Consultor: Francesc Tarrés
Fecha entrega: 27 de noviembre de 2018

Normas de entrega

- Entregar preferiblemente un documento en PDF y comprobar que todas las ecuaciones se visualizan correctamente. Es posible incluir páginas escaneadas de documentos elaborados manualmente. En este caso, procure tener una letra y organización del documento clara. Si se desea, se puede entregar el PDF y el formato Word Office conjuntamente. Se recomienda no entregar solo el formato Word ya que no siempre se mantienen las fórmulas en todas las versiones. No se aceptan entregas en OpenOffice.

- Nombre del documento: Apellido_1_Apellido_2_Nombre_PEC2.pdf.

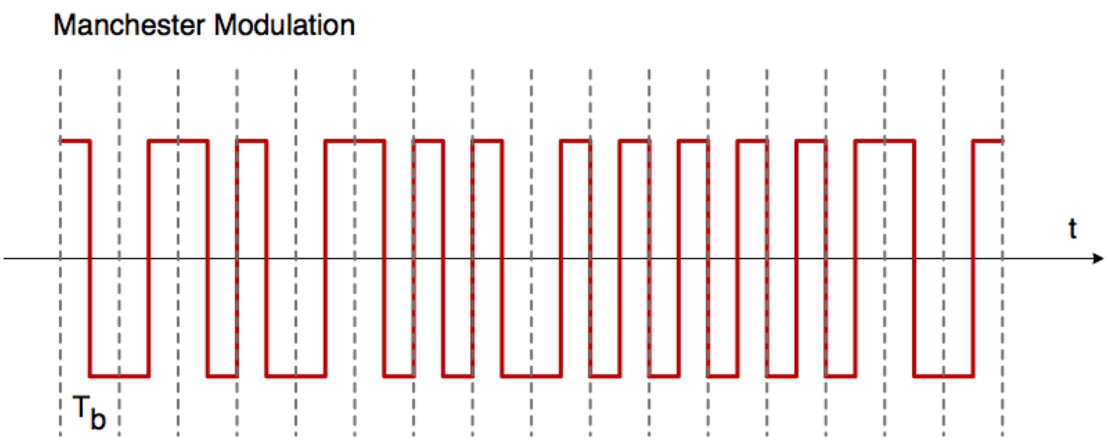
- Se tienen que numerar todas las páginas del documento, especialmente cuando se entregan documentos manuscritos escaneados.

- Todos los resultados de los problemas se tienen que demostrar o razonar. Si algunas de las demostraciones necesarias aparecen en el libro de texto sólo es necesario referenciar la fórmula del libro. El detalle con el que se espera la resolución de los ejercicios es el mismo que el de los ejercicios resueltos que se proporcionan en las guías de estudio de cada módulo.

- Las soluciones finales de cada apartado deben identificarse de forma clara.

Problema 1. Modulaciones de línea (30%)

En este problema se comparan diferentes modulaciones de línea para codificar una secuencia de bits. Hemos realizado una captura de una señal y sabemos que está codificada en Manchester y que se corresponde a 16 bits de información. La forma de onda de la señal capturada se representa en la figura adjunta:



a) Determine la secuencia binaria correspondiente (0s y 1s) y represéntela en codificación NRZ bipolar.
b) Represente las formas de onda que se obtendrían si la secuencia se codificase en los siguientes códigos de línea:
   - Código bifase
   - Manchester Diferencial
   - HDB3

Suponga, si fuera necesario, que el bit anterior al primer bit es 0, y la tensión es –V.

