5. RECURRENCIAS LINEALES

5.1. Recurrencias lineales homogéneas

Definiciones

Una **relación o fórmula de recurrencia de orden** $k \geq 1$ para una sucesión $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ es una expresión que relaciona cada término con sus k términos anteriores:

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}) \quad , \quad \text{para todo } n \geq k$$

Para poder hallar la sucesión a partir de la fórmula de recurrencia es necesario conocer los k primeros términos, que se llaman **condiciones iniciales**. La fórmula de recurrencia junto con las condiciones iniciales se llama **sucesión recurrente o de recurrencia**.

Una relación recurrencia de orden k se llama **lineal** cuando la fórmula de recurrencia es lineal:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + g(n) \quad , \quad \text{para todo } n \geq k$$

Si $g(n) \equiv 0$, la relación de recurrencia lineal se llama **homogénea**.

Resolver una sucesión de recurrencia consiste en obtener, a partir de la fórmula de recurrencia y las condiciones iniciales, una fórmula $a_n = F(n)$, $n \geq 0$, que proporcione los términos de la sucesión en función del lugar que ocupan.

Recurrencias lineales de primer orden

La solución de las sucesiones recurrentes lineales de primer orden se obtienen fácilmente por inducción:

$$\begin{cases} a_n = c a_{n-1} + g(n) \ , & n \geq 1 \\ a_0 = b_0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad a_n = c^n b_0 + \sum_{i=1}^{n} g(i) c^{n-i}$$

Recurrencias lineales de segundo orden homogéneas

Una sucesión recurrente lineal de segundo orden homogénea es: $(\star) \begin{cases} a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} \ , & n \geq 2 \\ a_0 = b_0 \ , \quad a_1 = b_1 \end{cases}$

Se llama **ecuación característica** de la recurrencia a la ecuación $x^2 = c_1 x + c_2$, y sus soluciones se llaman **raíces características**.

Propiedades de la ecuación y raíces características

1. $x = \alpha$ es raíz característica si y sólo si $a_n = \alpha^n$ es solución de la fórmula de recurrencia.

2. Si $x = \alpha$ es una raíz característica doble, entonces $n\alpha^n$ es solución de la fórmula de recurrencia.

3. Si x_n e y_n son soluciones de la fórmula de recurrencia, también lo son $x_n + y_n$ y kx_n, para todo k.

Soluciones de las sucesiones recurrentes lineales de segundo orden

- Si $\alpha \neq \beta$ son dos raíces características, entonces la solución a la sucesión recurrente $(\star)$ es:

$$a_n = k_1 \alpha^n + k_2 \beta^n \quad , \quad \text{donde } k_1 \text{ y } k_2 \text{ son las soluciones del sistema: } \begin{cases} k_1 + k_2 = b_0 \\ k_1 \alpha + k_2 \beta = b_1 \end{cases}$$

- Si α es una raíz característica doble, entonces la solución a la sucesión recurrente $(\star)$ es:

$$a_n = (k_1 + k_2 n)\alpha^n \quad , \quad \text{donde } k_1 \text{ y } k_2 \text{ son las soluciones del sistema: } \begin{cases} k_1 = b_0 \\ (k_1 + k_2)\alpha = b_1 \end{cases}$$

Ejercicios

1. Encuentra el término general de las siguientes sucesiones recurrentes:

(a) $\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} \,, & n \geq 2 \\ a_0 = 6 \,, \;\; a_1 = 8 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} \,, & n \geq 2 \\ a_0 = 2 \,, \;\; a_1 = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \,, & n \geq 2 \\ a_0 = 4 \,, \;\; a_1 = 1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} a_{n+2} = -4a_{n+1} + 5a_n \,, & n \geq 0 \\ a_0 = 2 \,, \;\; a_1 = 8 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \,, & n \geq 2 \\ a_0 = 1 \,, \;\; a_1 = 0 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \,, & n \geq 3 \\ a_0 = 2 \,, \;\; a_1 = 5 \,, \;\; a_2 = 15 \end{cases}$

2. Una máquina expendedora sólo acepta monedas de 1 dólar y 5 dólares. ¿De cuántas formas se pueden depositar n dólares.

3. ¿Cuántas cadenas con n símbolos 0's y 1's no contienen tres ceros consecutivos?

4. ¿Cuántas cadenas con n símbolos 0's, 1's y 2's no contienen dos ceros consecutivos?

5. ¿Cuántas cadenas con n símbolos 0's, 1's y 2's no contienen dos símbolos iguales consecutivos?

