Métodos Matemáticos Aplicados a la Ingeniería

Problemas Propuestos de Octave

Contenidos

1 Resolución de ecuaciones no lineales

Ejercicio 1.1 *Sea dada la función*

$$f(x) = -2x^3 + 5x + 2$$

(a) *Aplicar el algoritmo de bisección para calcular todas las soluciones de la ecuación* $f(x) = 0$ *trabajando con una tolerancia de* 10^{-3} *y un número máximo de* 100 *iteraciones.*

(b) *Aplicar el Método de Newton para resolver la misma ecuación con los mismos valores de tolerancia y número máximo de iteraciones.*

Ejercicio 1.2 *Sea dada la función*

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$$

(a) *Aplicar el algoritmo de la bisección para calcular todas las soluciones de la ecuación* $f(x) = 0$ *trabajando con una tolerancia de* 10^{-3} *y un número máximo de 100 iteraciones.*

(b) *Aplicar el método de Newton para resolver la misma ecuación con los mismos valores de tolerancia y número máximo de iteraciones.*

Ejercicio 1.3 *Sea dada la función*

$$f(x) = x^4 - 1 - e^{-x}x^2$$

(a) *Considerando el esquema numérico asociado al Método de Newton como un esquema de punto fijo, definir la función* $\phi_N(x)$ *asociada al método y utilizar el algoritmo de punto fijo para calcular las soluciones de la ecuación* $f(x) = 0$ *trabajando con una tolerancia de* 10^{-6} *y un número máximo de* 1000 *iteraciones. Utilizar el algoritmo Aitken para calcular las mismas soluciones mediante los mismos parámetros de entrada (semillas, tolerancia y número máximo de iteraciones). Comparar los resultados obtenidos en términos de velocidad de convergencia.*

(b) *Considerar la función*

$$\phi_1(x) = (1 + e^{-x}x^2)^{1/4}$$

que define el esquema de punto fijo $x = \phi_1(x)$*. Utilizar los algoritmos de puntofijo y de Aitken para resolver la ecuación* $f(x) = 0$*. Utilizar los mismos parámetros de entrada (semillas, tolerancia y número máximo de iteraciones) del apartado anterior. Comparar los resultados.*

(c) *Considerar la función*

$$\phi_2(x) = x + f(x)$$

que define el esquema de punto fijo $x = \phi_2(x)$*. Utilizar los algoritmos de puntofijo y de Aitken para resolver la ecuación* $f(x) = 0$*. Utilizar los mismos parámetros de entrada (semillas, tolerancia y número máximo de iteraciones) del apartado anterior. Comparar los resultados.*

Ejercicio 1.4 *Sea la función*

$$f(x) = e^x - 3x^2$$

(a) *Considerando el esquema numérico asociado al Método de Newton como un esquema de punto fijo, definir la función* $\phi_N(x)$ *asociada al método y utilizar el algoritmo de punto fijo para calcular las soluciones de la ecuación* $f(x) = 0$ *trabajando con una tolerancia de* 10^{-6} *y un número máximo de 1000 iteraciones.*

(b) *Utilizar el algoritmo de Aitken para calcular las mismas soluciones con los mismos valores de tolerancia y número máximo de iteraciones. Utiliza las semillas utilizadas en el apartado anterior. Compara en términos de velocidad de convergencia los resultados obtenidos en el apartado anterior.*

(c) *Considerar la función*

$$\phi_1(x) = \ln(3x^2)$$

que define el esquema de punto fijo $x = \phi(x)$*. Utilizar los algoritmos de punto fijo y de Aitken para resolver la ecuación* $f(x) = 0$ *resuelta en los apartados anteriores. Compara los resultados.*

(d) *Considerar la función*

$$\phi_1(x) = \sqrt{e^x/3}$$

que define el esquema de punto fijo $x = \phi(x)$. Utilizar los algoritmos de punto fijo y de Aitken para resolver la ecuación $f(x) = 0$ resuelta en los apartados anteriores. Compara los resultados.

Ejercicio 1.5 *Resolver el Sistema de ecuaciones no lineales:*

$$\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 0 \\ 3xy^2 - x^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

utilizando el Método de Newton y trabajando con una tolerancia de 10^{-6}. Utilizar como semilla $x_0 = (1,1)'$. Alternativamente usa el comando `fsolve` *sin calcular la matriz Jacobiana y calculándola.*

Ejercicio 1.6 *Resolver el sistema de ecuaciones no lineales:*

$$\begin{cases} \ln(x_1^2 + x_2^2) - \sin(x_1 x_2) - (\ln 2 + \ln \pi) = 0 \\ e^{(x_1 - x_2)} + \cos(x_1 x_2) = 0 \end{cases}$$

utilizando el método de Newton y trabajando con una tolerancia de 10^{-6}. Utilizar como semilla $x_0 = (2,2)^t$. Comparar los resultados con los obtenidos mediante el comando `fsolve`.

2 Problemas de valor inicial

Ejercicio 2.1 *Sea dado el PVI*

$$\begin{cases} y'(t) = (1 + 6t)e^{1-y} - 6, \quad \forall\, t \in (0, 6] \\ y(0) = \ln(10) + 1 \end{cases}$$

cuya solución analítica es:

$$y(t) = \ln\left(10e^{-6t} + t\right) + 1$$

Aplicar el algoritmo de Euler Explícito para calcular la solución en el intervalo temporal $[0, 6]$ *con pasos de discretización* $h_1 = 0.5$, $h_2 = 0.15$ *y* $h_3 = 0.25$.
Discutir el comportamiento de las soluciones obtenidas en términos de estabilidad numérica. Dibujar la solución analítica junto con las soluciones estables calculadas anteriormente.
Calcular analíticamente el instante en el cual se tiene el mínimo de concentración así como su valor.