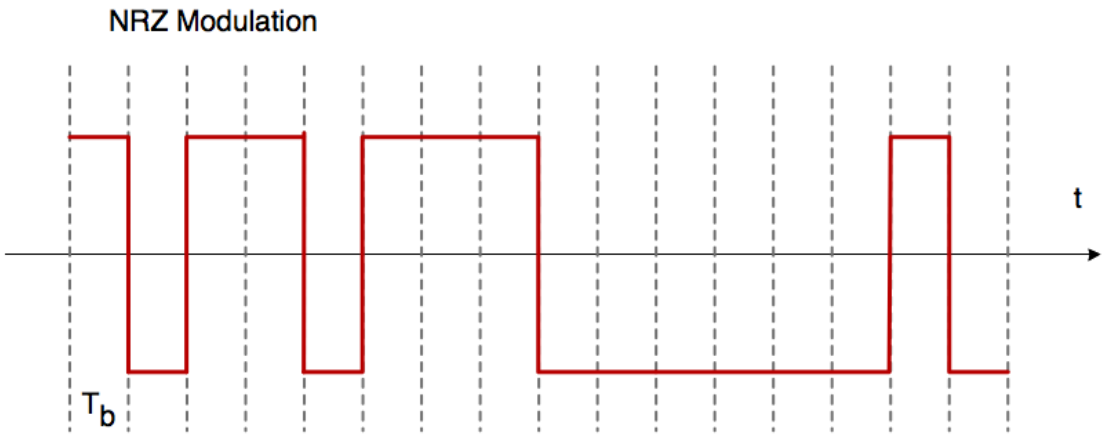
c) Determine el tiempo máximo que la forma de onda permanece en un nivel de tensión constante en el ejemplo concreto que estamos considerando y para las diferentes modulaciones de línea evaluadas en los apartados anteriores (incluyendo la Manchester del enunciado).
d) Calcule la energía total de cada una de las señales de línea obtenidos en los apartados anteriores (incluyendo la Manchester de enunciado). Suponga que el tiempo de bit es $T = 1\,\mu s$ y las amplitudes de $+V, 0, -V$ $(V = 5\,volts)$. Suponga también que en todos los casos la duración de la señal de línea es de $16\,\mu s$.

Solución

a) La modulación de Manchester codifica los 1s empezando por un valor positivo y cambiando en medio del símbolo. Los 0s se codifican comenzando en negativo y cambiando en medio del símbolo. Por lo tanto, la señal que tenemos en la figura codifica la siguiente secuencia de bits:

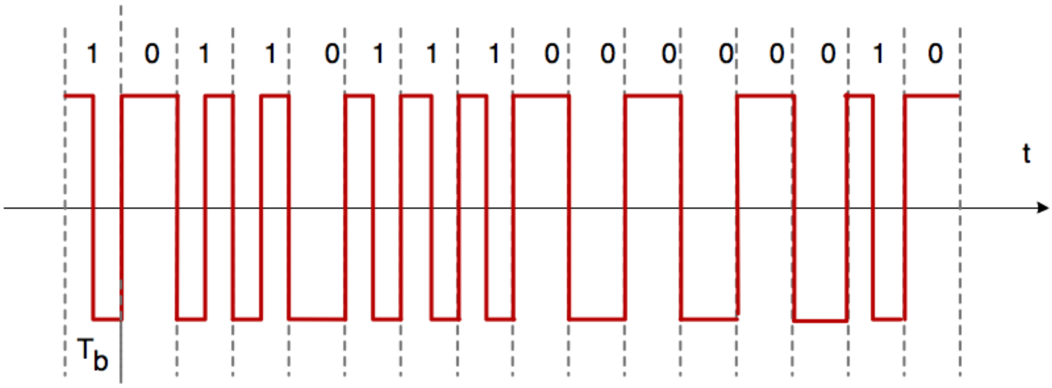
1 0 1 1   0 1 1 1   0 0 0 0   0 0 1 0

Al codificarlo en NRZ obtenemos:

