MÉTODOS MATEMÁTICOS II – GRADO EN FÍSICA – UNED
TERCERA PRUEBA DE EVALUACIÓN CONTINUA – CURSO 2018-2019

Se debe entregar esta prueba **en formato pdf** antes del **martes 15 de enero a las 23:55** (hora peninsular española), en un **archivo único** que lleve por nombre

Apellido1_Apellido2_Nombre.pdf

(o Apellido1_Nombre en caso de tener solo un apellido). No es necesario que esté editada con algún software de edición de textos científicos.

No olvide justificar por qué da cada paso en los cálculos. Se trata de una evaluación, por lo que deben detallarse los razonamientos al nivel del curso.

Tiempo estimado de realización: 2.5 horas.

Problema 1 (5 puntos)

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ -3 & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ 1/x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

definimos en el espacio $L_2(\mathbb{R})$ real el operador

$$T(g) = fg\,.$$

a) ¿Es continuo el operador? En caso afirmativo, calcular su norma.

b) Determinar $\ker(T)$.

c) Dadas

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{-1, -2, -3, -4, -5, \ldots\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y

$$m(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-5, 0] \\ 1 & \text{si } x \in \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

¿es h un autovector?, ¿es m un autovector?

d) Determinar el espectro puntual de T y los autoespacios asociados a los autovalores.

e) Determinar el espectro continuo de T. Los cálculos son largos; puede dejarse indicada una sucesión de Weyl (sin necesidad de comprobar que efectivamente lo es) asociada a cada valor del espectro continuo, razonando por qué debería serlo y comprobando numéricamente que efectivamente uno de los valores dados está en el espectro continuo.

f) ¿Por qué podemos garantizar que el espectro residual es vacío?

Problema 2 (2 puntos)

Dado el operador

$$S : \begin{array}{ccc} \ell_2 & \to & \mathbb{C} \\ (x_n)_{n=1}^{\infty} & \mapsto & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{3^n} x_n \end{array},$$

calcular su norma y determinar todos los vectores v tales que $\|Sv\| = \|S\|\|v\|$, justificando por qué los demás no verifican esta igualdad.

Problema 3 (3 puntos)

Toda matriz cuadrada A admite una descomposición de la forma

$$A = UTV,$$

con U y V unitarias, y T diagonal y positiva[1]. A los elementos de la diagonal de T se los conoce como valores singulares de A (se puede comprobar que los valores singulares no cambian con la descomposición elegida, aunque su orden pueda cambiar).

a) Demostrar que la norma de una aplicación lineal, en el espacio $\mathbb{C}^n$ dotado de la norma euclídea, determinada por una matriz A cuadrada coincide con el mayor de los valores singulares de A.

b) Demostrar que para cualquier matriz A, no necesariamente cuadrada, las aplicaciones lineales determinadas por A^*A y AA^* son positivas[2] (y por tanto diagonalizables).

c) Relacionar las descomposiciones $A = UTV$ con diagonalizaciones (por matrices unitarias) de A^*A y AA^*. ¿La raíz cuadrada de qué matriz determina T (salvo permutación de los elementos de la diagonal)?

d) Calcular la norma de la aplicación lineal f_A definida por la matriz

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

y encontrar un vector que norme la aplicación (es decir, un vector v tal que $\|Av\| = \|f_A\|\|v\|$). Deducir la norma de AA^*.

[1] Una matriz se dice positiva si es autoadjunta y tiene todos sus autovalores no negativos.

[2] Un operador S en un espacio de Hilbert se dice positivo si es autoadjunto y para cualquier vector v se tiene que $\langle v, Sv \rangle \geq 0$.