# Prueba de nivelación correspondiente a los contenidos de Algebra

NOMBRE Y APELLIDOS:

- INSTRUCCIONES: El alumno debe resolver la prueba a mano. Posteriormente, debe escanear sus respuestas como un fichero pdf, incluyendo la portada con los datos cumplimentados, y subirla al curso virtual antes del día 10 de enero. Para ello se ha abierto una tarea en el curso virtual que hemos denominado

  *"Prueba de nivelación de Algebra"*

  en donde el alumno debe subir el archivo.

1. Razone si los siguientes conjuntos conjuntos de $\mathbb{R}^3$ son espacios vectoriales dotados de las operaciones vectoriales usuales:
   - Cualquier recta de $\mathbb{R}^3$.
   - Cualquier plano de $\mathbb{R}^3$.
   - El círculo de radio unidad centrado en el origen.
   - La unión de dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.

   A resultas de lo anterior, de una explicación razonada del tipo de subespacios vectoriales que se pueden definir en el espacio $\mathbb{R}^3$.

2. Sea la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}_1) &= \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \\ f(\mathbf{u}_2) &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3 \\ f(\mathbf{u}_3) &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3 \end{aligned}$$

   en donde $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$

   (a) Señale la matriz de la aplicación.

   (b) Calcule la matriz de la aplicación respecto de la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}_3 \end{aligned}$$

   (c) Determínense las ecuaciones implícitas del $\ker f$, su dimensión y una base.

   (d) Determínense las ecuaciones implícitas de $Im\, f$, su dimensión y una base.

3. En este ejercicio consideramos el espacio vectorial $\mathbb{P}_2$ de polinomios de grado igual o menor a 2

$$\mathbb{P}_2 = \{\mathbf{p}(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 : a_i \in \mathbb{R} \}$$

y el espacio de coordenadas $\mathbb{R}^2$. En dichos espacios vamos a considerar las bases

$$\begin{array}{l} \mathbf{A} = \{\mathbf{p}_0(x) = (x-1)^2, \mathbf{p}_1(x) = x+2,\ \mathbf{p}_2(x) = x\} \\ \mathbf{B} = \{(1,1),\ (0,1)\} \end{array}$$

Sea $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por

$$F(\mathbf{p}) = \left( \int_{-1}^{1} \mathbf{p}(x)dx, \int_{0}^{1} \mathbf{p}(x)dx \right)$$

En este ejercicio se pide lo siguiente:

(i) Probar que $F$ es una aplicación lineal.

(ii) Señale la matriz asociada a la aplicación con respecto de las bases $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.

(iii) Determine las ecuaciones implícitas de $\mathrm{Ker}F$, su dimensión y una base.

4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(i) Determinar los valores propios y las ecuaciones de los subespacios propios asociados a ellos.

(ii) Estudiar si es diagonalizable. En caso afirmativo encontrar la matriz diagonal $D$ y la base a la que está referida.