Ejercicio 2.2 *Sea dado el PVI*

$$\begin{cases} y'(t) = y - \dfrac{t}{y}, & \forall\, t \in (0, 5] \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

cuya solución analítica es:

$$y(t) = \frac{1}{2}\sqrt{14e^{2t} + 4t + 2}$$

(a) *Aplicar el algoritmo de Euler Explícito para calcular la solución en el intervalo temporal* $[0, 5]$ *con paso de discretización* $h = 0.2$. *Utilizar el resultado obtenido para proximar el valor de la solución analítica en el instante* $t = 3.6$ *y calcular el error cometido.*

   ¿Sabrías calcular la solución en el instante $t = 3.627$ *y estimar el error cometido?*

(b) *Aplicar los algoritmos de Euler Implícito y Crank-Nicholson para calcular la solución del PVI en las mismas condiciones anteriores (en el intervalo temporal* $[0, 5]$ *y con paso de discretización* $h = 0.2$*).*

   Utilizar los resultados obtenidos para proximar el valor de la solución analítica en el instante $t = 3.6$ *y calcular los errores cometidos determinando el método más preciso entre los tres.*

Ejercicio 2.3 *Sea dado el PVI*

$$\begin{cases} y'(t) = (\sqrt{t} - 1)(y^3 - y), & \forall\, t \in (0, 2] \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

cuya solución analítica es:

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - (3/4)e^{(4/3)t^{3/2} - 2t}}}$$

(a) *Aplicar el algoritmo de Euler Explícito para calcular la solución en el intervalo temporal* $[0, 2]$ *con paso de discretización* $h = 0.05$.

Utilizar el resultado obtenido para proximar el valor de la solución analítica en el instante $t = 1.25$ *y calcular el error cometido. ¿En que instante se tiene el mínimo de concentración? ¿Cual es su valor real y el aproximado?*

(b) *Aplicar el algoritmo de Runge-Kutta RK2 (Heun) para calcular la solución del PVI en las mismas condiciones anteriores (en el intervalo temporal* $[0, 2]$ *y con paso de discretización* $h = 0.05$*).*

Utilizar los resultados obtenidos para proximar el valor de la solución analítica en el instante $t = 1.25$ *y calcular los errores cometidos y determinar el método más preciso. Dibujar la gráfica del error del método determinado anteriormente en cada punto del dominio.*

Ejercicio 2.4 *Sea dado el PVI*

$$\begin{cases} y'(t) = 1 - 4y, & \forall\, t \in (0, 10] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

cuya solución analítica es:

$$y(t) = \frac{3 + e^{4t}}{4e^{4t}}$$

Aplicar el algoritmo de Euler Explícito para calcular la solución en el intervalo temporal $[0, 10]$ *con pasos de discretización* $h_1 = 0.1$, $h_2 = 0.4$ *y* $h_3 = 0.5$.

Dibujar las soluciones obtenidas junto con la analítica en una única gráfica y discutir el comportamiento de las soluciones obtenidas en términos de estabilidad numérica.

Ejercicio 2.5 *Sea dado el PVI*

$$\begin{cases} y'(t) = y - y^3, \quad \forall\, t \in (0, 20] \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

cuya solución analítica es:

$$y(t) = \frac{2e^t}{\sqrt{4e^{2t} - 3}}$$

(a) Aplicar el algoritmo de Euler Explícito para calcular la solución en el intervalo temporal $[0, 20]$ *con paso de discretización* $h = 0.2$.

Utilizar el resultado obtenido para proximar el valor de la solución analítica en el instante $t = 0.2$ *y calcular el error cometido.*

b) Aplicar los algoritmos de Euler Implícito y Crank-Nicholson para calcular la solución del PVI en las misma s condiciones anteriores (en el intervalo temporal $[0, 20]$ *y con paso de discretización* $h = 0.2$*).*

Utilizar los resultados obtenidos para proximar el valor de la solución analítica en el instante $t = 0.2$ *y calcular los errores cometidos y determinar el método más preciso.*

Ejercicio 2.6 *Sea dado el PVI*

$$\begin{cases} y'(t) = 1 - te^{-y}, \quad \forall\, t \in (0, 20] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

cuya solución analítica es:

$$y(t) = \ln(t + 1)$$

(a) Aplicar el algoritmo de Euler Explícito para calcular la solución en el intervalo temporal $[0, 20]$ *con paso de discretización* $h = 0.1$.

Utilizar el resultado obtenido para proximar el valor de la solución analítica en el instante $t = 10.6$ *y calcular el error cometido.*

(b) *Aplicar los algoritmos de Runge-Kutta RK2 y RK3 para calcular la solución del PVI en las misma s condiciones anteriores (en el intervalo temporal* $[0, 20]$ *y con paso de discretización* $h = 0.1$*).*

Utilizar los resultados obtenidos para proximar el valor de la solución analítica en el instante $t = 10.6$ *y calcular los errores cometidos y determinar el método más preciso.*

Ejercicio 2.7 *Sea dado el PVI*

$$\begin{cases} y'(t) = 10(2 - y), & \forall\, t \in (0, 3] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

cuya solución analítica es:

$$y(t) = 2 - e^{-10t}$$

Aplicar el algoritmo de Euler Explícito para calcular la solución en el intervalo temporal $[0, 3]$ *con pasos de discretización* $h_1 = 0.3$*,* $h_2 = 0.15$ *y* $h_3 = 0.05$.
Discutir el comportamiento de las soluciones obtenidas en términos de estabilidad numérica. Dibujar la solución analítica junto con las soluciones estables calculadas anteriormente.

Ejercicio 2.8 *Sea dado el PVI*

$$\begin{cases} y'(t) = y - 1/y, & \forall\, t \in (0, 4] \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

cuya solución analítica es:

$$y(t) = \sqrt{8e^{2t} + 1}$$

(a) *Aplicar el algoritmo de Euler Explícito para calcular la solución en el intervalo temporal* $[0, 1]$ *con paso de discretización* $h = 0.025$.

Utilizar el resultado obtenido para aproximar el valor de la solución analítica en el instante $t = 0.3$ *y calcular el error cometido.*

(b) *Aplicar los algoritmos de Euler Implícito y Crank-Nicholson para calcular la solución del PVI en las mismas condiciones anteriores (en el intervalo temporal* $[0,1]$ *y con paso de discretización* $h = 0.025$*).*

Utilizar los resultados obtenidos para aproximar el valor de la solución analítica en el instante $t = 0.3$ *y calcular los errores cometidos y determinar el método más preciso.*

Ejercicio 2.9 *Sea dado el PVI*

$$\begin{cases} y'(t) = (t-1)(y - y^2), & \forall\, t \in (0,2] \\ y(0) = 1/2 \end{cases}$$

cuya solución analítica es:

$$y(t) = \frac{e^{(1/2)t^2 - t}}{1 + e^{(1/2)t^2 - t}}$$

(a) *Aplicar el algoritmo de Euler Explícito para calcular la solución en el intervalo temporal* $[0,2]$ *con paso de discretización* $h = 0.004$*.*

Utilizar el resultado obtenido para aproximar el valor de la solución analítica en el instante $t = 1.24$ *y calcular el error cometido. Calcular el instante en el que se tiene el mínimo de concentración. Cuál es su valor real y el aproximado?*

