ϕ, ψ son inversas:

$$(\psi \circ \phi)(u) = \psi\left(h_K(u)^{-1}u\right) = \frac{h_K(u)^{-1}u}{\|h_K(u)^{-1}u\|} = u, \quad \forall u \in \mathbb{S}^{n-1}(1),$$

donde hemos usado que $h_K(u) > 0$. Dado $z \in \partial K^*$,

$$(\phi \circ \psi)(z) = \phi\left(\frac{z}{\|z\|}\right) = \frac{1}{h_K\left(\frac{z}{\|z\|}\right)}\frac{z}{\|z\|} = \frac{1}{\sup_{k\in K}\langle k, \frac{z}{\|z\|}\rangle}\frac{z}{\|z\|} = \frac{1}{\sup_{k\in K}\langle k, z\rangle}z.$$

Como $z \in \partial K^*$, $H_{z,1}$ es un hiperplano soporte de K por el Teorema 1.8.2, luego $\langle k, z\rangle \le 1$ $\forall k \in K$ con igualdad en al menos un punto de K, donde $H_{z,1}$ sea hiperplano soporte de K. Por tanto, el supremo que aparece en el último denominador es 1, y deducimos que $(\phi \circ \psi)(z) = z$ $\forall z \in \partial K^*$. Así, ϕ, ψ son aplicaciones inversas.

Tomemos $r > 0$ tal que $\overline{\mathbb{B}} = \overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, r) \subset \text{int}(K^*)$. Por la Nota 1.2.2, la aplicación $F = \left(p_{\overline{\mathbb{B}}}\right)|_{\partial K^*}\colon \partial K^* \to \mathbb{S}^{n-1}(r) = \partial\overline{\mathbb{B}}$ es un homeomorfismo. Como ψ es la composición de F con la homotecia de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo de razón $1/r$, concluímos que ψ es un homeomorfismo. Por el apartado (1) de este teorema aplicado a $K^* \in \mathcal{K}_0^n$, el conjunto $\{x \in \partial K^* \mid x \text{ es regular}\}$ es denso en ∂K^*. Como la densidad se conserva por homeomorfismos, $\psi(\{x \in \partial K^* \mid x \text{ es regular}\})$ es denso en $\mathbb{S}^{n-1}(1)$. Finalmente, la Afirmación 1.8.1 asegura que

$$\psi(\{x \in \partial K^* \mid x \text{ es regular}\}) = \{u \in \mathbb{S}^{n-1}(1) \mid u \text{ es un vector normal regular exterior a } K\},$$

lo que termina la demostración del teorema. $\square$

Nota 1.8.1 Puede probarse que la medida de Hausdorff $(n-1)$-dimensional del conjunto de puntos singulares de ∂K es cero, para cualquier $K \in \mathcal{K}_0^n$. Como $\psi\colon \partial K^* \to \mathbb{S}^{n-1}(1)$ es Lipschitziana (ψ es composición de $p_{\overline{\mathbb{B}}}$ con una homotecia, y $p_{\overline{\mathbb{B}}}$ es Lipschitziana por el apartado (3) de la Proposición 1.2.2), entonces lleva conjuntos con medida de Hausdorff $(n-1)$-dimensional cero en conjuntos con medida de Hausdorff $(n-1)$-dimensional cero. Por tanto, la medida de Hausdorff $(n-1)$-dimensional del conjunto de los vectores normales unitarios normales singulares exteriores a K también es cero, para cualquier $K \in \mathcal{K}_0^n$.

1.9. Teorema de Helly y consecuencias

Teorema 1.9.1 (Helly, 1921) *Sea $\mathcal{A}$ una colección de k conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$, $k \geq n+1$. Supongamos que para cualesquiera $A_1, \ldots, A_{n+1} \in \mathcal{A}$ se tiene $A_1 \cap \ldots \cap A_{n+1} \neq \emptyset$. Entonces, $\cap_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$.*

