Modulaciones. Caso general.

Modular es modificar la amplitud o/y la fase de una portadora para incluir la información a transmitir y para adecuar la señal al medio de transmisión.

La señal de comunicación puede ser descrita como la parte real de una forma de onda compleja. Esto tendrá utilidades a la hora de entender las modulaciones. De forma general, una señal modulada puede ser especificada como:

$$s(t) = Re\{a(t)e^{j\theta(t)}\} = Re\left\{a(t)\left(cos\big(\theta(t)\big) + jsen\big(\theta(t)\big)\right)\right\} = a(t)\cos(\theta(t))$$

Tanto la amplitud $a(t)$ como la fase $\theta(t)$ pueden variar con el tiempo. Los diferentes tipos de modulaciones introducirán la información $x(t)$ en $a(t)$, en $\theta(t)$, o en ambos.

La frecuencia instantánea, por definición:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt}$$

En el caso particular de que no haya modulación (no se transmite información), $a(t)$ será constante, y $\theta(t) = 2\pi f_c t$ (la fase aumenta linealmente con el tiempo). La frecuencia instantánea será f_c, es decir, la frecuencia de la portadora:

$$c(t) = Acos(2\pi f_c t)$$

En general, vamos a desglosar $\theta(t)$ en dos partes: la variación lineal de la portadora, $2\pi f_c t$, y una variación de fase que contendrá la información:

$$\theta(t) = 2\pi f_c t + \varphi(t)$$

$$s(t) = Re\{a(t)e^{j\theta(t)}\} = Re\{a(t)e^{j\varphi(t)}e^{j2\pi f_c t}\} = a(t)\cos[2\pi f_c t + \varphi(t)]$$

De aquí, definimos $a(t)e^{j\varphi(t)}$ como la envolvente compleja (o señal compleja banda base), que será la señal que contiende la información, diferenciándola del resto de la señal compleja $e^{j2\pi f_c t}$, que no es más que la portadora. La portadora modificará la posición espectral de la envolvente compleja (recordad qué significa la transformada de Fourier de la multiplicación por una exponencial compleja).

Señales en fase y en cuadratura

Otra forma útil de ver la envolvente compleja es separarla en su parte imaginaria y su parte compleja:

$$a(t)e^{j\varphi(t)} = a(t)\left[\cos\left(\varphi(t)\right) + j\,\mathrm{sen}\left(\varphi(t)\right)\right] = I(t) + jQ(t)$$

$$I(t) = Re\left\{a(t)e^{j\varphi(t)}\right\} = a(t)\cos\left(\varphi(t)\right)$$

$$Q(t) = Im\left\{a(t)e^{j\varphi(t)}\right\} = a(t)\,\mathrm{sen}\left(\varphi(t)\right)$$

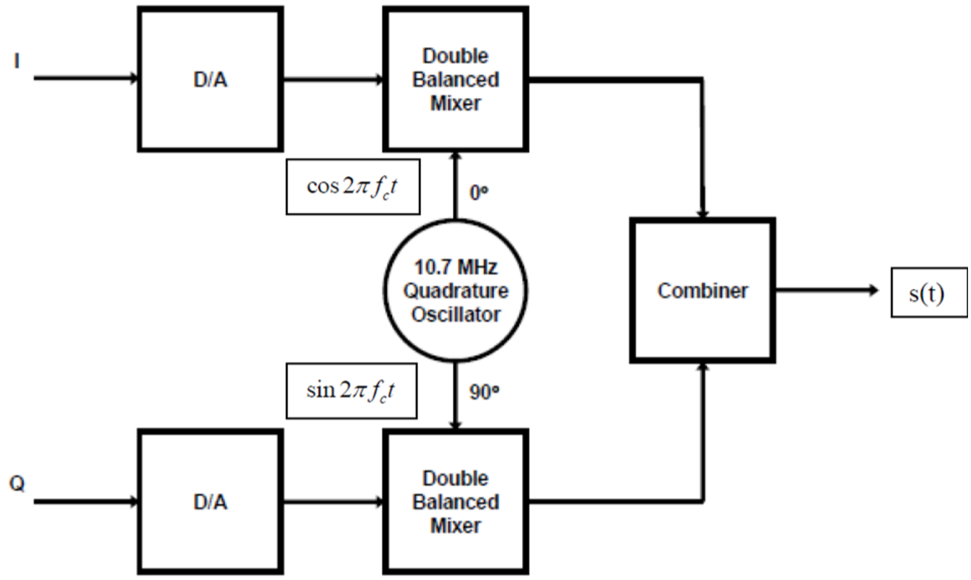
I(t) y Q(t) son las llamadas señales en fase y en cuadratura, respectivamente. Ambas contienen la misma información pero están desfasadas $\pi/2$. I(t) y Q(t) pueden ser mayor o menor que cero, y son señales reales. Usando esto, la señal modulada podría reescribirse como:

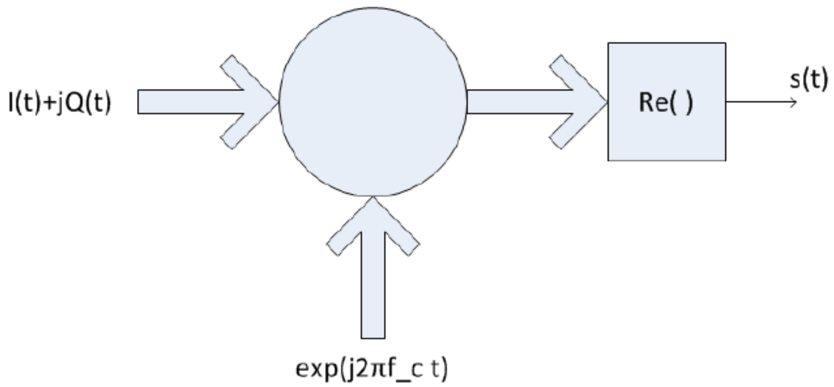
$$s(t) = Re\left\{a(t)e^{j\varphi(t)}e^{j2\pi f_c t}\right\} = Re\left\{[I(t) + jQ(t)]\left[cos\left(2\pi f_c t\right) + jsen\left(2\pi f_c t\right)\right]\right\}$$

$$s(t) = I(t)cos(2\pi f_c t) - Q(t)sen(2\pi f_c t)$$

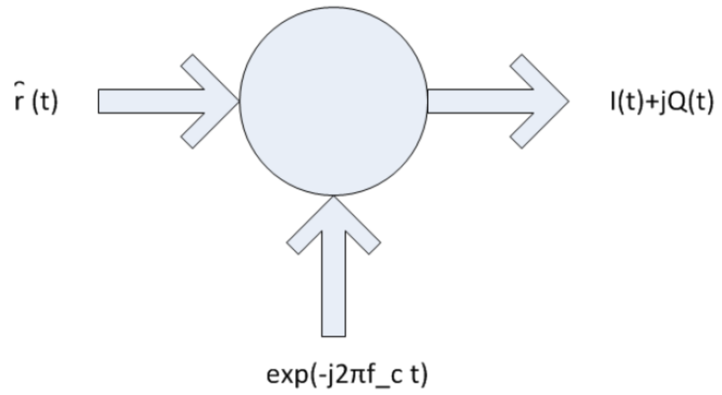
Diagramas de bloques

En esta sección veremos diagramas de bloques que implementan las ecuaciones anteriores. El modulador:





En la demodulación el objetivo es obtener I(t) y Q(t), y los diagramas de bloques son los inversos:



Resumen

La señal modulada puede describirse como:

- Una portadora con amplitud $a(t)$ y fase relativa $\varphi(t)$.
- La suma de una portadora con amplitud $I(t)$ y la portadora desfasada $\pi/2$ con amplitud $Q(t)$.

En ambos casos el mensaje puede verse como una señal bidimensional (compleja), representada por su forma polar $a(t)$ y $\varphi(t)$, o por su forma rectangular $I(t)$ y $Q(t)$. Las funciones exactas dependerán del tipo de modulación.

Razones para analizar las modulaciones desde el punto de vista de la señal compleja:

- Es un caso más general.
- Tiene ventajas en comunicaciones basadas en SDR (Software Defined Radio), por ejemplo:
    - En AM no me aparecen las señales a frecuencia doble tras multiplicar por la portadora: cuando trabajo con señales complejas puedo desplazar los espectros sin más.
    - La modulación BLU es mucho más evidente explicada de esta forma. La transformada de Hilbert ya no es un problema. En general al trabajar con software las operaciones son mucho más sencillas.

Ejemplos

En el caso particular en el que tanto $I(t)$ como $Q(t)$ sean constantes, el mensaje $s(t)$ será la suma de un coseno y un seno con diferentes amplitudes, lo que dará como resultado un coseno con amplitud y fase constantes, de la misma frecuencia que la portadora.

Para el caso de la modulación AM, tendremos que $a(t) = A_C[1 + mx(t)]$, donde A_C es la amplitud de la portadora, m es el índice de modulación y $x(t)$ es el mensaje. La fase $\varphi(t)$ será constante y por simplicidad se toma como cero. De esta forma tendremos $I(t) = A_C[1 + mx(t)]$ y $Q(t) = 0$.

Para el caso de la modulación PM, $a(t)$ será constante, y $\varphi(t) = kx(t)$, de tal forma que $I(t) = Acos(kx(t))$ y $Q(t) = Asen(kx(t))$.

Para el caso de la modulación FM, $a(t) = A_C$ será constante, y $\varphi(t)$ será proporcional a la integral de $x(t)$, $\varphi(t) = 2\pi k_f \int_o^t x(\alpha)\, d\alpha$, de tal forma que $I(t)$ y $Q(t)$:

$$I(t) = A_C \cos\left(2\pi k_f \int_o^t x(\alpha)\, d\alpha\right)$$

$$Q(t) = A_C \operatorname{sen}\left(2\pi k_f \int_o^t x(\alpha)\, d\alpha\right)$$

Referencia: ELEC 350, fall 2015, Signals and Modulation, Universidad of Victoria (Canada).