(b) *Aplicar los algoritmos de Runge-Kutta RK2 y RK3 para calcular la solución del PVI en las misma s condiciones anteriores (en el intervalo temporal* $[0,2]$ *y con paso de discretización* $h = 0.004$*).*

Utilizar los resultados obtenidos para proximar el valor de la solución analítica en el instante $t = 1.24$ *y calcular los errores cometidos y determinar el método más preciso. Dibujar la gráfica del error de estos métodos en cada punto.*

Ejercicio 2.10 *Sea dado el PVI*

$$\begin{cases} y'(t) = te^{3t} - 2y, & \forall t \in (0,1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

cuya solución analítica es $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$*.*

a) Aplicar los métodos de Euler Explícito, Euler Implícito, Heun (RK2) y Simpson (RK3) con paso de discretización $h = 0.05$ para aproximar el valor de la solución analítica en el instante $t = 0.95$ y calcular los errores cometidos. ¿Cuál es el método más preciso? ¿Cuál es el menos preciso? Justifica tus respuestas.

b) Dibuja la gráfica del error cometido por el método de Euler Implícito y el método de Heun (RK2) en el intervalo $[0, 1]$.

Ejercicio 2.11 *Sea dado el PVI*

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{ty}{t^2+1}, & \forall t \in (0,2] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

cuya solución analítica es:

$$y(t) = \sqrt{t^2+1}$$

(a) Aplicar los métodos de Euler Explícito, Euler Implícito, Heun (RK2) y Simpson (RK3) con paso de discretización $h = 0.1$ para aproximar el valor de la solución analítica en el instante $t = 0.7$ y calcular los errores cometidos. ¿Cuál es el método más preciso? ¿Cuál es el menos preciso? Justifica tus respuestas.

(b) Dibuja la gráfica del error cometido por el método de Euler Explícito y el método de Heun (RK2) en el intervalo $[0, 2]$.

3 Problemas de Contorno

Ejercicio 3.1 *Sea dado el Problema de Transporte Difusivo y Convectivo definido por el PVC*

$$\begin{cases} -u''(x) - 4u' = -16x^3 + 34x - 1 & \forall\, x \in (0,2) \\ u(0) = 4, \quad u(2) = 2 \end{cases}$$

cuya solución analítica es:

$$sol(x) = x^4 - x^3 - (7/2)x^2 + 2x + 4$$

siendo u la concentración de un contaminante.
Aplicar el algoritmo bvp.m para calcular la solución en el intervalo $[0, 2]$ *con paso de discretización* $h = 0.125$.

1. *Dibujar la solución analítica junto con la solución numérica*
2. *Determinar los valores máximos y mínimos de contaminación así como su localización utilizando la solución numérica y la analítica. Calcular los errores cometidos.*
3. *Determinar la región máxima de seguridad en donde la concentración del contaminante es menor que uno, es decir* $u(x) < 1$. *Utilizar la solución analítica.*

Ejercicio 3.2 *Sea dado el problema de transporte definido por el PVC*

$$\begin{cases} u''(x) = u' + 2u + \cos(x) & \forall\, x \in (0, \pi/2) \\ u(0) = -0.3, \quad u(\pi/2) = -0.1 \end{cases}$$

y cuya solución analítica en el intervalo $(0, \pi/2)$ *es:*

$$u(x) = -\frac{1}{10}(\sin(x) + 3\cos(x))$$

Dividiendo el dominio $[0, \pi/2]$ *en 100 intervalos, aplicar el algoritmo bvp.m para calcular la solución del problema. Se pide:*

(a) *Determinar la temperatura mínima tanto numérica como exacta en el intervalo* $(0, \pi/2)$ *y calcula el error cometido.*

(b) *Utilizar la solución analítica para determinar la región para la cual* $u(x) > -0.2$.

(Utiliza una tolerancia de 10^{-4} *y número máximo de 100 iteraciones).*

Ejercicio 3.3 *Sea dado el problema de transporte definido por el PVC*

$$\begin{cases} -4u^{''}(x) - 6u^{'} + 2u = 2x^3 - 22x^2 - 4e^{-x} + 20 \quad \forall\, x \in (0,4) \\ u(0) = 1, \quad u(L) = 34 - e^{-4} \end{cases}$$

y cuya solución analítica en el intervalo $(0,4)$ *es:*

$$u(x) = x^3 - 2x^2 - e^{-x} + 2$$

Aplicar el algoritmo bvp.m para calcular la solución con paso de discretización $h = 0.02$*. Se pide:*

(a) Determinar la temperatura mínima en el intervalo $(0,4)$ *y el error cometido en su estimación.*

(b) Utiliza el método de Newton o el de la bisección para determinar la región de la varilla para la cual $u(x) > 10$*. Considera una tolerancia de* 10^{-3} *y un número máximo de 1000 iteraciones.*

Ejercicio 3.4 *Sea dado el PVIC*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) & \forall\,(x,t) \in (0,L) \times (0,T) \\ u(x,t) = g(x,t) & x = 0, \quad x = L \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in (0,L) \end{cases}$$

que representa un proceso de difusión de la temperatura en una varilla de $L = 4$ *cm de longitud, siendo* $\alpha = 0.08$ *la difusividad del material que compone la varilla. La función*

$$f(x,t) = x\sin(t) + \frac{x^2}{1+(x-2)^2}$$

representa un término de forzamiento que hace que la temperatura varíe de forma no homogénea y no constante en el tiempo. El comportamiento en la frontera para todo instante t *vienen dado por*

$$g(x,t) = t^3 - t^2 + e^{-t} + 1 + x(4-x)$$

siendo la distribución inicial de temperaturas de la varilla dada por

$$u_0(x) = 1 + \frac{\sin(x)}{1+(x-2)^2}$$

(a) *Tomando $\Delta x = 0.01$ y $\Delta t = 0.01$ calcula la solución del problema para $\theta = 0.5$ (Crank-Nicholson) al cabo de 2 segundos. ¿Qué temperatura se alcanza en el punto $x = 1$? Comparándo dicha temperatura con el instante inicial, ¿la varilla en $x = 1$ se ha calentado o enfriado?*

(b) *Calcula la temperatura mínima en el instante inicial y al cabo de los 2 segundos, así como los lugares de la varilla en donde se alcanzan.*

(c) *Resuelve el problema para $\theta = 0$ (Euler Explícito) con los mismos valores de Δx y Δt del apartado (a). En caso de aparecer inestabilidades determinar, manteniendo fijo Δt, el paso de discretización espacial Δx mínimo que asegura la estabilidad y con ese valor volver a aplicar el algoritmo de Euler Explícito. ¿Qué temperatura mínima se alcanza con este método?*

