PEC Análisis II-Grado en Físicas -2017

1. La energía de una partícula de masa m en una caja cilíndrica viene dada por $E(R,H) = (\hbar^2/2m)[(2.4)^2/R^2 + \pi^2/H^2]$, donde R es el radio del cilindro y H la altura; $\hbar$ es la constante de Planck reducida $h/2\pi$.

Encontrar las expresiones de R y H que minimizan la energía para un volumen V dado, utilizando multiplicadores de Lagrange. (v. 3p)

2.Calcular el área A limitada por las curvas $x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 4x, y = x$ e $y = 0$. (v. 2p)

3. El camino $\vec{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \vec{\gamma}(t) = (\alpha\cos(t), \alpha\sin(t), \beta t)$, es la parametrización de una hélice en $\mathbb{R}^3$ .Calcular la curvatura ¿Qué se puede deducir del resultado?. (v. 3p)

4. El plano $z = 1 + x$ corta al cono $z^2 = x^2 + y^2$, formando una parábola. Parametrizar dicha parábola utilizando como parámetro: (a) $t = x$,(b) $t = y$ y (c) $t = z$.

¿Cuál de estas posibilidades de selección de t produce una parametrización que representa toda la parábola?¿Qué es dicha parametrización?¿qué sucede con las otras posibilidades? (v. 2p)

1) Se quiere minimizar la energía para un volumen dado, luego se trata de un problema de extremos condicionados.

La función de Lagrange asociada al problema es

$$F(R,H) = \frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{(2,4)^2}{R^2} + \frac{\pi^2}{H^2}\right] + \lambda(V - \pi R^2 H) \quad \text{--- (0)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial R}(R,H) = -\frac{\hbar^2}{m}\frac{(2,4)^2}{R^3} - 2\lambda R\pi H = 0 \quad \text{- (1)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial H}(R,H) = -\frac{\hbar^2}{m}\frac{\pi^2}{H^3} - \lambda\pi R^2 = 0 \quad \text{- - (2)}$$

$V = \pi R^2 H \Rightarrow H = \frac{V}{\pi R^2}$, sustituyendo en (1) se tiene $\frac{\hbar^2}{m}\frac{(2,4)^2}{R^3} + 2\pi\lambda R\frac{V}{\pi R^2} \Rightarrow \lambda = -\frac{\frac{\hbar^2}{m}\frac{(2'4)^2}{R^2}}{2V}$

sustituyendo en (2) se tiene

$$-\frac{\hbar^2}{m}\frac{\pi^2}{H^3} + \frac{\frac{\hbar^2}{2m}\frac{(2,4)^2}{R^2}}{2V}\pi R^2 = 0 \Rightarrow$$

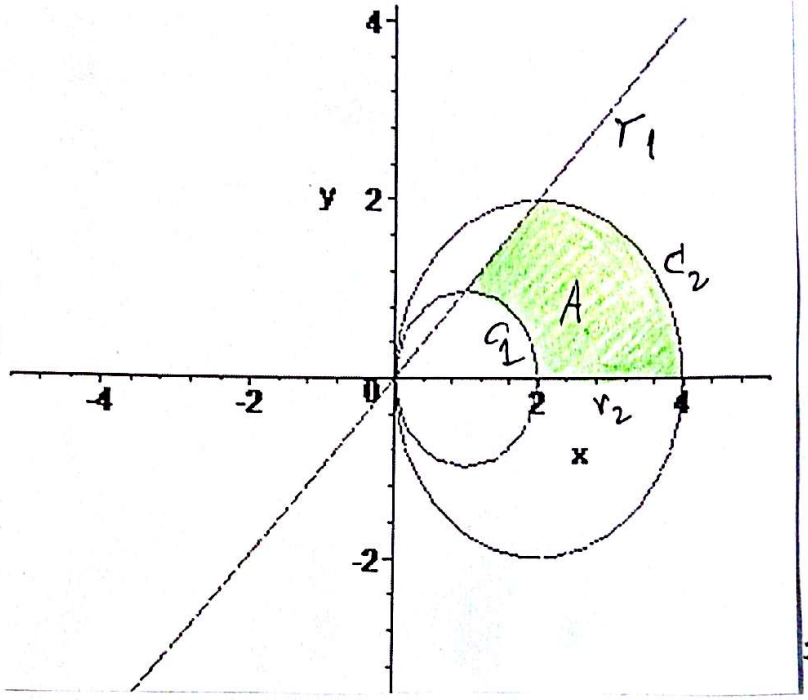
$$\frac{\pi}{H^3} = \frac{(2,4)^2 R^2}{2VR^2} = \frac{(2,4)^2}{2}\frac{1}{\pi R^2 H} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{H} = \frac{2,4}{\sqrt{2}R} \Rightarrow H = \frac{\pi\sqrt{2}R}{2,4} \Leftrightarrow$$