Demostración. Por inducción sobre k. Si $k = n+1$, el resultado es trivial. Supongamos que $k > n+1$ y que el teorema es cierto para toda famillia de $k-1$ convexos de $\mathbb{R}^n$. Tomemos una familia $\mathcal{A}$ de convexos de $\mathbb{R}^n$ cumpliendo la hipótesis del teorema. Dado $i = 1, \ldots, k$, sea $\mathcal{A}_i = \mathcal{A} - \{A_i\}$. La nueva familia $\mathcal{A}_i$ satisface la hipótesis del teorema, ya que $\mathcal{A}$ la satisface. Como $\mathcal{A}_i$ tiene $k-1$ elementos, podemos aplicarle la hipótesis de inducción, es decir

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}_i} A \neq \emptyset.$$

Tomemos ahora $x_i \in \cap_{A \in \mathcal{A}_i} A$, para cada $i = 1, \ldots, k$. Consideremos el sistema homogéneo de $n+1$ ecuaciones lineales con incógnitas $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = \vec{0}, \qquad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0. \tag{1.21}$$

Como $k > n+1$, existe solución no trivial al sistema, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \neq (0, \ldots, 0)$ (en particular, $x_1, \ldots, x_k$ son afínmente dependientes en $\mathbb{R}^n$, por el Lema 1.1.2). Reordenando, podemos suponer que $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \geq 0$, $\alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_k < 0$ para cierto $s \in \{1, \ldots, k\}$. Como $0 < -\sum_{i=s+1}^{k} \alpha_i = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i$, tiene sentido definir

$$y = \underbrace{\frac{1}{\sum_{i=1}^{s} \alpha_i} \sum_{i=1}^{s} \alpha_i x_i}_{\text{comb. lineal convexa de } x_1, \ldots, x_s} = \underbrace{\frac{1}{-\sum_{i=s+1}^{k} \alpha_i} \left(-\sum_{i=s+1}^{k} \alpha_i x_i \right)}_{\text{comb. lineal convexa de } x_{s+1}, \ldots, x_k}. \tag{1.22}$$

Para cada $i = 1, \ldots, s$, $x_i \in \mathcal{A} - \{A_i\} \subset A_{s+1} \cap \ldots \cap A_k$, luego por convexidad $y \in A_{s+1} \cap \ldots \cap A_k$. Para cada $i = s+1, \ldots, k$, $x_i \in \mathcal{A} - \{A_i\} \subset A_1 \cap \ldots \cap A_s$, luego por convexidad $y \in A_1 \cap \ldots \cap A_s$. Por lo tanto, $y \in \cap_{A \in \mathcal{A}} A$. □

Corolario 1.9.1 (Lema de Radon, 1921) *Sean $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$, $k \geq n+2$. Entonces, existe una partición A, B de $\{x_1, \ldots, x_k\}$ de forma que* $\text{conv}(A) \cap \text{conv}(B) \neq \emptyset$.

Demostración. Como el número máximo de puntos afínmente independientes en $\mathbb{R}^n$ es $n+1$, los puntos $x_1, \ldots, x_k$ son afínmente dependientes. Por el Lema 1.1.2, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que (1.21) se cumple. Siguiendo el razonamiento de la demotración del Teorema de Helly desde ese punto (y con la misma notación), (1.22) implica que definiendo $A = \text{conv}(\{x_1, \ldots, x_s\})$, $B = \text{conv}(\{x_{s+1}, \ldots, x_k\})$ se tiene $\text{conv}(A) \cap \text{conv}(B) \neq \emptyset$. $\square$

En Lema de Radon es la generalización de una propiedad obvia en $\mathbb{R}^2$: si tenemos 4 puntos en el plano, entonces es posible distribuirlos en una de las dos siguientes opciones:

- $A =$ los vértices de un triángulo y $B =$ el cuarto punto, o bien
- $A =$ los vértices de un segmento y $B =$ los vértices de otro segmento,

de forma que en el primer caso, el cuarto punto está en el triángulo, y en el segundo caso, los dos segmentos se cortan. El primer caso es cuando la envolvente convexa de los cuatro puntos es un triángulo, y el segundo caso es cuando esta envolvente convexa es un cuadrilátero (o un segmento). Cabe destacar que el Lema de Radon es equivalente al Teorema de Helly, y que ambos son pilares fundamentales de la geometría combinatoria.

