Prueba de nivelación correspondiente a los contenidos de prerrequisitos

Nombre y apellidos:

- Instrucciones: El alumno debe resolver la prueba a mano. Posteriormente, debe escanear sus respuestas como un fichero pdf, incluyendo la portada con los datos cumplimentados, y subirla al curso virtual antes del día 11 de noviembre. Para ello se ha abierto una tarea en el curso virtual que hemos denominado

  "Prueba de nivelación de prerrequisitos"

  en donde el alumno debe subir el archivo.

1. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcl} 1x + 3y + kz &=& 1 \\ kx + 1y + 3z &=& 2 \\ 1x + 7y + kz &=& 1 \end{array}\right\}$$

   (i) Clasifique el sistema según los valores del parámetro k.

   (ii) Resuelva el sistema para $k = 0$.

2. Responda razonadamente a las siguientes preguntas:

   (a) Hallar el número de vectores linealmente independientes que hay en el conjunto

$$\mathbf{S} = \{(1,1,1), (0,2,1), (2,0,-3), (-1,1,2)\}$$

   (b) Un vector no nulo tiene sus tres componentes iguales ¿Puede escribirse como combinación lineal de los dos primeros vectores de $\mathbf{S}$?

   (c) Determina un vector que teniendo sus dos primeras componentes iguales a 1, se pueda poner como combinación lineal de los vectores segundo y tercero de $\mathbf{S}$.

3. Responda razonadamente a las siguientes preguntas:

   (a) Determinar la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f'(x) = (2x+1)e^{-x}$$

   y su gráfica pasa por el origen de coordenadas.

(b) Calcule la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

4. Responda razonadamente a las siguientes preguntas:

   - Estudie el crecimiento de la función

   $$f(x) = e^x(\cos x + senx)$$

   y determine los máximo y mínimos de la función para $x \in [0, 2\pi]$.

   - Represente graficamente la función

   $$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

5. Responda razonadamente a las siguientes preguntas:

   (a) Halle las ecuaciones paramétricas de la recta paralela a $\mathbf{r}$ que pasa por el punto $P(0, -1, -3)$:

   $$\mathbf{r}\left\{\begin{array}{l} 3x - 5y + 7z - 4 = 0 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{array}\right.$$

   (b) Halle la distancia del punto $P(5, 6, 6)$ a la recta $\mathbf{r} = \{(5\lambda, 2 - \lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

1.(a) La matriz y la matriz ampliada del sistema vienen dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix}, \; A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k & 1 \\ k & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & k & 1 \end{pmatrix}.$$

En primer lugar, como existe una submatriz de orden 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 4$$

con determinante no nulo, el rango de A es 2 independientemente del valor del parámetro k. El determinante de A

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{vmatrix} = 4\left(k^2 - 3\right)$$

se anula en los puntos $k_1 = \sqrt{3}$, $k_2 = -\sqrt{3}$. Luego para todo $k \notin \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$ se tiene que el determinante es no nulo y por tanto $\text{rango}(A) = 3$. Es decir

$$\text{rango}(A) = \begin{cases} 2 \text{ si } k \in \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\} \\ 3 \text{ si } k \notin \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\} \end{cases}$$

Aplicamos el Teorema de Rouché-Frobenius en cada caso:

– Si $k \notin \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$, entonces $\text{rango}(A) = 3$ y necesariamente

$$\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3.$$

Por el Teorema de Rouche-Frobenius el sistema es compatible determinado..

– Si $k = -\sqrt{3}$, entonces

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -\sqrt{3} & 1 \\ -\sqrt{3} & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Como

$$\begin{vmatrix} 3 & -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 7 & -\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = -8\sqrt{3} - 12 \neq 0$$

entonces $\text{rango}(A^*) = 3$, y por tanto

$$\text{rango}(A) = 2 \neq 3 = \text{rango}(A^*)$$

Por el Teorema de Rouche-Frobenius el sistema es incompatible.

– Si $k=\sqrt{3}$. Razonando del mismo modo se puede ver que

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 3 & \sqrt{3} & 1\\ \sqrt{3} & 1 & 3 & 2\\ 1 & 7 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{vmatrix} 3 & \sqrt{3} & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 7 & \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix}=8\sqrt{3}-12\neq 0$$

Luego en este caso también rango$(A)=2\neq 3=$rango(A^*) y el sistema es incompatible.

1.(b) Resolvemos matricialmente el sistema en el caso $k=0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 1 \end{pmatrix}\Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 1 \end{pmatrix}\Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{7}{4} & 0 & -\frac{3}{4}\\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 1 \end{pmatrix}\Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

2.(a) Se trata de calcular el rango de la matriz que tiene por filas (ó columnas) los vectores del sistema

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Como mucho el rango de A es el mínimo de sus filas y columnas, en este caso 3. Como existe una submatriz de orden 3 con determinante no nulo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}=-8,$$

rango$(A)=$rango$(\mathbf{S})$=3. Luego 3 es el número máximo de vectores linealmente independientes del sistema $\mathbf{S}$.