$R = \frac{(2,4)H}{\pi\sqrt{2}}$, Hay que tener en cuenta que $V = \pi R^2 H \Rightarrow H = \frac{V}{\pi R^2}$

y el punto de mínimo se cumple en $H^3 = \frac{2\pi V}{(2,4)^2}$

2) $A := \left\{ \text{área limitada por } \underbrace{x^2+y^2=2x}_{C_1},\ \underbrace{x^2+y^2=4x}_{C_2},\ \underbrace{y=x}_{r_1},\ \underbrace{y=0}_{r_2} \right\}$



$$\int_A dx\,dy = \int_0^{\pi/4}\int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} r\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/4}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} =$$

$$= \int_0^{\pi/4}(8\cos^2\theta - 2\cos^2\theta)\,d\theta =$$

$$= 6\int_0^{\pi/4}\cos^2\theta\,d\theta =$$

$$= 6\int_0^{\pi/4}\frac{1+\cos^2\theta}{2}\,d\theta = 6\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\operatorname{sen}2\theta}{4}\right]_0^{\pi/4}$$

$$= \left[\frac{3\pi+6}{4}\right]$$

$x = r\cos\theta$
$y = r\operatorname{sen}\theta$ $\quad \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$

$x^2+y^2=2x \Rightarrow r^2 = 2r\cos\theta$
$x^2+y^2=4x \Rightarrow r^2 = 4r\cos\theta$ $\quad \left\{ r\in[2\cos\theta, 4\cos\theta],\ \theta\in[0,\pi/4] \right.$

3) $\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

$t \to \vec{r}(t) = (\alpha \cos t, \alpha \operatorname{sen} t, \beta t)$

$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = (-\alpha \operatorname{sen} t, \alpha \cos t, \beta) \times (-\alpha \cos t, -\alpha \operatorname{sen} t, 0)$

$$= \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ -\alpha \operatorname{sen} t & \alpha \cos t & \beta \\ -\alpha \cos t & -\alpha \operatorname{sen} t & 0 \end{pmatrix} = (\alpha\beta \operatorname{sen} t, -\alpha\beta \cos t, \alpha^2)$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \Rightarrow k(t) = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3} = \frac{|\alpha|}{\alpha^2 + \beta^2}$$

Luego a lo largo de la hélice la curvatura es constante

---

4) $z^2 = x^2 + y^2$, $z = 1 + x$

a) Si $t = x$, $z = 1 + t$, $1 + 2t + t^2 = t^2 + y^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = \pm\sqrt{1+2t}$. Son necesarias dos parametrizaciones para describir la parábola entera {una para $y \leq 0$ y otra para $y \geq 0$}

b) Si $t = y$, $x^2 + t^2 = z^2 = 1 + 2x + x^2$,
$2x + 1 = t^2$, $x = (t^2 - 1)/2$. Entonces
$z = 1 + x = (t^2 + 1)/2$ y la parábola es parametrizada por

$$\vec{r} = \frac{t^2-1}{2}\vec{i} + t\vec{j} + \frac{t^2+1}{2}\vec{k}$$

c) Si $t = z$, entonces $x = t - 1$, $t^2 = t^2 - 2t + 1 + y^2$,
$y = \pm\sqrt{2t-1}$, y por lo tanto son necesarias dos parametrizaciones para toda la parábola