Corolario 1.9.2 *Sea $\mathcal{A}$ una colección finita de conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexo tal que para cualesquiera $A_1, \ldots, A_{n+1} \in \mathcal{A}$, existe $t \in \mathbb{R}^n$ tal que $(C+t) \cap A_i \neq \emptyset$, $\forall i = 1, \ldots, n+1$. Entonces, existe $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $(C + z) \cap A \neq \emptyset$, $\forall A \in \mathcal{A}$.*

Demostración. Consideremos la familia de convexos $\mathcal{F} = \{A - C \mid A \in \mathcal{A}\}$ (la convexidad se deduce del apartado (3) de la Proposición 1.1.1). Veamos si $\mathcal{F}$ cumple las hipótesis del Teorema de Helly: Sean $A_1, \ldots, A_{n+1} \in \mathcal{A}$. Por hipótesis, existe $t \in \mathbb{R}^n$ tal que $(C+t) \cap A_i \neq \emptyset$ $\forall i = 1, \ldots, n+1$. Por tanto, podemos elegir $x_i \in A_i$, $c_i \in C$ tales que $x_i = c_i + t$, $\forall i = 1, \ldots, n+1$. Así, $t = x_i - c_i \in A_i - C$ $\forall i = 1, \ldots, n+1$ luego $t \in \cap_{i=1}^{n+1}(A_i - C)$. Por el Teorema de Helly, existe $z \in \cap_{A \in \mathcal{A}}(A - C)$. Finalmente, dado $A \in \mathcal{A}$ tenemos $z \in A - C$ luego $\exists a \in A$, $c' \in C$ tales que $z = a - c'$. Así, $c' + z \in A$ luego $(C + z) \cap A \neq \emptyset$. $\square$

En el Teorema de Caratheodory (Teorema 1.1.1) se obtenía que todo punto de $\text{conv}(A)$ es combinación lineal convexa de a lo sumo $n+1$ puntos de A si $A \subset \mathbb{R}^n$. A continuación rebajaremos en 1 la longitud de la combinación lineal convexa, supuesto que el número de componentes conexas de A no supera a n.

Teorema 1.9.2 (Extensión del Teorema de Caratheodory) *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto con $r \leq n$ componentes conexas. Entonces, todo punto de* $\text{conv}(A)$ *es combinación lineal convexa de, a lo sumo, n puntos de A.*

Demostración. Sea $y \in \text{conv}(A)$. El Teorema de Caratheodory nos asegura que existen $x_i \in A$, $i = 1, ..., k$, afínmente independientes, tales que $y = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$, con $\lambda_i \geq 0$ $\forall i$ y $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Como los x_i son afínmente independientes, tenemos $k \leq n+1$. Si $k \leq n$ o bien algún λ_i es cero, entonces y sería combinación lineal convexa de a lo más n puntos de A, que es lo que deseamos probar. Por tanto, podemos suponer que $k = n+1$ y $\lambda_i > 0$ $\forall i = 1, \ldots, n+1$. Trasladando A, podemos suponer que $y = \vec{0}$. Para cada $i = 1, \ldots, n+1$ definimos

$$x'_i = -x_i, \qquad T_i = \text{cono de vértice } \vec{0} \text{ y base } \mathrm{conv}(\{x'_1, \ldots, \widehat{x'_i}, \ldots, x'_{n+1}\}).$$

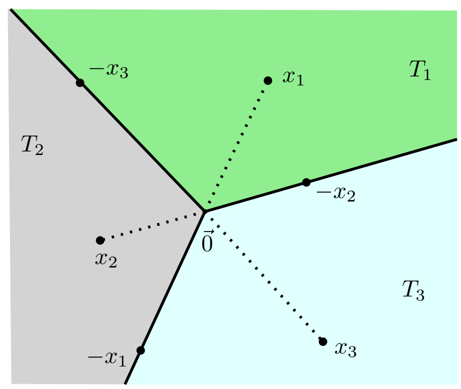


Figura 1.15: Caso particular $n = 2$: la demostración consistirá en encontrar un punto $x \in A$ en el segmento $[\vec{0}, -x_3]$; esto implicará que $\vec{0}$ se escribe como combinación lineal convexa de 2 puntos de A (x y x_3).

