4. TÉCNICAS PARA CONTAR

4.1. Cardinal de un conjunto

Funciones entre conjuntos
Se llama **función** o **aplicación** del conjunto A en el conjunto B a cualquier relación $f : A \longrightarrow B$ que a cada elemento $a \in A$ le hace corresponder un único elemento $b \in B$, que se llama **imagen** de a por f, y se indica $f(a) = b$.

Tipos de funciones
Se dice que la aplicación $f : A \longrightarrow B$ es:

- **inyectiva**, si no hay dos elementos distintos de A con la misma imagen, es decir, si de $f(a_1) = f(a_1)$ se deduce que $a_1 = a_2$.
- **sobreyectiva**, si cada elemento de B es imagen de algún elemento de A, es decir, si para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$.
- **biyectiva**, si es inyectiva y sobreyectiva.

Sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación. Es fácil deducir de las definiciones anteriores que: si f es inyectiva el número de elementos en A debe ser menor o igual que el número de elementos en B, si f es sobreyectiva el número de elementos en A debe ser mayor o igual que el número de elementos en B, y si f es biyectiva debe haber tantos elementos en A como en B.

Cardinal de un conjunto
Se llama **cardinal** del conjunto A al número de elementos que tiene A, y se representa por $|A|$.

- El conjunto vacío tiene cardinal cero.
- El conjunto A tiene cardinal n si existe una aplicación biyectiva $f : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow A$.
- El conjunto A tiene cardinal infinito si existe una aplicación inyectiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$.

Propiedades

1. Si $A \cap B = \emptyset$, entonces: $|A \cup B| = |A| + |B|$
2. Si $A \subset B$, entonces: $|A| \leq |B|$
3. Si $A \subset B$, entonces: $|B - A| = |B| - |A|$
4. Cardinal de la unión: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
   Para uniones de más conjuntos:
$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ |A \cup B \cup C \cup D| &= |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| \\ &\quad + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D| \end{aligned}$$
5. Cardinal del producto cartesiano: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
   Para más conjuntos: $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|$

Ejercicios

1. Sea A el conjunto de alumnos matriculados en Álgebra, y C el conjunto de alumnos matriculados en Cálculo. Se sabe que $|A| = 250$, $|C| = 220$ y que hay 50 alumnos matriculados en las dos asignaturas. ¿Cuál es el número de alumnos matriculados en alguna de las dos asignaturas?
2. ¿Cuántas palabras se pueden construir con exactamente cuatro letras de tal forma que la segunda y la cuarta sean vocales?

Soluciones y/o sugerencia a los ejercicios

1. 420 alumnos.

2. 18.225 palabras.

4. TÉCNICAS PARA CONTAR

4.2. Principios básicos de recuento

Principio de adición
Si el proceso de recuento de un conjunto se descompone en la unión de subconjuntos o casos mutuamente excluyentes, entonces el número de elementos del conjunto es la suma de los números de elementos de los subconjuntos.

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \quad \text{con } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ para } i \neq j \implies |A| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$$

Principio del producto
Si el proceso de recuento de un conjunto consta de una sucesión de pasos independientes, entonces el número de elementos del conjunto es el producto de los números de elementos posibles en cada paso.

$$A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \implies |A| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|$$

El principio del palomar o de Dirichlet
Si se distribuyen m objetos en n cajas con $n < m$, entonces alguna caja recibe al menos dos objetos.

El principio generalizado del palomar
Si se distribuyen m objetos en n cajas con $n < m$, entonces alguna caja recibe al menos $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ objetos, y alguna caja recibe a lo más $\lfloor \frac{m}{n} \rfloor$ objetos.

Ejercicios

1. La matrícula de los coches de cierto país consta de cuatro números seguidos de tres consonantes. ¿Cuántas matrículas distintas se pueden formar?

2. ¿Cuántos números naturales existen menores que 10^6 con todas sus cifras distintas?

3. ¿Cuántos números naturales existen menores que 10^6 que no sean capicúas?

4. ¿Puede asegurarse que en cualquier grupo de 367 personas hay al menos dos que cumplen años el mismo día?

5. Demuestra que si se eligen cinco puntos cualesquiera en cuadrado de lado 2, al menos dos de ellos se encuentran a una distancia menor o igual que $\sqrt{2}$.

6. ¿Cuántos puntos se deben elegir en una cuadrado de lado 2 para estar seguros que dos de ellos estarán a una distancia menor o igual que $\sqrt{2}/n$.

7. Demuestra que si se eligen 10 puntos cualesquiera en un triángulo equilátero de lado 1, al menos dos de ellos se encuentran a una distancia no superior a 1/3.

8. Justifica que si resuelves 29 ejercicios en una semana, algún día habrás resuelto al menos 5 ejercicios y algún día a lo más 4 ejercicios.