2.(b) Consideremos un vector genérico $\mathbf{v}=(a,a,a)$ con las tres componentes iguales a un número $a\in\mathbb{R}$. Una combinación lineal cualquiera de los dos primeros vectores de $\mathbf{S}$ viene dada por

$$\alpha(1,1,1)+\beta(0,2,1)=(\alpha,\alpha+2\beta,\alpha+\beta)$$

en donde $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ parámetros reales. Para que $\mathbf{v}$ sea combinación de los vectores se tiene que cumplir que

$$(a,a,a)=(\alpha,\alpha+2\beta,\alpha+\beta)$$

Tomando $\alpha=a$, $\beta=0$ se cumple la relación y por tanto podemos responder afirmativamente a la pregunta.

2.(c) Consideremos un vector genérico $\mathbf{v}=(1,1,a)$ que tiene sus dos primeras componentes iguales a 1, siendo a un parámetro real a determinar. Nos piden que sea combinación lineal del segundo y tercer vector, luego

$$(1,1,a)=\alpha(0,2,1)+\beta(2,0,-3)$$

en donde $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ parámetros reales. Igualando componente a componente obtenemos tres ecuaciones

$$\begin{aligned}&1=2\beta,\\&1=2\alpha,\\&a=\alpha-3\beta.\end{aligned}$$

De las dos primeras obtenemos directamente que $\beta=\frac{1}{2}$, $\alpha=\frac{1}{2}$. Sustituyendo estos valores en las tercera ecuación determinamos

$$a=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1.$$

Por tanto $(1,1,-1)$ es el vector buscado.

3.(a) Aplicando el primer Teorema Fundamental del Cálculo, integremos a ambos lados igualdad sobre un intervalo arbitrario $[0,x]$

$$\int_0^x f'(s)ds=\int_0^x(2s+1)e^{-s}ds$$

La integral del miembro de la izquierda la podemos determinar directamente ya que sabemos que una primitiva (integral) de un derivada viene dada por la propia función (Regla de Barrow), es decir

$$f(x)-f(0)=\int_0^x(2s+1)e^{-s}ds$$

Como por hipótesis $f(0)=0$, la función f se determina calculando la siguiente integral

$$f(x)=\int_0^x(2s+1)e^{-s}ds=2\int_0^x se^{-s}ds+\int_0^x e^{-s}ds.$$

La primera integral $\int_0^x se^{-s}ds$ se resuelve aplicando integración por partes [1] De esta manera si identificamos $u(s) = s$, $v'(s) = e^{-s}$, se tiene $u'(s) = 1$, $v(s) = -e^{-s}$. Por lo que aplicando directamente la fórmula

$$\begin{aligned}\int_0^x se^{-s}ds &= \left[-e^{-s}s\right]_{s=0}^{s=x} - \int_0^x \left(-e^{-s}\right) ds \\ &= -e^{-x}x - (-e^{-0}0) - \left[e^{-s}\right]_{s=0}^{s=x} \\ &= -e^{-x}x - \left(e^{-x} - 1\right) = 1 - e^{-x} - e^{-x}x.\end{aligned}$$

La segunda integral $\int_0^x e^{-s}ds$ es inmediata

$$\int_0^x e^{-s}ds = \left[-e^{-s}\right]_{s=0}^{s=x} = 1 - e^{-x}.$$

Sustituyendo directamente obtenemos la función

$$f(x) = 2\left(1 - e^{-x} - e^{-x}x\right) + \left(1 - e^{-x}\right) = 3 - 2xe^{-x} - 3e^{-x}$$

3.(b) La fórmula de la recta tangente a una función en un punto cualquiera x_0 viene dada por

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

En este caso $f(0) = 0$,

$$f'(0) = (2x+1)e^{-x}\Big|_{x=0} = 1.$$

Luego la recta tangente viene dada por

$$y = x$$

4.(a) La derivada de $f(x) = e^x(\cos x + \operatorname{sen} x)$ viene dada por

$$f'(x) = 2e^x \cos x$$

y se anula en los puntos $x_1 = \dfrac{\pi}{2}$, $x_2 = \dfrac{3\pi}{2}$. La función f' es positiva en el intervalo $I_+ = \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, y es negativa en el intervalo $I_- = \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$. Luego la función f crece en I_+ y decrece en I_-. Por tanto la función f tiene un máximo local en x_1 y tiene un mínimo local en x_2. Comparando sus valores con los de los extremos de los intervalos podemos determinar si son o no globales. Como