Observamos que:

$$T_i = \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \mu_j x'_j \mid \mu_j \geq 0 \ \forall j \right\}, \qquad \mathrm{int}(T_i) = \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \mu_j x'_j \mid \mu_j > 0 \ \forall j \right\},$$

$$\partial T_i = \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \mu_j x'_j \mid \mu_j \geq 0 \ \forall j \text{ y algún } \mu_j \text{ es } 0 \right\}.$$

Veamos que $x_i \in \mathrm{int}(T_i)$ $\forall i$: Como $y = \vec{0}$, tenemos $\vec{0} = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j = \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \lambda_j x_j \right) + \lambda_i x_i$, de donde $x_i = \frac{1}{\lambda_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \lambda_j x'_j$. Como $\lambda_j > 0$ para todo $j = 1, \ldots, n+1$, deducimos que $x_i \in \mathrm{int}(T_i)$.

Ahora veamos que $\mathbb{R}^n = \cup_{i=1}^{n+1} T_i$: Como $x_1, \ldots, x_{n+1}$ son afínmente independientes, $\mathrm{conv}(\{x_1, \ldots, x_{n+1}\})$ es un n-símplex en $\mathbb{R}^n$. Como $\vec{0} = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j$ con todos los $\lambda_j > 0$, deducimos que $\vec{0} \in \mathrm{int}(\mathrm{conv}(\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}))$. Así,

$$\vec{0} = -1_{\mathbb{R}^n}(\vec{0}) \in -1_{\mathbb{R}^n}\left[\mathrm{int}(\mathrm{conv}(\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}))\right]$$

$$= \mathrm{int}(\mathrm{conv}(\{-x_1, \ldots, -x_{n+1}\})) = \mathrm{int}(\mathrm{conv}(\{x'_1, \ldots, x'_{n+1}\})).$$

Lo anterior implica que el cono sobre el n-símplex $\mathrm{conv}(\{x'_1, \ldots, x'_{n+1}\})$ es todo $\mathbb{R}^n$. Pero dicho cono es la unión de los conos sobre las $n+1$ caras del n-símplex, que son $\mathrm{conv}(\{x'_1, \ldots, \widehat{x'_i}, \ldots, x'_{n+1}\})$, $\forall i = 1, \ldots, n+1$. Por tanto, el cono sobre la cara anterior es T_i. Es decir, $\mathbb{R}^n = \cup_{i=1}^{n+1} T_i$. Notemos que este mismo argumento prueba que $\mathrm{int}(T_i) \cap \mathrm{int}(T_j) = \emptyset$ $\forall i \neq j$.

Supongamos que $\forall j \in \{1, \ldots, n+1\}$ se tiene $A \cap \partial T_j = \emptyset$. Como $\mathbb{R}^n = \cup_{i=1}^{n+1} T_i$, tenemos $A \subset \cup_{i=1}^{n+1} \mathrm{int}(T_i)$. Como $x_j \in A \cap \mathrm{int}(T_j)$ para cada j y $\mathrm{int}(T_i) \cap \mathrm{int}(T_j) = \emptyset$ $\forall i \neq j$, tendríamos que A tiene al menos $n+1$ componentes conexas. Esto contradice la hipótesis sobre el número de componentes conexas de A. Por tanto, existe $j \in \{1, \ldots, n+1\}$ tal que $A \cap \partial T_j \neq \emptyset$.

Finalmente, del párrafo anterior tenemos que reordenando los índices si fuera necesario, existe un punto $x \in A \cap \partial T_1$. Así, $x = \sum_{j=2}^{n+1} \mu_j x'_j$ con $\mu_j \geq 0$ $\forall j$ y algún μ_j es cero. De nuevo reordenando los índices $2, \ldots, n$ podemos suponer $\mu_2 = 0$, es decir, $x = \sum_{j=3}^{n+1} \mu_j x'_j$. Por tanto,

$$\underbrace{\frac{1}{1 + \sum_{j=3}^{n+1} \mu_j}\left(1 \cdot x + \sum_{j=3}^{n+1} \mu_j x_j\right)}_{\text{comb. lineal convexa de } x, x_3, \ldots, x_{n+1} \in A} = \frac{1}{1 + \sum_{j=3}^{n+1} \mu_j}\left(\sum_{j=3}^{n+1} \mu_j (x'_j + x_j)\right) = \vec{0},$$

con lo que hemos escrito $\vec{0}$ como combinación lineal convexa de n puntos de A. Esto termina la demostración. □