6. Si en cada paso se pueden subir 1 o 2 peldaños, ¿de cuántas formas se puede subir una escalera con n peldaños?

7. Se trazan n rectas en el plano con la condición de que cada una de ellas corte a todas las restantes y que no haya tres coincidentes. Para cada $n \geq 0$, sea a_n el número de regiones en que las n rectas dividen al plano, y sea b_n el número de esas regiones no acotadas. Encuentra expresiones para a_n y b_n en función de n.

8. (Problema de las torres de Hanoi) Se dispone de 3 estacas y n discos, todos ellos de diferente tamaño y apilados en la estaca 1 ordenados de mayor a menor. El objetivo es cambiar todos los discos a otra estaca en la misma posición y de tal manera que en cada movimiento sólo se mueve un disco y nunca se puede colocar un disco sobre otro más pequeño. Si a_n es el menor número de movimientos que se requieren para hacerlo, encuentra su expresión en función de n.

9. Halla el número de sucesiones de longitud n que se pueden formar con a's, b's y c's de tal manera que todas las cadenas de a's consecutivas tienen longitud par.

10. Se dispone de una cantidad ilimitada de cubos de lados 1, 2 y 4 para construir una torre de base 4×4 en la que cada capa está formada por cubos del mismo tamaño. ¿De cuántas formas distintas se puede construir una torre de altura n.

11. Halla el determinante de la matriz: $A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $n \geq 1$.

Soluciones y/o sugerencia a los ejercicios

1. **(a)** $a_n = 2(3-n)2^n$; **(b)** $a_n = 3 \cdot 2^n - 5^n$; **(c)** $a_n = 4 - 3n$; **(d)** $a_n = 3 - (-5)^n$; **(e)** $a_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$; **(f)** $a_n = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n$.

2. $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + 1$.

3. $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - a_{n-4} \,, & n \geq 5 \\ a_1 = 2 \,, \; a_2 = 4 \,, \; a_3 = 7 \,, \; a_4 = 13 \end{cases}$

4. $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-3}\,, & n \geq 4 \\ a_1 = 3\,,\ a_2 = 9\,,\ a_3 = 23 \end{cases}$

5. $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$, $n \geq 1$.

6. $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\,, & n \geq 3 \\ a_1 = 1\,,\ a_2 = 2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} a_n = n + a_{n-1}\,, & n \geq 2 \\ a_1 = 2 \end{cases}$ y $b_n = 2n$.

8. $a_n = 2^n - 1$, $n \geq 1$.

9. $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}\,, & n \geq 3 \\ a_1 = 2\,,\ a_2 = 5 \end{cases}$

10. $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-4}\,, & n \geq 5 \\ a_1 = 1\,,\ a_2 = 2\,,\ a_3 = 3\,,\ a_4 = 6 \end{cases}$

11. $a_n = 1 + n$.

5. RECURRENCIAS LINEALES

5.2. Sucesión de Fibonacci

Sucesión de Fibonacci

Es una de las más importantes sucesiones recurrentes: $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \ , & n \geq 2 \\ a_0 = a_1 = 1 \end{cases}$. Sus primeros términos son: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

La ecuación característica, raíces características y soluciones de la fórmula de recurrencia son:

$$x^2 = x + 1 \implies x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \implies a_n = k_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + k_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Con las condiciones iniciales se hallan las constantes y se resuelve la sucesión recurrente:

$$\begin{cases} a_0 = k_1 + k_2 = 1 \\ a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} k_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} k_2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} k_1 + k_2 = 1 \\ k_1 - k_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \implies \begin{cases} k_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ k_2 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{cases} \implies$$

$$\implies a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$$

Propiedades

La **sucesión de Fibonacci** $\{F_1, F_2, F_3, \ldots\}$, definida por:

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \ , & n \geq 3 \\ F_1 = F_2 = 1 \end{cases} \qquad \text{o} \qquad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

verifica:

1. $F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$
2. $F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$
3. $F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$
4. $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$
5. $F_{n+1}^2 = F_n F_{n+2} + (-1)^n$
6. $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$
7. F_k es un divisor de F_{km}.
8. Si $\text{mcd}(n, m) = d$, entonces $\text{mcd}(F_n, F_m) = F_d$.
9. El cociente entre cada término y su anterior converge a la **razón áurea**:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803\ldots$$

que es la raíz positiva de la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$.

Ejercicios

1. Demuestra cada una de las propiedades de la sucesión de Fibonacci.

5. RECURRENCIAS LINEALES

5.3. Recurrencias lineales no homogéneas

Definición
Una **relación de recurrencia lineal no homogénea de orden** $k \geq 1$ es una relación de la forma

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + g(n) \quad , \quad \text{para todo } n \geq k$$

donde $g(n) \not\equiv 0$, y se llama **relación de recurrencia lineal homogénea asociada** a la relación:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} \quad , \quad \text{para todo } n \geq k$$

Cuando se trabaja con la relación de recurrencia lineal homogénea asociada, la relación no homogénea de la que procede se suele llamar relación **completa**.