(d) *Representar en una misma gráfica el forzamiento $f(x,t)$ en los instantes $t = 0$ y $t = 1$. Determinar el punto en donde el forzamiento es máximo en ambos casos.*

Ejercicio 3.5 *Sea dado el PVIC*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) & \forall\,(x,t) \in (0,1) \times (0,1) \\ u(x,t) = g(x,t) & x = 0, \quad x = 1 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in (0,1) \end{cases}$$

donde

$$f(x,t) = 2t - x^2 + 10xt, \quad g(x,t) = x^2(x-1), \quad u_0(x) = 0$$

(a) *Aplicar el algoritmo de heattheta.m para calcular la solución en el intervalo temporal $[0,1]$ con paso de discretización espacial $\Delta x = 0.05$ y discretización temporal $\Delta t = 0.02$.*

Dibujar la solución obtenida para $\theta = 0$ (Euler Explícito). Puedes justificar la gráfica obtenida? Determinar el paso de discretización temporal máximo que asegura estabilidad y calcular la solución para ese paso temporal.

¿Cuanto vale la solución en el punto $x = 0.85$?

(b) Aplicar el algoritmo de Crank-Nicholson para calcular la solución del PVIC en las mismas condiciones. Dibujar la solución calculada y evaluarla en el punto $x = 0.85$.

Ejercicio 3.6 *Sea dado el PVIC*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{1}{10}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) & \forall\,(x,t) \in (0,L) \times (0,T) \\ u(x,t) = g(x,t) & x = 0, \quad x = L \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in (0,L) \end{cases}$$

que representa un proceso de difusión de la temperatura en una varilla de $L = 2\pi$ cm de longitud, en donde la función

$$f(x,t) = \cos(x)$$

representa un término de forzamiento que hace que la temperatura varíe de forma no homogénea y no constante en el tiempo. Las condiciones de contorno que definen el comportamiento de la temperatura en la frontera para todo instante t vienen dadas por

$$g(x,t) = 1 - \cos(x)$$

siendo la distribución inicial de temperaturas de la varilla dada por

$$u_0(x) = \sin(x)$$

(a) Calcula la solución del problema para $\theta = 0.5$ (Método de Crank-Nicholson) para calcular la solución en el dominio $[0, 2\pi]$ al cabo de 5 segundos, tomando 100 intervalos en x y un paso de discretización temporal $\Delta t = 0.5$.

(b) Determinar la temperatura máxima y mínima de la varilla al cabo de $T = 5$ segundos así como el lugar de la varilla en donde se alcanzan.

(c) Calcular la temperatura que se alcanza en el punto medio de la varilla, es decir, en $x = \pi$. Comparando con su temperatura inicial determina si el punto $x = \pi$ se ha enfriado o calentado.

Ejercicio 3.7 *Sea dado el PVIC*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \left(\dfrac{1}{10}\right) \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \forall\, (x,t) \in (0,10) \times (0,5) \\ u(x,t) = g(x,t) & x = 0, \quad x = 10 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in (0,10) \end{cases}$$

donde

$$g(x,t) = -x(x-10), \quad u_0(x) = 2x^2[H(x-3) - H(x-4)]$$

siendo H la función de Heaviside. El dato inicial $u_0(x)$ simula un vertido a lo largo de una carretera entre el km 3 y el km 4.

(a) *Aplicar el algoritmo de heattheta.m para calcular la solución en el intervalo temporal $[0,5]$ con paso de discretización espacial $\Delta x = 0.1$ y discretización temporal $\Delta t = 0.1$.*

   Dibujar la solución obtenida para $\theta = 0$ (Euler Explícito). Puedes justificar la gráfica obtenida?

(b) *Aplicar el algoritmo de Euler Implícito para calcular la solución del PVIC en las mismas condiciones anteriores. Dibujar la solución calculada.*

   Utilizar los resultados obtenidos para aproximar el valor máximo de concentración del contaminante así como su localización.

   ¿Si la concentración del contaminante fuese letal en dosis superiores a 5 *sabrías aproximar la región que habría que evacuar?*

   ¿y al cabo de un tiempo $T = 20$? (no te olvides de mantener las mismas condiciones aunque el tiempo sea mayor).

Ejercicio 3.8 *Sea dado el PVIC*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) & \forall\, (x,t) \in (0,L) \times (0,T) \\ u(x,t) = g(x,t) & x = 0, \quad x = L \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in (0,L) \end{cases}$$

que representa un proceso de difusión de la concentración de una especie de química que se realiza durante un tiempo $T = 20$ segundos a través de una membrana de $L = 2$ cm de longitud siendo $\alpha = 0.015$ la difusividad de la especie. La función

$$f(x,t) = 3 - x^2 + e^{-2t}(x-1)$$

representa un término de forzamiento que hace que la concentración de la especie crezca de forma no homogénea y no constante en el tiempo. Las condiciones de contorno vienen dadas por

$$g(x,t) = (x-3)^2 + e^{-t-(x-3)^2}$$

siendo la distribución inicial de concentración de la membrana dada por el dato inicial

$$u_0(x) = e^{-(x-3)^2}$$

Aplicar el algoritmo de heattheta.m para calcular la solución en el dominio $[0, L]$ y en el intervalo temporal $[0, T]$ con paso de discretización espacial $\Delta x = 0.05$ y discretización temporal $\Delta t = 0.02$. Se pide:

(a) *Calcular la solución para $\theta = 0$ (Método de Euler Explícito) y determinar la concentración máxima y mínima de la especie al cabo de $T = 20$ segundos. Calcular la concentración en el punto $x = 1.15$ cm. ¿Sabrías calcular cuanto ha disminuido la concentración en la frontera derecha?*

(b) *Manteniendo los mismos pasos de discretización espacial y temporal determinar la concentración máxima y mínima de la especie al cabo de $T = 2$ minutos. Calcular la concentración en el punto $x = 1.15$ cm.*

Ejercicio 3.9 *Para tiempos grandes ($t \to \infty$) la solución del problema anterior se estabiliza a la solución del problema estacionario asociado definido por el PVC*

$$\begin{cases} -\alpha u''(x) = 3 - x^2 & \forall\, x \in (0, L) \\ u(0) = 9, \quad u(L) = 1 \end{cases}$$

y cuya solución analítica es:

$$u(x) = 9 - \frac{1}{\alpha}\left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + \left(4\alpha - \frac{7}{3}\right)x\right]$$

Aplicar el algoritmo bvp.m para calcular la solución en el mismo intervalo anterior $(0, L)$*,* $L = 2$*, con paso de discretización* $h = 0.05$*. Se pide:*

(a) Determinar la concentración en el punto medio $x = 1.15$ *y el error cometido.*

(b) Determinar el máximo y mínimo de concentración.