1.10. Polígonos, poliedros y politopos

Dentro de la familia de conjuntos convexos en $\mathbb{R}^n$, la famila más sencilla son los politopos. Este concepto es la generalización a n dimensiones del concepto clásico de polígono convexo en $\mathbb{R}^2$ o de poliedro convexo en $\mathbb{R}^3$.

Definición 1.10.1 Un *politopo* en $\mathbb{R}^n$ es la envolvente convexa de una cantidad finita de puntos.

Por el apartado (4) de la Proposición 1.1.3, todo politopo es compacto. Así, tenemos $\{\text{politopos en } \mathbb{R}^n\} \subset \mathcal{K}^n$. Veremos que en cierta topología sobre $\mathcal{K}^n$, el conjunto de politopos es denso en $\mathcal{K}^n$. Esto nos permitirá probar propiedades para convexos probándolas para politopos y viendo la continuidad de la propiedad respecto de la topología anterior.

Teorema 1.10.1 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado que se escribe como intersección finita de semiespacios cerrados. Entonces, A es un politopo (el recíproco es cierto, ver Ejercicio 22).*

Demostración. A es convexo, por ser intersección de convexos (apartado (1) de la Proposición 1.1.1). A es cerrado, por ser intersección de cerrados. Como A es acotado por hipótesis, entonces A es compacto. Por el Teorema 1.6.4, $A = \overline{\text{conv}\,(\text{extr}(A))}$, donde $\text{extr}(A)$ es el conjunto de puntos extremos de A (Definición 1.6.1). Si probamos que $\text{extr}(A)$ es finito, entonces $\text{conv}(\text{extr}(A))$ será por definición un politopo de $\mathbb{R}^n$, y como $A = \overline{\text{conv}\,(\text{extr}(A))} = \text{conv}\,(\text{extr}(A))$ habremos terminado. Veamos entonces que $\text{extr}(A)$ es finito, por inducción sobre $\dim A$.

Si $\dim A = 1$, entonces $A = [a, b] \subset \mathbb{R}^n$ con $a \leq b$ luego $\text{extr}(A) = \{a, b\}$. Supongamos que $\text{extr}(A)$ es finito siempre que $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto acotado que se escribe como intersección finita de semiespacios cerrados con $\dim A \leq k - 1$, y sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado que se escribe como intersección finita de semiespacios cerrados, con $\dim A = k$. Por hipótesis, $A = H_1^+ \cap \ldots \cap H_m^+$ donde cada H_i^+ es un semiespacio cerrado de $\mathbb{R}^n$, bordeado por un hiperplano H_i. Así,

$$\text{extr}(A) \subset \partial A \subset H_1 \cup \ldots \cup H_m. \tag{1.23}$$

Por otro lado, como cada H_i es un semiespacio soporte del convexo A, el Lema 1.6.1 asegura que

$$\text{extr}(A) \cap H_i = \text{extr}(A \cap H_i), \quad \forall i = 1, \ldots, m. \tag{1.24}$$

Por otro lado, $A \cap H_i$ es convexo, acotado y se escribe como intersección finita de semiespacios cerrados de $H_i \equiv \mathbb{R}^{n-1}$ y $\dim(A \cap H_i) = k - 1$ luego por hipótesis de inducción, $\text{extr}(A \cap H_i)$ es finito. Finalmente,

$$\text{extr}(A) \overset{(1.23)}{=} \text{extr}(A) \cap (\cup_{i=1}^m H_i) = \cup_{i=1}^m (\text{extr}(A) \cap H_i) \overset{(1.24)}{=} \cup_{i=1}^m \text{extr}(A \cap H_i),$$

que es finito por ser unión finita de conjuntos finitos. □

1.11. Ejercicios.

1. Calcular la envolvente convexa en $\mathbb{R}^2$ del conjunto
$$A = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1\} \cup \{(0, 1)\}.$$

2. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo y $C \subset \partial A$. Probar que si ∂A no contiene ningún segmento, entonces $A - C$ es convexo.

3. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo y cerrado, y $p \in \operatorname{int}(A)$. Demostrar que si A no es compacto, entonces existe una semirrecta $R \subset A$ que parte de p.

4. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un cerrado convexo, y sean $x, y \in \mathbb{R}^n - A$ tales que $p_A(x) = p_A(y)$. Probar que $\forall z \in [x, y]$, se tiene $p_A(z) = p_A(x)$.

5. Sea $A = \operatorname{conv}(\{(-1, -1), (-1, 1), (1, -1)\})$. Calcular explícitamente la proyección métrica $p_A \colon \mathbb{R}^2 \to A$.

6. Probar que si $A \subset \mathbb{R}^n$ es convexo, entonces $\operatorname{rel\,int}(A) = \operatorname{rel\,int}(\overline{A})$ y $\overline{\operatorname{rel\,int}(A)} = \overline{A}$.

7. Demostrar que si $A \subset \mathbb{R}^n$ cumple que A y $\mathbb{R}^n - A$ son convexos, entonces ∂A es un hiperplano (indicación: probar que si H_x es un hiperplano soporte de $\overline{A}$ en $x \in \partial A$, entonces H_x es también hiperplano soporte de $\overline{\mathbb{R}^n - A}$ en x, y es el único hiperplano soporte tanto de $\overline{A}$ como de $\overline{\mathbb{R}^n - A}$ en x).

8. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y H un hiperplano soporte de $\operatorname{conv}(A)$. Demostrar que $A \cap H \neq \emptyset$.

9. Calcular todos los hiperplanos soporte del convexo de $\mathbb{R}^2$
$$A = \operatorname{conv}\left(\{(0, 2), (2, 1), (2, 2)\}\right).$$

10. ¿Es el hiperplano de $\mathbb{R}^2$ de ecuación $x - 5y - 2 = 0$ soporte del convexo $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + y| + 3|y| \leq 1\}$?

11. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo. Demostrar que $x \in A$ es un punto extremo de A si y sólo si $A - \{x\}$ es convexo.

12. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo. Probar que si $A \neq \exp(A)$, entonces $A - \exp(A)$ es convexo.

13. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y convexo, tal que $\partial A \neq \emptyset$ es cerrada y acotada. Demostrar que A es compacto y $A = \operatorname{conv}(\partial A)$.

14. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un cerrado. Probar que para todo $u \in \mathbb{R}^n$,
$$h_{\operatorname{conv}(A)}(u) = \sup\{\langle a, u\rangle \mid a \in A\}.$$

15. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y convexo. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n - A$ tales que $p_A(x) = p_A(y) := z$. Probar que si x, y, z son afínmente independientes, entonces z no es un punto regular de A.

16. Determinar explícitamente el conjunto polar de
$$A = \mathrm{conv}\left(\{(1,0),(0,1),(-1,-1)\}\right).$$

17. Calcular el conjunto polar del segmento de $\mathbb{R}^2$ dado por $A = [(-1,0),(0,-1)]$.

18. Sea $K \in \mathcal{K}^n$. Probar que $K^* = K$ si y sólo si $K = \overline{\mathbb{B}}(1)$.

19. Sea $K \in \mathcal{K}_0^n$ tal que $K = -K$. Demostrar que la aplicación $\|\cdot\|_K \colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ dada por $\|x\|_K = h_K(x)$ es una norma en $\mathbb{R}^n$, que tiene a K^* como bola unidad cerrada para dicha norma.

20. Calcular el conjunto de puntos y vectores regulares para el convexo
$$K = \mathrm{conv}\left(\{(0,0),(1,0),(0,1)\}\right).$$

21. Sea $K \in \mathcal{K}^n$. Usar el teorema de Helly sobre la familia $\mathcal{A} = \{\frac{1}{n}x + K \mid x \in K\}$ para demostrar que existe $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $p - \frac{1}{n}K \subset K$.

22. Si probar que si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un politopo, entonces A es una intersección finita de semiespacios cerrados.