ECUACIONES DIFERENCIALES
(Hoja 4)

Estudio cualitativo de sistemas autónomos

1 *Estudiar los diagramas de fase en los siguientes modelos de ecología en los que dos especies tienen un relación de:*
a) *Comensalismo, una especie se beneficia de la otra y la otra ni se beneficia ni sale perjudicada:*

$$\begin{cases} x' = x(\alpha - \beta x) \\ y' = y(\gamma - \eta y + \delta x). \end{cases}$$

b) *Cooperación o simbiosis, las dos especias se benefician:*

$$\begin{cases} x' = x(\alpha - \beta x + \mu y) \\ y' = y(\gamma - \eta y + \delta x). \end{cases}$$

Se supone que α, μ, γ *y* $\delta > 0$ *y que* η *y* $\beta \geq 0$.

2 *En los siguientes modelos depredador-presa se admite que cierto número de presas* x_r *pueden encontrar un refugio que las hace inaccesible para los depredadores. Las ecuaciones de Lotka-Volterra se convierten en*

$$\begin{cases} x' = +ax - by(x - x_r) \\ y' = -cy + dy(x - x_r). \end{cases}$$

Analizar el retrato de fases y compararlo con el modelo original de las ecuaciones de Lotka-Volterra en los dos siguientes casos:
a) *El número de presas en el refugio es una fracción constante del total,* $x_r = kx$ *con* $0 < k < 1$.
b) *El número de presas del refugio es constante,* $x_r = k$.

3 *Consideramos el sistema bidimensional*

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

siendo f *y* g *funciones de clase* $\mathcal{C}^1$. *Suponiendo que* $f(0, y) = 0$ *para todo* y, *demostrar que el eje* Oy *es un conjunto invariante.*

¿En qué condiciones contiene dicho eje a otros conjuntos invariantes más pequeños? ¿Pueden ser órbitas periódicas?

4 *Sea* f *una función escalar tal que* $f(0) = 0$ *y* $xf(x) > 0$ *para* $x \neq 0$, *demostrar que las trayectorias de*

$$x'' + f(x) = 0$$

son curvas cerradas que rodean al origen en el plano de fases, es decir que el origen es un centro estable pero no asintóticamente estable.

¿Cuál es la situación si $xf(x) < 0$ *para* $x \neq 0$*?*

5 *dado el sistema*

$$\begin{cases} x' = -x + (2 - x)y \\ y' = -y + (2 - y)x. \end{cases}$$

a) *Determinar y clasificar sus puntos de equilibrio.*
b) *Demostrar que el conjunto* $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x < 2,\ 0 < y < 2\}$ *es positivamente invariante.*
c) *Demostrar que toda solución tal que* $(x(0), y(0)) \in \Omega$ *converge a un punto de equilibrio del sistema.*
d) *Esbozar el diagrama de fases en el conjunto* Ω.

6 *Hallar los puntos de equilibrio de los siguientes sistemas y estudiar su estabilidad por el método de la primera aproximación:*

$$a)\ \begin{cases} x' = y+1 \\ y' = x^2+\alpha y^2; \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x' = 1-xy \\ y' = y-x^3; \end{cases} \qquad c)\ \ x''+\alpha(1-x^2)x'+x=0.$$

7 *Dibujar los diagramas de fase de los siguientes sistemas conservativos:*

$$\begin{array}{lll} a)\ x''+xe^{-x^2}=0, & b)\ x''=\dfrac{c}{x^3}-\dfrac{k}{x^2},\ c,\,k>0, & c)\ x''-(x-a)(x^2-a)=0, \\ d)\ x''-\sin x=0, & e)\ x''+\dfrac{1}{1+x^2}=0, & f)\ x''+bx+x^2=0,\ \ b\in\mathbb{R}, \\ g)\ x''+x+\dfrac{1}{x-2}=0, & h)\ x''+x(1-x)(1+\lambda+x)=0, & \lambda\in(-1,1). \end{array}$$

8 *Un sistema* **hamiltoniano** *es un sistema* **conservativo**

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$$

que verifica la condición

$$f_x+g_y=0.$$

Trazar los diagramas de fase de los siguientes sistemas hamiltonianos:

$$a)\ \begin{cases} x' = e^x-1 \\ y' = -ye^x, \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} x' = -x \\ y' = y-x-x^2, \end{cases} \quad c)\ \begin{cases} x' = 2xy-2y \\ y' = x-y^2, \end{cases} \quad d)\ \begin{cases} x' = 2xy \\ y' = x^2-y^2. \end{cases}$$

9 *Integrar la ecuación diferencial de las trayectorias y esbozar el diagrama de fases de los siguientes sistemas:*

$$a)\ \begin{cases} x' = 2x-x^2 \\ y' = -y+xy, \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} x' = xy \\ y' = (x-1)(1+y^3), \end{cases} \quad c)\ \begin{cases} x' = x-3y^2 \\ y' = -y, \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} x' = y^5 \\ y' = -x^3, \end{cases} \quad e)\ \begin{cases} x' = -x \\ y' = 1-x^2-y^2, \end{cases} \quad f)\ \begin{cases} x' = y(y^2-x^2) \\ y' = x(x^2-y^2). \end{cases}$$

10 *Elaborar los diagramas de fase de los sistemas*

$$a)\ \begin{cases} x' = x^2+y^2-1 \\ y' = xy \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x' = y^2-1 \\ y' = xy. \end{cases}$$

(Indicación: Comprobar que si $(x(t),y(t))$ es solución, también lo es $(x(t),-y(t))$.)
¿Qué ocurre co el diagrama de fases del sistema

$$\begin{cases} x' = \varepsilon x^2+y^2-1 \\ y' = xy \end{cases} \qquad \varepsilon\geq 0$$

cuando $\varepsilon\to 0$?

11 *Obtener los diagramas de fase de los siguientes sistemas dados en coordenadas polares:*

$$a)\ \begin{cases} r' = r(r-1)^2(r-2) \\ \theta' = -2 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} r' = ar-r^3 \\ \theta' = 1+e^r \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} r' = r(1-r) \\ \theta' = \sin^2\theta+1-r^2 \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} r' = r-r^3 \\ \theta' = 0. \end{cases}$$