Ejercicio 3.10 *Utilizando la solución analítica del problema anterior*

$$u(x) = 9 - \frac{1}{\alpha}\left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + \left(4\alpha - \frac{7}{3}\right)x\right]$$

se quieren determinar los puntos de la membrana en donde la concentración $u(x)$ *es mayor o igual que un umbral prefijado. Para ello se pide:*

(a) Calcular mediante el método de Newton los puntos de la membrana en donde la concentración $u(x)$ *es mayor o igual a* 20*. Utilizar una tolerancia del orden de* 10^{-6} *y un número máximo de iteraciones* $nmax = 1000$

(b) Utilizar el algoritmo de Aitken sobre el esquema de punto fijo asociado el método de Newton para resolver el problema anterior. Definir para ello la función $\phi(x)$ *asociada al método y utilizar la misma tolerancia y número máximo de iteraciones. Utilizar también las mismas semillas.*

(c) Calcular los residuales de las soluciones obtenidas con el algoritmo de Aitken utilizando la función residual $R(x) = |\phi(x) - x|$

Ejercicio 3.11 *Sea dado el PVIC*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) & \forall\,(x,t) \in (0,L) \times (0,T) \\ u(x,t) = g(x,t) & x = 0, \quad x = L \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in (0,L) \end{cases}$$

que representa un proceso de difusión de la temperatura que se realiza durante un tiempo $T = 30$ *segundos a través de una varilla de* $L = 4$ *cm de longitud* *siendo* $\alpha = 0.008$ *la difusividad del material que compone la varilla. La función*

$$f(x,t) = 4\cos(2x) + (x-1)e^{-t}$$

representa un término de forzamiento que hace que la temperatura varíe de forma no homogénea y no constante en el tiempo. Las condiciones de contorno que definen el comportamiento de la temperatura en la frontera para todo instante t *vienen dadas por*

$$g(x,t) = \frac{t}{1+t^2} + x(x-4)$$

siendo la distribución inicial de temperaturas de la varilla dada por el dato inicial

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x \leq 1 \\ x^3 - 1 & 1 < x < 3 \\ 0 & 3 \leq x < 4 \end{cases}$$

Aplicar el algoritmo de heattheta.m para calcular la solución en el dominio $[0, L]$, $L = 4$ *y en el intervalo temporal* $[0, T]$, $T = 30$ *segundos, con paso de discretización espacial* $\Delta x = 0.04$ *y discretización temporal* $\Delta t = 0.15$. *Se pide:*

(a) Calcular la solución para $\theta = 0$ *(Método de Euler Explícito). En caso de aparecer inestabilidades determinar el paso de discretización temporal máximo que asegura la estabilidad y con este valor volver a aplicar el algoritmo de Euler Explícito determinando la temperatura máxima de la varilla al cabo de* $T = 30$ *segundos.*

Calcular la temperatura en el punto $x = 2.36$.

Comparando con su temperatura inicial determina si el punto $x = 2.36$ *se ha enfriado o calentado.*

(b) Manteniendo los mismos pasos de discretización espacial y temporal determinar la temperatura máxima y mínima de la varilla al cabo de $T = 2$ *minutos y calcula la temperatura en el punto* $x = 2.36$.

Dibuja la gráfica de la temperatura en la frontera derecha en cada instante $t \in [0, T]$.

Calcular númericamente el valor del máximo de temperatura en la frontera derecha y el instante en el cual se alcanza el máximo.

Ejercicio 3.12 *Para tiempos grandes ($t \to \infty$) la solución del problema anterior se estabiliza a la solución del problema estacionario asociado definido por el PVC*

$$\begin{cases} -\alpha u^{''}(x) = 4\cos(2x) & \forall\, x \in (0, L) \\ u(0) = 0, \quad u(L) = 0 \end{cases}$$

y cuya solución analítica es:

$$u(x) = \frac{1}{\alpha}\left[\cos(2x) - \frac{1}{4}(\cos(8) - 1)x - 1\right]$$

Aplicar el algoritmo bvp.m para calcular la solución en el mismo intervalo anterior $(0, L)$, $L = 4$, con paso de discretización $h = 0.04$. Se pide:

(a) Determinar la temperatura en el punto $x = 2.36$ y el error cometido.

(b) Da una estimación de la temperatura máxima en el intervalo $(0, L)$, y determina el error cometido con respecto al máximo de la solución analítica.

Ejercicio 3.13 *Utilizando la solución analítica del problema anterior*

$$u(x) = \frac{1}{\alpha}\left[\cos(2x) - \frac{1}{4}(\cos(8) - 1)x - 1\right]$$

se quieren determinar los puntos de la varilla en donde la temperatura $u(x)$ es mayor o igual que un umbral prefijado. Utilizando una tolerancia del orden de 10^{-3} y un número máximo de iteraciones $nmax = 1000$ se pide:

(a) Calcular mediante el método de Newton los puntos de la varilla en donde la temperatura $u(x)$ es menor o igual a 50 grados.

(b) Calcular mediante el método de Aitken basado en la función $\phi(x)$ definida por el método de Newton los puntos de la varilla en donde la temperatura $u(x)$ es menor o igual a 50 grados.

4 Soluciones

4.1 Resolución de ecuaciones no lineales

Ejercicio 1.1. (a) Tras dibujar la ecuación se observa que la ecuación tiene tres raíces reales. Utilizando el intevalo $[-2, -1]$ se tiene $x = -1.3193$, $res = -0.0036826$, $niter = 9$. Utilizando el intervalo $[-1, 0]$ se tiene $x = -0.43262$, $res = -0.0011507$, $niter = 9$, y utilizando el intervalo $[1, 2]$ se tiene $x = 1.7529$, $res = -0.0080247$, $niter = 9$.
(b) Calculamos para ello la derivada de la función, obteniendo $f'(x) = -6x^2 + 5$. Utilizando el mtodo de Newton con $x_0 = -1.5$ se tiene $x = -1.32$, $res = 7.521 \times 10^{-11}$, $niter = 4$. Utilizando el el mtodo de Newton con $x_0 = -0.5$ se tiene $x = -0.43232$, $res = 2.2429 \times 10^{-10}$, $niter = 3$. Utilizando el mtodo de Newton con $x_0 = 1.5$ se tiene $x = 1.7523$, $res = -1.1488 \times 10^{-9}$, $niter = 4$.