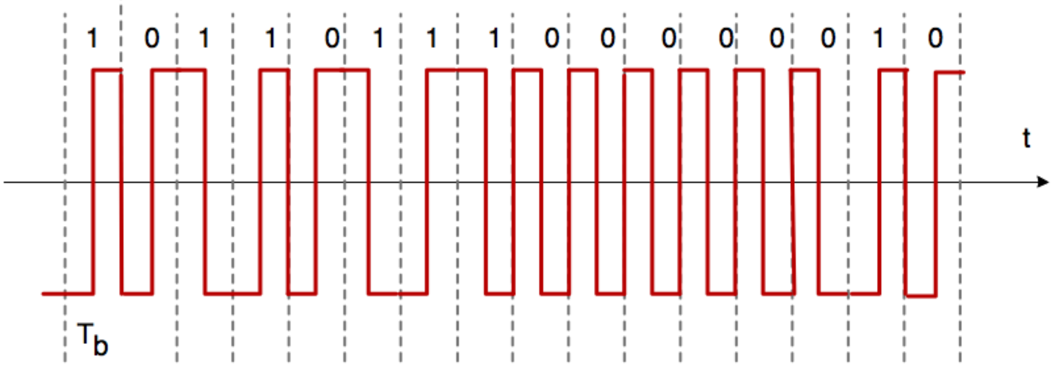


b) En el gráfico adjunto se representan las formas de onda asociadas a cada uno de los moduladores de línea para la secuencia de 16 bits.

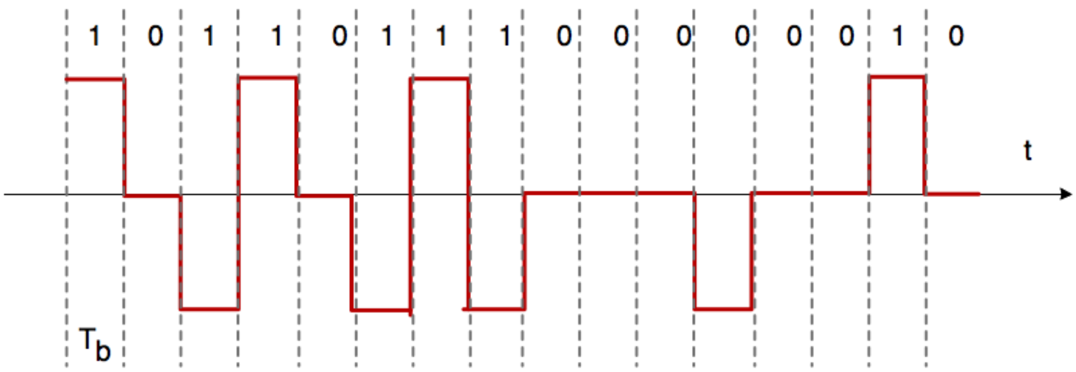
Biphase



Manchester diferencial



HDB3



c) i d) A partir de los resultados anteriores podemos extraer la siguiente tabla sobre las duraciones máximas de los valores de tensión de salida y sobre la energía de cada modulación. Es importante notar que la energía es siempre la misma (excepto en el caso de HDB3) debido a que en todos los demás casos la señal es o positivo o negativo, pero siempre con una tensión con el mismo valor absoluto.

Modulación	T max nivel tensión	Energía
Manchester	1 μs	$400 \cdot 10^{-6}\ W$
NRZ	6 μs	$400 \cdot 10^{-6}\ W$
Biphase	1 μs	$400 \cdot 10^{-6}\ W$
Manchester diferencial	1 μs	$400 \cdot 10^{-6}\ W$
HDB3	3 μs	$200 \cdot 10^{-6}\ W$

Problema 2. Energía modulaciones PAM (30%)

Supongamos que queremos transmitir una secuencia de palabras binarias de 4 bits cada una. Usaremos una modulación 16 PAM unipolar donde los niveles sucesivos están separados por una tensión de 1,5 voltios, empezando por el nivel de 0 voltios. Sabemos que las 16 palabras no son equiprobables ya que las probabilidades de los bits 0 y 1 son asimétricas.

$$p(b = 0) = 0.1$$
$$p(b = 1) = 0.9$$

Una manera de asignar la amplitud de los 16 niveles de los pulsos es que el nivel de tensión sea proporcional a la palabra binaria tal como se muestra en la columna de asignación 1 de la tabla adjunta. Sabemos que los pulsos son rectangulares y que la velocidad de transmisión del sistema es de 8 Mbps.

palabra	Asignación 1	Asignación 2	Palabra	Asignación 1	Asignación 2
0000	0 V		1000	12 V	
0001	1,5 V		1001	13,5 V	
0010	3 V		1010	15 V	
0011	4,5 V		1011	16,5 V	
0100	6 V		1100	18 V	
0101	7,5 V		1101	19,5 V	
0110	9 V		1110	21 V	
0111	10,5 V		1111	22,5 V	

Se pide:

a) Determina la probabilidad de cada símbolo.
b) Determina la duración de cada pulso.
c) Determina el nivel medio de energía de la señal para la asignación de niveles 1.

