Notas sobre grafos

Algunas aclaraciones

Cuando un estudiante se enfrenta por primera vez a la Teoría de Grafos le surgen algunas dudas y problemas comunes. Esta nota pretende aclara por anticipado dichos problemas comunes.

Lo primero es darse cuenta de la “zoología” existente, con numerosas definiciones que dan lugar a una terminología extensa y, a veces, un tanto confusa y no universal. Hay que tener bien claro el vocabulario, porque de otra manera no se entienden los enunciados y resultados.

Lo segundo que el estudiante ha de notar es que lo que se ha desarrollado de la Matemáticas hasta ahora, sobre este área o sobre cualquier otro tema, nunca está terminado. Algunos de los algoritmos que se emplean en Teoría de Grafos fueron desarrollados recientemente (a mediados del siglo pasado) y no hace siglos. Además, se desconocen algoritmos o criterios para determinados problemas e incluso para otros se sabe que no existen algoritmos eficientes.

Hay problemas para los que se sabe que nunca obtendremos su solución, aunque sepamos que dicha solución existe. Es decir, hay límites intrínsecos al conocimiento que no dependen de nuestras capacidades.

Algunas preguntas frecuentes:

1. ¿Cómo puedo decir si dos grafos son isomorfos?

   No hay una manera eficiente de decir si dos grafos son isomorfos (es un problema NP)*. La única manera es reordenar los vértices de las matrces de adyacencia y ver que dichas matrices coinciden. Como hay que probar con todas las ordenaciones posibles en el fondo es fuerza bruta.

   A veces es más fácil decir que no lo son, sobre todo si no coinciden el número de aristas o vértices, o si los grados no coinciden.

2. ¿Cómo puedo saber si un grafo es bipartito?

   No hay un criterio que nos resuelva la cuestión de manera fácil. Normalmente la única manera que hay es precisamente encontrar la partición en dos conjuntos de los vértices del grafo.

   Contestar lo contrario es mucho más fácil algunas veces. Si encontramos un ciclo de longitud impar (los de longitud 3 son fáciles de ver) podemos asegurar que el grafo no es bipartito.

3. ¿Cómo decir si un grafo es planar?

   Pues sólo si somos capaces de mostrar una representación plana de dicho grafo. En este caso hay algún criterio no universal, como el proporcionado por la fórmula de Euler y sus derivados, que relacionan vértices, aristas y regiones.

4. ¿Cómo puedo decir si un grafo es hamiltoniano?

   A diferencia de los eulerianos, en este caso no hay un criterio universal que nos permita decir si un grafo es o no hamiltoniano. Hay un par de criterios (como el de Dirac) que en algunos casos pueden ayudarnos, pero no en general. La única forma de decir si un grafo es hamiltoniano es proporcionar un ciclo hamiltoniano.

5. ¿Hay un método de hallar ciclos hamiltonianos?

   No existe un método o algoritmo que nos permita calcular ciclos hamiltonianos (salvo el de la fuerza bruta). Para eulerianos existe Fleury, pero en este caso no hay nada parecido.

6. ¿Se puede resolver el problema del viajante?

   Básicamente es un problema NP, así que no hay algoritmos que den la solución de un tiempo prudencial si el tamaño es lo suficientemente grande. Sólo hay algoritmos que dan una solución aproximada en un tiempo aceptable.

En nuestro caso en particular los grafos que aparezcan en los problemás serán lo suficientemente sencillos como para poder responder a algunas de esas preguntas, aunque no haya criterio universal en algún caso. Siempre habrá que razonar la solución aportada.

Otros puntos:

- En informática un grafo se computará gracias a su matriz de adyacencia. Un problema diferente será su representación en pantalla.
- No hay que confundir un grafo con su representación gráfica, ésta puede variar.
- Las etiquetas dadas a los vértices nos definen el grafo.
- Los algoritmos voraces a veces funcionan y a veces no.
- No hay métodos eficientes de encontrar coloraciones propias en grafos. Básicamente es un problema NP.

* Problema NP:
Una definición de andar por casa que nos defina qué es un problema NP es la que afirma que un problema NP no es resoluble en tiempo polinómico. Es decir, si aumentamos el tamaño del problema cualquier algoritmo tardará un tiempo mayor en resolver dicho problema y ese tiempo no será proporcional al usado en el tamaño previo (ni siquiera crecerá con una potencia), sino que crecerá más rápidamente que cualquier polinomio, incluso exponencialmente. Si el tamaño es lo suficientemente grande entonces el problema es irresoluble en la práctica. Básicamente suelen ser problemas combinatorios que crecen exponencialmente, y lo hacen de tal modo que en la práctica son incomputables.