Ejercicio 1.2. (a) $x = 1.3643, res = -0.016047, niter = 9$.
(b) $x = 1.3652, res = 8.2905 \cdot 10^{-9}, niter = 3$.

Ejercicio 1.3. (a) El análisis de la gráfica de la función revela que la ecuación admite una única solución. Considerando el esquema numérico asociado al Método de Newton como un esquema de punto fijo se tiene que

$$\phi_N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

y el esquema $x = \phi_N(x)$. Utilizando el mtodo de punto fijo con semilla $x_0 = 1$ se tiene $x = 1.0875$, $niter = 4$. Utilizando el mtodo de Aitken con la misma semilla se tiene $x = 1.0875$, $niter = 3$. Ambos métodos son convergentes pero el método de Aitken es ligeramente más rápido.
(b) Utilizando el método de punto fijo con semilla $x_0 = 1$ se tiene $x = 1.0875$, $niter = 6$. Con Aitken se alcanza la misma solución pero en 7 iteraciones resultando en este caso ligeramente más lento.
(c) Utilizando el método de punto fijo con semilla $x_0 = 1$ la sucesión no está definida (aparece un NaN) en la séptima iteración. Con Aitken se alcanza la solución $x = 1.0875$ y en 7 iteraciones. En este caso el método de Aitken nos ha proporcionado un método convergente mientras que el de puntofijo no ha convergido.

Ejercicio 1.4. (a) El análisis de la gráfica revela que la ecuación tiene 3 soluciones. Utilizando el esquema de punto fijo $\alpha = \phi_N(\alpha)$ obtenemos

Semilla x_0	α^*	$niter$
-2	-0.45896	6
1	0.91001	4
4	3.7331	5

(b) Utilizando el algoritmo de Aitken obtenemos

Semilla x_0	$\alpha*$	$niter$
-2	-0.45896	4
1	0.91001	3
4	3.7331	4

(c) Usando ϕ_1 obtenemos tenemos

	Punto Fijo		*Aitken*	
Semilla x_0	$\alpha*$	$niter$	α^*	$niter$
-2	3.7331	25	3.7331	5
1	3.7331	28	0.91001	11
4	3.7331	20	3.7331	4

(d) Usando ϕ_2 obtenemos tenemos

	Punto Fijo		*Aitken*	
Semilla x_0	$\alpha*$	$niter$	α^*	$niter$
-2	0.91001	18	0.91001	4
1	0.91001	15	0.91001	3
4	Inf	7	3.7331	9

Ejercicio 1.5. Utilizando el método de Newton obtenemos la solución $(x, y)' = (0.5, 0.86603)'$ con residual $F = 2.4825 \times 10^{-16}$ en $niter = 5$ iteraciones. Con los comandos de fsolve se tiene la misma solución con residual 1.0354×10^{-7}.

Ejercicio 1.6. La solución del sistema es $(x, y)' = (1.7725, 17725)'$, con un residuo de $2.2204 \cdot 10^{-16}$ en 6 iteraciones.

4.2 Problemas de Valor Inicial

Ejercicio 2.1. Sólo la solución $y2$ es estable ya que $y1$ oscila de manera explosiva e $y3$ oscila de manera amortiguada. El límite de estabilidad de este problema es $h_e < 1/6$ (aparecen oscilaciones) que son amortiguadas hasta $h < 1/3$ luego constantes para $h = 1/3$ y finalmente explosivas para $h > 1/3$. Para su determinación se define el cambio de variable $y(t) = \ln(v(t) + t) + 1$ y se estudia el problema para $v(t)$.
El mínimo de concentración se da en el instante $t = (1/6)\ln(60) = 0.68239$ y un valor de 0.83637.

Ejercicio 2.2. (a) Puesto que $t(m) = (m-1)h$ se tiene $t(19) = 18h = 3.6$ y $uf(19) = 49.892$. La solución analítica es $y(3.6) = 68.499$ por tanto el error cometido es $e_f = 18.607$. Para calcular la solución en el instante $t = 3.627$ se define $Nh = 5000$ lo que nos da $h = 10^{-3}$ y se ejecuta nuevamente el algoritmo. Se tiene $uf(3628) = 70.245$. La solución analítica es $y(3.627) = 70.372$ por tanto el error cometido es $e_f = 0.12722$.
(b) Puesto que $t(m) = (m-1)h$ se tiene $t(19) = 18h = 3.6$, con $ub(19) = 103.93$ y $uc(19) = 68.286$ La solución analítica es $y(3.6) = 68.499$ por tanto los errores cometidos son $e_b = 35.435$ y $e_c = 0.21256$.

Ejercicio 2.3. (a) Puesto que $t(m) = (m-1)h$ se tiene $t(26) = 25h = 1.25$ y $uf(26) = 1.2347$. La solución analítica es $y(1.25) = 1.2876$ por tanto el error cometido es $e_f = 0.052912$. El mínimo de concentración se da en el instante $t = 1$ con valores $y(1) = 1.2752$ y $t(21) = 20h = 1.0$ con $uf(21) = 1.2271$.
En caso de haber resuelto el problema con paso de discretización $h = 0.004$ y pidiendo la evaluación en $t = 1.24$ (como apareció por error en algunos textos) se tenía: $Nh = 500$, $t(311) = 310h = 1.24$, $uf(311) = 1.2827$, $y(1.24) = 1.2866$ y $ef = 0.003865$.
(b) Puesto que $t(m) = (m-1)h$ se tiene $t(26) = 1.25$, con $u2(26) = 1.2869$. La solución analítica es $y(1.25) = 1.2876$ y el error cometido es $e_2 = 7.009 \times 10^{-4}$. El método más preciso es el de RK2.

Ejercicio 2.4. Es claro que sólo $uf1$ es estable ya que $uf2$ oscila inicialmente mientras que $uf3$ oscila de manera constante. El límite de estabilidad de este problema es $h_e < 0.25$ (aparecen oscilaciones) que son amortiguadas hasta $h < 0.5$ luego constantes para $h = 0.5$ y finalmente explosivas para $h > 0.5$.