Propiedades

1. Si X_n) e Y_n son soluciones de la relación completa, entonces $X_n - Y_n$ es solución de la relación homogénea asociada.

2. Si x_n es solución de la relación homogénea asociada y X_n es solución de la relación completa, entonces $x_n + X_n$ es solución de la relación completa.

3. Todas las soluciones de la relación completa son de la forma $x_n + X_n$ donde x_n son todas las soluciones de la relación homogénea asociada y X_n es una solución particular de la relación completa.

Resolución de las sucesiones recurrentes lineales completas de segundo orden
Para resolver la sucesión recurrente lineal completa de segundo orden ($\star$) se considera la relación homogénea asociada ($\star\star$).

$$(\star) \begin{cases} a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + g(n) \ , \quad n \geq 2 \\ a_0 = b_0 \ , \quad a_1 = b_1 \end{cases} \qquad\qquad (\star\star) \ \ a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

- Se hallan todas las soluciones de la relación homogénea ($\star\star$): $x_n(k_1, k_2)$.
- Se busca una solución particular X_n de la relación completa teniendo en cuenta su forma en los siguientes casos particulares:
  - Si $g(n)$ es un polinomio de grado p, X_n es un polinomio de grado mayor o igual que p.
  - Si $g(n) = cb^n$ y b no es raíz característica, entonces $X_n = kb^n$.
  - Si $g(n) = cb^n$ con b raíz característica simple, entonces $X_n = knb^n$.
  - Si $g(n) = cb^n$ con b raíz característica doble, entonces $X_n = kn^2b^n$.
- Todas las soluciones de la relación completa son de la forma $a_n = x_n(k_1, k_2) + X_n$.
- Para hallar la solución a la sucesión ($\star$) se determinan las constantes k_1 y k_2 para que a_n general verifique las condiciones iniciales.

Ejercicios

1. Encuentra el término general de las siguientes sucesiones recurrentes no homogéneas:

(a) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} + 2^n \ , \quad n \geq 2 \\ a_0 = 0 \ , \quad a_1 = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n \ , \quad n \geq 2 \\ a_0 = 1 \ , \quad a_1 = 3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 3n^2 \ , \quad n \geq 1 \\ a_0 = 7 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 5 \cdot 7^n \ , \quad n \geq 1 \\ a_0 = 2 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 5 \cdot 3^n \ , \quad n \geq 1 \\ a_0 = 2 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-3} + n^2 \ , \quad n \geq 3 \\ a_0 = 11 \ , \quad a_1 = 1 \ , \quad a_2 = -1 \end{cases}$

Soluciones y/o sugerencia a los ejercicios

1. **(a)** $a_n = 3^n - 2^n$; **(b)** $a_n = (2n-3)2^n + n + 4$; **(c)** $a_n = n^2 \frac{3n}{2} + 7$; **(d)** $a_n = \frac{35 \cdot 7^n - 27 \cdot 3^n}{4}$; **(e)** $a_n = (5n+2)3^n$; **(f)** $a_n = 3(-1)^n - \frac{5n+8}{2} 2^n + \frac{n^2}{2} + \frac{9n}{2} + 12$.

5. RECURRENCIAS LINEALES

5.4. Recurrencias no lineales. Números de Catalan

Se dice que una relación o fórmula de recurrencia de orden $k \geq 1$ es **no lineal** cuando no es lineal la expresión que relaciona cada término con sus k términos anteriores:

$$a_n = f\left(a_{n-1},\, a_{n-2},\, \ldots,\, a_{n-k}\right) \quad , \quad \text{para todo } n \geq k$$

Para la resolución de recurrencias no lineales existen métodos particulares que se aplican en cada caso. Una recurrencia no lineal muy importante es la que define los números de Catalan.

Números de Catalan
Se llaman **números de Catalan** a los términos de la sucesión recurrente:

$$\begin{cases} a_n = a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + a_2 a_{n-3} + \ldots + a_{n-1} a_0 \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

cuya solución es $a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, $n \geq 0$. Los primeros números son: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 139, 429, ...

Los números de Catalan aparecen en multitud de problemas algorítmicos como, por ejemplo, los siguientes:

- Número de caminos monótonos que van en una malla desde $(0,0)$ hasta (n,n) sin sobrepasar la diagonal.
- Formas de colocar paréntesis en un producto de $n+1$ factores.
- Triangulaciones de un polígono convexo de $n+2$ vértices.
- Sucesiones de longitud $2n$ con n signos $+$ y n signos $-$ que comienzan con $+$.
- Árboles planos binarios con $n+1$ hojas.