Sin embargo, quisiéramos hacer una asignación de niveles PAM en palabras binarias que sea óptima con respecto a la energía media de la señal (lo más pequeña posible).

d) Hacer una propuesta de asignación (2) de niveles en cada uno de los símbolos para que la energía final sea lo más pequeña posible teniendo en cuenta las probabilidades de cada símbolo. (La solución no es única). Explica el procedimiento empleado para hacer la asignación 2. Calcula la energía media con la nueva asignación de niveles.
e) Discute si la reasignación de niveles afectará a la probabilidad de error del sistema.

Solución

a) Teniendo en cuenta las probabilidades de cada bit, las probabilidades de los símbolos quedan deginidas por la tabla siguiente:

Símbol	Probabilitat	Símbol	Probabilitat
0000	0.0001	1000	0.0009
0001	0.0009	1001	0.0081
0010	0.0009	1010	0.0081
0011	0.0081	1011	0.0729
0100	0.0009	1100	0.0081
0101	0.0081	1101	0.0729
0110	0.0081	1110	0.0729
0111	0.0729	1111	0.6561

b) Para determinar la duración de cada pulso debemos tener en cuenta que en cada símbolo se transmiten 4 bits. Por tanto, el número de pulsos (símbolos) por segundo debe ser 2 Msimbols / s. De esta manera, obtenemos que la duración de un pulso (símbolo) es:

$$T_{simbol} = 0.5\mu s$$

c) Podemos calcular la energía teniendo en cuenta la duración del símbolo, su amplitud y las probabilidades de cada uno de los símbolos. obtenemos:

$$\begin{aligned} E = T_{simbol}\left(\sum_{i=0}^{15} p_i \cdot A_i^2\right) =& T\left(0.0001\cdot 0^2 + 0.0009\left(1.5^2+3^2+6^2+12^2\right)\right) + \\ &+T\left(0.0081\left(4.5^2+7.5^2+9^2+13.5^2+15^2+18^2\right)\right) + \\ &+T\left(0.0729\left(10.5^2+16.5^2+19.5^2+21^2\right)+0.6561\cdot 22.5^2\right) = \\ &= T\cdot 427.275 = 214\mu J \end{aligned}$$

d) Con el fin de minimizar la energía total lo que deberíamos hacer es que los símbolos más probables tuvieran asignados los niveles de amplitud más pequeños. De esta manera se minimizaría la energía transmitida.

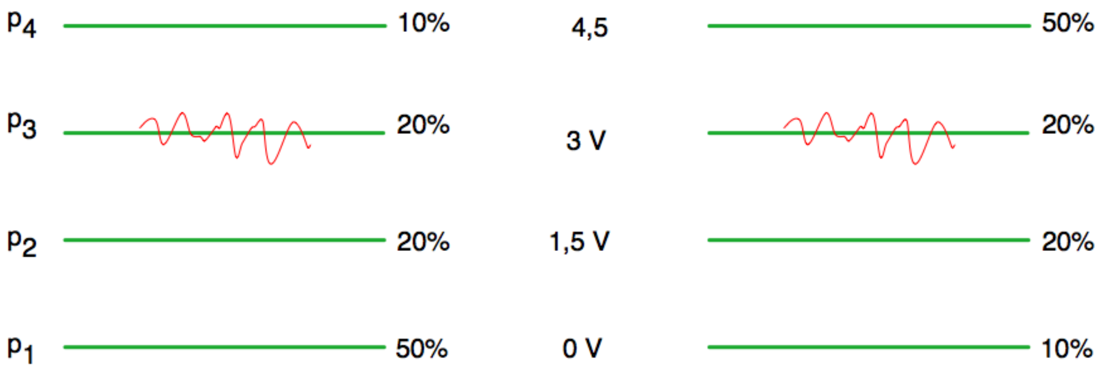
Una posible asignación sería la que se muestra en la siguiente tabla:

paraula	Assignació 1	Assignació 2	Paraula	Assignació 1	Assignació 2
0000	0 V	22,5 V	1000	12 V	16,5 V
0001	1,5 V	21 V	1001	13,5 V	10,5 V
0010	3 V	19,5 V	1010	15 V	9 V
0011	4,5 V	15 V	1011	16,5 V	4,5 V
0100	6 V	18 V	1100	18 V	7, 5 V
0101	7,5 V	13,5 V	1101	19,5 V	3 V
0110	9 V	12 V	1110	21 V	1,5 V
0111	10,5 V	6 V	1111	22,5 V	0 V

e) La energía media para la nueva asignación de niveles será:

f)
$$\begin{aligned} E = T_{simbol}\left(\sum_{i=0}^{15} p_i \cdot A_i^2\right) =& T\left(0.0001\cdot 22.5^2 + 0.0009\left(21^2+19.5^2+18^2+16.5^2\right)\right) + \\ &+T\left(0.0081\left(15^2+13.5^2+12^2+10.5^2+9^2+7.5^2\right)\right) + \\ &+T\left(0.0729\left(6^2+4.5^2+3^2+1.5^2\right)+0.6561\cdot 0^2\right) = \\ &= T\cdot 12,71 = 6,35\mu J \end{aligned}$$

g) Generalmente, al aumentar la energía tenemos más protección frente al ruido. Esto se debe a que es habitual que la energía aumenta debido a que la separación entre los niveles aumenta, reduciendo por tanto la probabilidad de error. No obstante, hay que considerar este ejemplo de problema con cuidado, ya que en este caso, los niveles de tensión que se transmiten siguen siendo los mismos, simplemente hemos cambiado las probabilidades con las que se pueden transmitir. Si se supone que los umbrales de decisión de cada símbolo están en los niveles de tensión intermedios, la probabilidad de error dependerán de las probabilidades de los símbolos. En la Figura mostramos una versión simplificada, sólo con 4 niveles, donde se mantienen los niveles pero cambiamos las probabilidades de los mismos. A partir de la figura queda claro que la probabilidad de error en el símbolo 3 es la misma independientemente de las asignaciones de niveles que estamos haciendo. Las probabilidades de error por los símbolos p4 y p1 también son las mismas para que estando en los extremos, de manera, que la probabilidad de error por símbolo no cambia en las dos configuraciones estudiadas. Nuestro caso tiene más niveles por lo que su estudio es más complejo y su análisis debería realizarse con mayor cuidado. No obstante, el caso simplificado nos muestra que la energía se reduce debido a una reasignación de los niveles, estamos menos tiempo transmitiendo pulsos de alta energía, por lo que se reduce la energía, pero las diferencias entre los niveles de los pulsos, se mantienen iguales, por lo que nuestros errores en identificar símbolos correctamente también. En conclusión, en sistemas donde las probabilidades de los símbolos no son iguales es posible reducir la energía mediante una asignación adecuada de los niveles de tensión más bajos a los simbolos más probables con un impacto menor sobre la probabilidad de error.



$$
\begin{aligned}
P_1 =& 0.1 \cdot p_4 + 0.2 \cdot p_3 + 0.2 \cdot p_2 + 0.50 \cdot p_1 = \\
=& 0.5 \cdot p_4 + 0.2 \cdot p_3 + 0.2 \cdot p_2 + 0.10 \cdot p_1
\end{aligned}
$$

$$p_1 = p_4;\ p_2 = p_3$$

Problema 3. Modulaciones PAM i cálculos de probabilidad de error (40%)

Tenemos un sistema de modulación de pulsos en amplitud bipolar asimétrico, tanto en cuanto a las probabilidades de cada bit como a los niveles de tensión. La señal que obtenemos al receptor se puede modelar como:

$$r(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot p(t - kT_0) + w(t)$$

El pulso p(t) está definido como:

$$p(t) = \begin{cases} 1 & if\ 0 \leq t \leq T_0/3 \\ 0 & other\ values \end{cases}$$

El valor de a_k puede tomar los valores $\{A, -2A\}$ en función de si el bit a transmitir es 1 o 0, respectivamente. Las probabilidades de cada bit son:

bit	a_k	probabilidad
0	-2A	0.8
1	A	0.2

El ruido $w(t)$ es un proceso blanco y gaussiano con varianza $\sigma^2 = 49$. Sabemos que el receptor usa el umbral de 0 voltios para decidir el bit recibido, de manera que cuando $r(t)$ es positivo decidimos que hemos recibido un 1 y cuando es negativo un 0.