Ejercicio 2.5. (a) Puesto que $t(m) = (m-1)h$ se tiene $t(2) = h = 0.2$ y $uf(2) = 0.8$. La solución analítica es $y(0.2) = 1.4181$ por tanto el error

cometido es $e_f(0.2) = 0.6181$
(b) Puesto que $t(m) = (m-1)h$ se tiene $t(2) = h = 0.2$, con $ub(2) = 1.5568$ y $uc = 1.3073$ La solución analítica es $y(0.2) = 1.4181$ por tanto los errores cometidos son $e_b(0.2) = 0.13867$ y $e_c(0.2) = 0.11080$. El método más preciso es el de Crank-Nicholson.

Ejercicio 2.6. (a) Puesto que $t(m) = (m-1)h$ se tiene $t(107) = 106h = 10.6$ y $uf(107) = 6.9828$. La solución analítica es $y(10.6) = 2.4510$ por tanto el error cometido es $e_f = 4.5318$
(b) Puesto que $t(m) = (m-1)h$ se tiene $t(107) = 10.6$, con $u2(107) = 4.0716$ y $u3 = 2.4210$ La solución analítica es $y(10.6) = 2.4510$ por tanto los errores cometidos son $e_2 = 1.6205$ y $e_3 = 0.029969$. El método más preciso es el de RK3.

Ejercicio 2.7. Solo $uf3$ es estable ya que $uf2$ oscila inicialmente mientras que $uf1$ oscila de manera explosiva. El límite de estabilidad de este problema es $h_e < 0.1$ (aparecen oscilaciones) que son amortiguadas hasta $h < 0.2$ luego constantes para $h = 0.2$ y finalmente explosivas para $h > 0.2$. Para la determinación de la solución exacta se define el cambio de variable $y(t) = 2 - v(t)$ y se estudia el problema para $v(t)$.

Ejercicio 2.8. (a) Puesto que $t(m) = (m-1)h$ se tiene $t(13) = 12h = 0.3$ y $uf(13) = 3.9320$. La solución analítica es $y(0.3) = 3.9468$ por tanto el error cometido es $e_f = 0.014752$.
(b) Puesto que $t(m) = (m-1)h$ se tiene $t(13) = 12h = 0.3$, con $ub(4) = 3.9621$ y $uc = 3.9468$. La solución analítica es $y(0.3) = 3.9468$ por tanto los errores cometidos son $e_b = 0.015335$ y $e_c = 5.9019 \times 10^{-5}$.

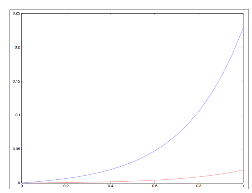
Ejercicio 2.9. (a) Puesto que $t(m) = (m-1)h$ se tiene $t(311) = 310h = 1.24$ y $uf(311) = 0.38373$. La solución analítica es $y(1.24) = 0.38433$ por tanto el error cometido es $e_f = 6.0292 \times 10^{?4}$. El mínimo de concentración se da en el instante $t = 1$ con valores $y(1) = 0.37754$ y $uf(251) = 0.37706$.
(b) Puesto que $t(m) = (m-1)h$ se tiene $t(311) = 1.24$, con $u2(311) = 0.38433$ y $u3(311) = 0.38433$. La solución analítica es $y(1.24) = 0.38433$ y los errores cometidos son $e_2 = 4.0405 \times 10^{?8}$ y $e_3 = 3.1418 \times 10^{?11}$. El método más preciso es el de RK3.

Ejercicio 2.10. (a) Solución exacta 2.5992. El más preciso RK3 y el menos

EE.

	Aproximación ($pos = 20$)	Error
Euler Explícito	2.4095	0.18964
Euler Implícito	2.7882	0.18901
Heun (RK2)	2.6151	0.015927
Simpson (RK3)	2.5990	$1.5213 \cdot 10^{-4}$

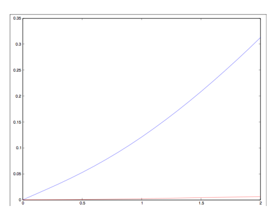
(b) La gráfica del error es:



Ejercicio 2.11. (a) Solución exacta 1.49. El más preciso RK3 y el menos EI.

	Aproximación ($pos = 8$)	Error
Euler Explícito	1.4123	0.077721
Euler Implícito	1.5719	0.081884
Heun (RK2)	1.4888	0.0012153
Simpson (RK3)	1.4900	$3.6444 \cdot 10^{-5}$

(b) La gráfica del error es:



4.3 Problemas de Contorno

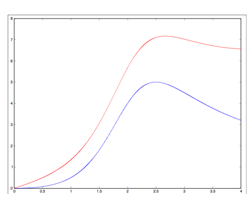
Ejercicio 3.1. La partición del intervalo es de $N = 15$ sub-intervalos que generan pasos de discretización $h = 1/8 = 0.125$.El máximo de concentración es, aproximadamente, $u_{max} = 4.3235$ y se da en el punto $x = 0.250$. El mínimo es $u_{min} = 0.72331$ y se da en el punto $x = 1.650$.

Buscaremos los puntos de máximo y mínimo de concentración entre las soluciones de la ecuación $dsol(x) = 0$. Para ello usaremos el algoritmo de Newton-Raphson. Para $x_0 = 0.250$ se tiene que el máximo de concentración se localiza en el punto $x = 0.26613$ siendo $res = 9.0838 \times 10^{-13}$, $niter = 2$ los otros parámetros de salida.
Para $x_0 = 1.650$ se tiene que el mínimo de concentración se localiza en el punto $x = 1.6338$ siendo $res = 1.2857 \times 10^{-6}$, $niter = 2$ los otros parámetros de salida.
El error cometido es de 0.052912 para el máximo y de 0.034198 para el mínimo.
Finalmente para la detrminación de la región de seguridad se resuelve la ecuación $sol(x) = 1$ definiendo una función $f(x) = sol(x) - 1$ y aplicando dos veces el método de Newton-Raphson. Se tiene que para $x_0 = 1.5$ obtenemos $x = 1.4142$ en 3 iteraciones y para $x_0 = 2$ obtenemos $x = 1.8229$ en 4 iteraciones. Una región de seguridad puede ser por tanto $[1.5, 1.75]$.

Ejercicio 3.2. (a) Temperatura mínima aproximada $= -0.31622$
Temperatura mínima exacta $= -0.31623$ (tolerancia 10^{-4})
Error $= 8.6941 \cdot 10^{-6}$.
(b) Region $= [1.2078, \pi/2]$.

Ejercicio 3.3. (a) Temperatura mínima $= 0.54209$ y en $x = 1.26$.
Con solución exacta mínimo $= 0.54152$, con error $= 5.7613 \cdot 10^{-4}$.
(b) *Region* $= [2.9349, 4]$.