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -e^{\frac{3\pi}{2}} \leq \min\left\{f(0), f(2\pi)\right\} = \min\left\{1, e^{2\pi}\right\} = 1,$$

entonces $x_2 = \dfrac{3\pi}{2}$ es el mínimo global en $[0, 2\pi]$. Del mismo modo, como

$$f(2\pi) = e^{2\pi} \geq \max\left\{f(0), f(\frac{3\pi}{2})\right\} = 1,$$

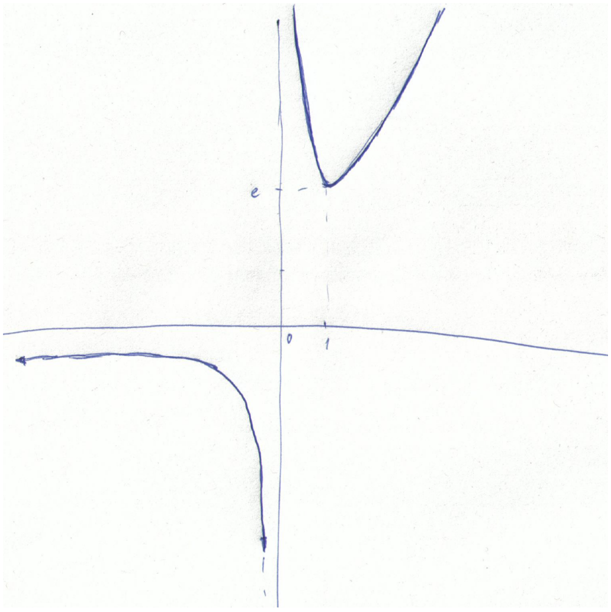
concluímos que $x = 2\pi$ es el máximo global $[0, 2\pi]$.

[1] Recordemos fórmula integración por partes $\int_a^b v'(x)u(s)dx = [v(s)u(s)]_{s=a}^{s=b} - \int_a^b v(x)u'(s)ds)$

4.(b) La función

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

es positiva en el intervalo $I^+ = (0, \infty)$, y negativa en $I^+ = (-\infty, 0)$.



En el punto $x = 0$ no está definida y por tanto la recta vertical $x = 0$ es una asíntota tal que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x}{x} = \infty, \ \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$$

Asimismo el comportamiento en el infinito de la función viene determinado por los límites

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = \infty, \ \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0.$$

Por otra parte, la derivada de la función es

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x}.$$

Luego es f' es positiva en $I_+ = (1, \infty)$, y negativa en $I_+ = (-\infty, 1) \setminus \{0\}$. Como consecuencia, f es creciente en I_+, y decreciente en el resto del dominio de definición de la función. Además podemos deducir que la función tiene un sólo punto de mínimo local en $x_1 = 0$ y ningún máximo. Esta información es suficiente para dar un bosquejo a mano del gráfico de la función.

5.(a) La recta se determina a partir del punto P y el vector director de $\mathbf{r}$. Para hallar un vector director resolvemos el sistema lineal que determina $\mathbf{r}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Es un sistema de dos ecuaciones linealmente independientes y tres incognitas, luego sistema lineal indeterminado con un parámetro. Como las dos primeras columnas son linealmente independientes,

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

se puede despejar la tercera incognita z como parámetro y resolver directamente

$$\begin{array}{l}
\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \Leftrightarrow \\
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \Leftrightarrow \\
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Luego

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego $\mathbf{v} = (-9, -4, 1)$ es un vector director de $\mathbf{r}$.[2] Luego la ecuación punto vector de la recta es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y sus ecuaciones paramétricas

$$x = -9\lambda, \ y = -1 - 4\lambda, \ z = -3 + \lambda\text{-}$$

5.(b) La distancia de $\mathbf{r}$ al punto P es la menor distancia de cualquier punto de la recta al punto y coincide con la distancia del punto al plano perpendicular a la recta que pasa por P. En primer lugar, calculemos el plano perpendicular π a $\mathbf{r}$ que pasa por P. Las ecuaciones paramétricas de la recta $\mathbf{r}$ vienen dadas por

$$\begin{array}{l} x = 5\lambda, \\ y = 2 - \lambda, \\ z = \lambda, \end{array}$$

El vector director a la recta $\mathbf{v} = (5, -1, 1)$ determina un vector normal al plano normal. La familia de todos los planos normales a la recta $\mathbf{r}$ tiene la forma general

$$(x, y, z) \cdot (5, -1, 1) = C$$

[2] véase que este vector también se puede determinar como el producto vectorial $(3, -5, 7) \wedge (1, -2, 1)$ de los vectores normales de los dos planos que determinan la recta

en donde C constante. Si sustituimos el valor de P

$$C = (5, 6, 6) \cdot (5, -1, 1) = 2, .$$

determinamos el plano normal que pasa por P

$$\pi \equiv 5x - y + z = 25$$

La distancia del punto P al $\mathbf{r}$, viene dado por la distancia de P al punto Q de corte de π con $\mathbf{r}$. Dicho punto Q se calcula sustituyendo las paramétricas de $\mathbf{r}$ en la ecuación del plano

$$5 \cdot 5\lambda - (2 - \lambda) + \lambda = 25 \Rightarrow \lambda = 1.$$

Luego $Q = (5, 1, 1)$ y

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (5, 1, 1) - (5, 6, 6) = (0, -5. - 5)$$

Finalmente la distancia pedida viene dada por

$$d = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$$