Se pide:

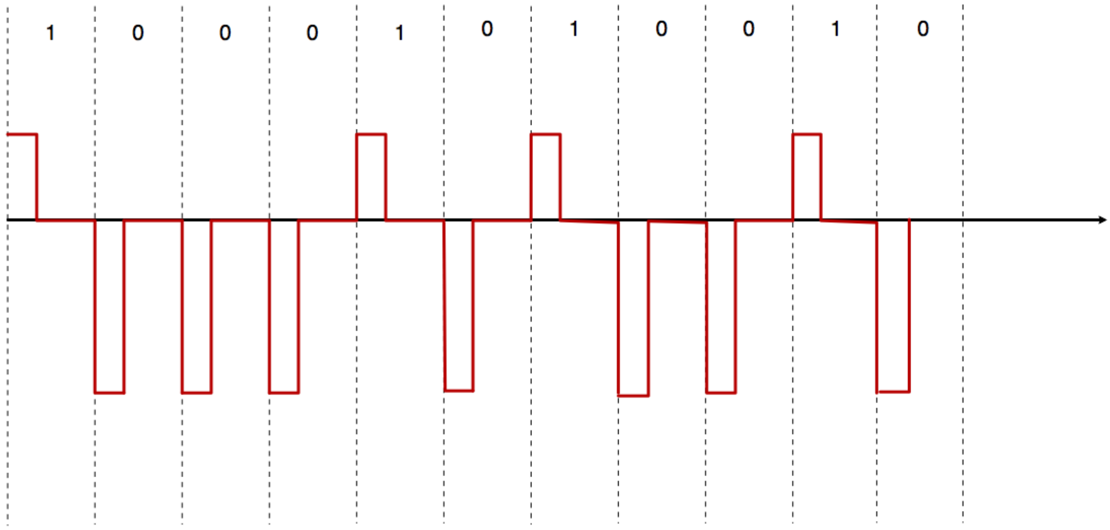
a) Calcular la forma de onda de la señal cuando se transmite la secuencia de bits (suponer que se puede despreciar el ruido)

1 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0

b) Calcula el valor de T_0 para que la tasa de transmisión del sistema sea de 50 Mbps
c) Calcular el valor de A para que la energía promedio por bit de la señal sea de $15 \cdot 10^{-6}\,J$. Hazlo para un caso genérico, teniendo en cuenta las probabilidades reales de cada bit y no para el ejemplo concreto del apartado a)
d) Determina una fórmula que nos permita obtener la probabilidad de error en función de A y de σ suponiendo que usamos un umbral de decisión igual a cero, es decir, si la señal es positiva decidiremos haber recibido un 1 y si es negativa un 0.
e) Determina el valor numérico de la probabilidad de error para los valores de A y σ calculados en los apartados anteriores para el caso de un umbral de decisión cero.
f) Calcula cuál sería la probabilidad de error si doblamos la energía de la señal (cambiamos el valor de A para que la energía sea de $30 \cdot 10^{-6}\,J$), manteniendo el mismo umbral de decisión que en los casos anteriores.
g) La probabilidad de error depende del umbral empleado en el receptor. ¿Como calcularías el valor óptimo del umbral para que la probabilidad de error fuera mínima?. Suponga que todo el resto de parámetros se mantienen constantes. Realícelo para el caso de A obtenido en el apartado c). (Nota: no es necesario encontrar el valor óptimo, simplemente, explicar cómo se obtendría por métodos analíticos o gráficos. Sin embargo, se valorará favorablemente a los estudiantes que lleguen a encontrar el valor del umbral)

Solución

a) El pulso tiene una duración de 1/3 parte del periodo de símbolo y las amplitudes son asimétricas. La forma de onda que tendríamos asociada a la señal sería la de la figura adjunta:



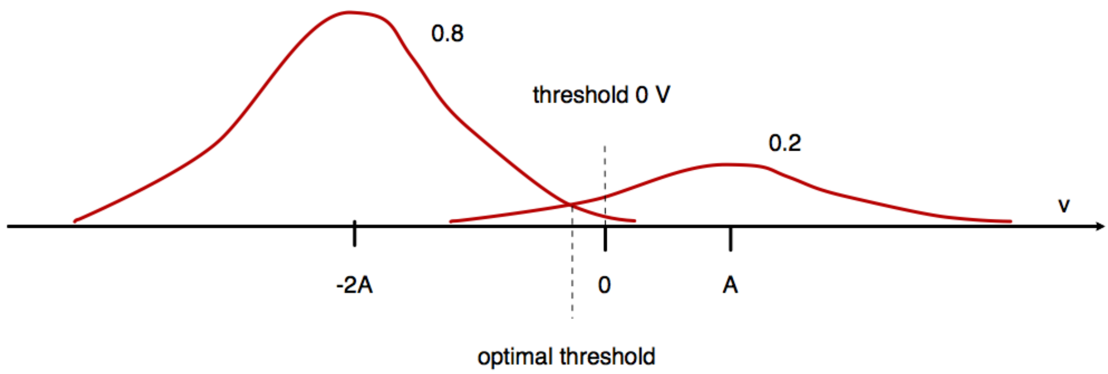
a) En cada símbolo se transmite un bit, por tanto:

$$T_{simbol} = T_{bit} = \frac{1}{50 \cdot 10^6} = 20\ ns$$

b) En este caso tenemos:

$$E = \frac{T_0}{3}\left[0.8(-2A)^2 + 0.2 \cdot A^2\right] = 15 \cdot 10^{-6} \quad \Longrightarrow \quad A = 25.74\ Volts$$

c) Tenemos la situación representada en la Figura adjunta



donde intuitivamente vemos que el umbral de decisión igual a cero no es el valor óptimo. La probabilidad de error sería:

$$\begin{aligned} p_{error} &= 0.8 \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x+2A)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot dx + 0.2 \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-A)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot dx = \\ &= 0.8 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{2A/\sigma}^{\infty} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2}\right) \cdot d\gamma + 0.2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-A/\sigma} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2}\right) \cdot d\gamma = \\ &= 0.8 \cdot Q\left(\frac{2A}{\sigma}\right) + 0.2 \cdot Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

d) Tenint en compte els valors de A i σ tindrem:

$$\begin{aligned} p_{error} &= 0.8 \cdot Q\left(\frac{2A}{\sigma}\right) + 0.2 \cdot Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) = \\ &= 0.8 \cdot Q\left(\frac{2x25,74}{7}\right) + 0.2 \cdot Q\left(\frac{25,74}{7}\right) = \\ &= 0.8 \cdot Q\,(7,3543) + 0.2 \cdot Q\,(3,6771) = 2,3592 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

e) Si doblem l'energia del senyal

$$E = \frac{T_0}{3}\left[0.8(-2A)^2 + 0.2 \cdot A^2\right] = 30 \cdot 10^{-6} \quad \Longrightarrow \quad A = 36,38\ Volts$$

$$p_{error} = 0.8 \cdot Q\left(\frac{2x36,38}{7}\right) + 0.2 \cdot Q\left(\frac{36,38}{7}\right) = 2,0276 \cdot 10^{-8}$$

f) Finalment, si el llindar no fos zero, obtindríem:

$$\begin{aligned} p_{error} &= 0.8 \int_{th}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x+2A)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot dx + 0.2 \int_{-\infty}^{th} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-A)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot dx = \\ &= 0.8 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(th+2A)/\sigma}^{\infty} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2}\right) \cdot d\gamma + 0.2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(th-A)/\sigma} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2}\right) \cdot d\gamma = \\ &= 0.8 \cdot Q\left(\frac{th+2A}{\sigma}\right) + 0.2 \cdot Q\left(\frac{A-th}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

El valor mínim pot trobar-se analíticament derivant respecte a th. Un altra alternativa es resoldre el mínim de forma numèrica. En la gràfica adjunta es mostra el resultat obtingut gràficament, donant diferents valors a th per tal d'obtenir el mínim. Segons aquests resultats, el valor (aproximat) de th és th = -12.