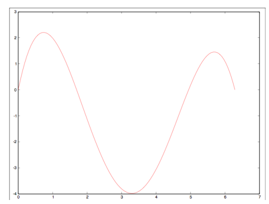
Ejercicio 3.4. (a) La temperatura en $x = 1$ es de 4.4188.
En el instante inicial es de 1.4207, por tanto se ha calentado.
(b) Mínimo inicial $= 0.84864$ en $x = 4$
Mínimo a los 2 segundos $= 2.5454$ en $x = 0.39$
(c) $\Delta x_{min} = 0.04$. Temperatura mínima $= 2.5481$
(d) En $t = 0$ forz máx en $x = 2.5$. En $t = 1$ forz. máx en $x = 2.662$.



Ejercicio 3.5. (a) Puesto que $\alpha = \mu \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = 8$ la solución es inestable

y aparecen oscilaciones. Si definimos $\Delta t = 0.00125$ entonces $\alpha = 0.5$ y desaparecen las oscilaciones. Calculando la solución, con $\Delta x = 0.05$, se tiene $x(18) = 0.85$ y $u(18) = 0.44957058$.
(b) Se define $\theta = 0.5$ para forzar el método de Crank-Nicholson en el algoritmo heattheta. Para la solucin se tiene $x(18) = 0.85$ y $u(18) = 0.44957077$.

Ejercicio 3.6. (a) La solución es



(b) máximo $= 2.2036$ en $x = 0.75398$
mínimo $= -3.9834$ en $x = 3.2673$
(c) Temperatura en $x = \pi$ es de -3.9381 ($pos = 51$).
La diferencia con el instante inicial es de 3.9381 grados por lo que se ha enfriado.

Ejercicio 3.7. (a) Puesto que $\alpha = \mu \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = 1$ la solución es inestable y aparecen oscilaciones.
(b) Se define $\theta = 1$ para forzar el método de Euler Implícito en el algoritmo heattheta. La representación gráfica muestra que han desaparecido las oscilaciones. El máximo de la concentración es $u = 9.50785$ y se encuentra en el km $x = 3.6$.
La región a evacuar es $x(25 : 48)$ que corresponde a los km $2.4 - 4.7$.
Al cabo de $T = 20$ ya no hay concentración superior a 5 y toda la región es segura.

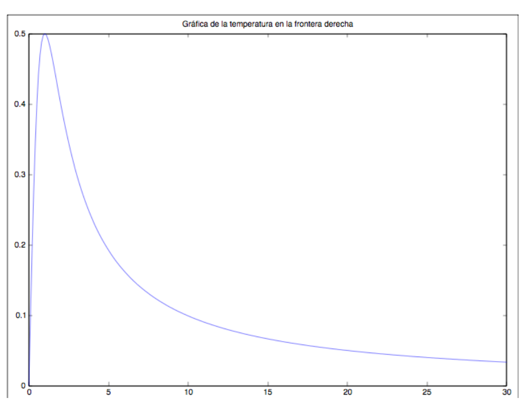
Ejercicio 3.8. (a) La concentración máxima al cabo de $T = 20$ segundos es $u_M = 37.8248$ y la mínima es $u_m = 1$ En el punto $x = 1.15$ de la membrana, $x = x(24)$ la concentración al cabo de $T = 20$ segundos es $u(24) = 29.2232$.
La disminución de la concentración es 0.3679.
(b) Al cabo de 2 minutos se tiene $u(24) = 59.9829$. El máximo de concentración en la membrana después de 2 minutos es de 67.7643 y el mínimo es 1.

Ejercicio 3.9. (a) La concentración estacionaria en el punto $x = x(24) = 1.15$ es $u(24) = 60.7692$. La solución analítica es $sol(1.15) = 60.7556$. El

error cometido es $e = |u(24) - sol(1.15)| = 0.0136$.
(b) Se tiene $u_M = 68.5333$, $u_m = 1$.

Ejercicio 3.10. (a) Utilizando el método de Newton con $x_0 = 0.1$, $tol = 10^{-6}$ y $nmax = 1000$ se tiene $x_* = 0.0764$, $niter = 3$, $res = -1.6769 \times 10^{-12}$. Con $x_0 = 1.8$, $tol = 10^{-6}$ y $nmax = 1000$ se tiene $x^* = 1.7510$, $niter = 3$, $res = 3.5527 \times 10^{-15}$. La región buscada es el intervalo $[0.0764, 1.7510]$.
(b) Se tiene: con $x_0 = 0.1$, $tol = 10^{-6}$ y $nmax = 1000$ se tiene $x_{a1} = 0.0764$, $niter_{a1} = 2$. Con $x_0 = 1.8$, $tol = 10^{-6}$ y $nmax = 1000$ se tiene $x_{a2} = 1.7510$, $niter_{a2} = 2$.
(c) $R(x_{a1}) = R(0.1252) = 6.6914 \times 10^{-8}$, $R(x_{a2}) = R(4.6008) = 2.0593 \times 10^{-10}$.

Ejercicio 3.11. (a) El coeficiente de estabilidad $\alpha\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = 0.75 > 0.5$ por tanto la solución presenta inestabilidades. El coeficiente máximo es de 0.1, con el cual se obtiene una temperatura máxima al cado de 30 segundos de 86.526 grados.
En el punto $x = 2.36$ la temperatura es de 10.724 grados.
La diferencia entre la temperatura en el instante inicial y al cabo de 30 segundos es de 1.4201 grados por lo que la temperatura en este punto se ha enfriado.
(b) Al cabo de 2 minutos la temperatura máxima es de 133.07 grados, la temperatura mínima es de -141.74 y la temperatura en el punto $x = 2.36$ es de 2.6361 grados.
La temperatura en la frontera derecha viene dada por la función $g(4,t) = \frac{t}{1+t^2}$ que tiene por gráfica



La temperatura máxima en la frontera derecha es de 0.5 grados y se alcanza al cabo de 1 segundo.

Ejercicio 3.12. (a) La temperatura es de -39.589 grados y el error cometido es de 0.021110.
(b) El máximo numérico es de 113.76 mientras que el máximo de la solución analítica es de 113.70, por lo que hemos cometido un error de 0.060658 grados.

Ejercicio 3.13. (a) El intervalo pedido es $[0, 2.69568] \cup [3.7629, 0]$.
(b) De nuevo el intervalo pedido es $[0, 2.69568] \cup [3.7629, 0]$.