9. ¿Cuál es el mínimo número de estudiantes que debe tener la clase de Matemática Discreta para estar seguros de que al menos 6 estudiantes recibirán la misma nota? (Las calificaciones son números enteros)

10. Calcula el número de divisores de 112.000. ¿Cuántos son impares?

11. ¿Cuántos divisores positivos tiene el número $29.338.848.000 = 2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11$? ¿Cuántos son múltiplos de 99? ¿Cuántos son múltiplos de 39?

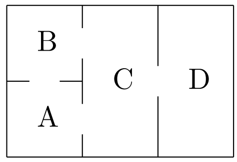
12. ¿Cuántos números de tres cifras distintas tienen todas ellas impares? ¿Y pares?

13. Se extraen, una a una con reemplazamiento, cinco cartas de una baraja. ¿En cuántas extracciones hay al menos un rey? ¿En cuántas extracciones hay al menos un rey o un as?

14. Demuestra que en un conjunto de 12 enteros existen dos cuya diferencia es divisible por 11. ¿Es cierto si cambiamos diferencia por suma?

15. Se eligen $n+1$ enteros positivos en el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 3n\}$. Demuestra que hay dos cuya diferencia es menor o igual que 2.

16. Se han de pintar las cuatro habitaciones de la casa de la figura de la figura de tal forma que las habitaciones que se comunican tengan diferente color. Si se dispone de n colores, ¿de cuántas formas distintas puede pintarse la casa?



Soluciones y/o sugerencia a los ejercicios
1. 106.480.000 matrículas.
2. 168.571 números.
3. 998.001 números no capicúas.
4. Si.
5. Divide el cuadrado en cuatro cuadrados iguales.
6. $4n^2 + 1$ puntos.
7. Divide el triángulo en nueve triángulos iguales.
8. Utiliza el principio generalizado del palomar.
9. 56 estudiantes.
10. 64 divisores, de los que 8 son impares.
11. 1.728. 576. Ninguno.
12. 60. 48.
13. 41.933.824. 68.845.568.
14. Utiliza los restos de dividir los 12 enteros por 11. No es cierto si se cambia diferencia por suma.
15. Por reducción al absurdo.
16. $n(n-1)^2(n-2)$.

4. TÉCNICAS PARA CONTAR

4.3. Variaciones y permutaciones

Variaciones sin repetición
Se llaman **variaciones sin repetición**, o simplemente **variaciones**, de n elementos tomados de m en m al número de listas ordenadas diferentes que se pueden formar con m elementos distintos elegidos de entre los n posibles, y se representa por $V_{n,m}$.
Obviamente, se ha de cumplir que $0 \leq m \leq n$, y por el principio del producto:

$$V_{n,m} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$$

Las variaciones de n elementos tomados de m coincide con el número de aplicaciones inyectivas que se pueden establecer del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, m\}$ en el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Variaciones con repetición
Se llaman **variaciones con repetición** de n elementos tomados de m en m al número de listas ordenadas diferentes que se pueden formar con m elementos iguales o distintos elegidos de entre los n posibles, y se representa por $VR_{n,m}$.
Por el principio del producto:

$$VR_{n,m} = n^m$$

Las variaciones con repetición de n elementos tomados de m coincide con el número total de aplicaciones de cualquier tipo que se pueden establecer del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, m\}$ en el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Permutaciones
Se llaman **permutaciones** de n elementos al número de listas ordenadas diferentes que se pueden formar con los n elementos, y se representa por P_n.
Las permutaciones de n elementos coinciden con las variaciones de n elementos tomados de n en n:

$$P_n = V_{n,n} = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

donde $n!$, llamado **factorial** de n, es el producto de los n primeros números naturales. (Se considera, por definición, que $0! = 1$)
Usando factoriales, las variaciones se pueden expresar como:

$$V_{n,m} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Las permutaciones de n elementos coincide con el número de aplicaciones biyectivas que se pueden establecer del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ en sí mismo.

Permutaciones con repetición
Se llaman **permutaciones con repetición** de n elementos entre los que hay exactamente s diferentes que se repiten $n_i \geq 1$, $1 \leq i \leq s$, veces cada uno de ellos, al número de listas ordenadas diferentes que se pueden formar con los n elementos, y se representa por $PR_n^{n_1,n_2,\ldots,n_s}$.
Se ha de cumplir que $n_1 + n_2 + \ldots + n_s = n$, y es fácil ver que:

$$PR_n^{n_1,n_2,\ldots,n_s} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_s!}$$

Ejercicios

1. Con el alfabeto español de 27 letras: **(a)** ¿Cuántas palabras de 5 letras se pueden formar?; **(b)** ¿Cuántas palabras de 5 letras distintas se pueden formar?; **(c)** ¿Cuántas palabras de las determinadas en (a) contienen la letra "b"?; **(d)** ¿Cuántas palabras de las determinadas en (b) contienen la letra "b"?; **(e)** ¿Cuántas palabras de (a) empiezan por vocal?; **(f)** ¿Cuántas palabras de (b) empiezan por vocal?; **(g)** ¿Cuántas palabras de 5 letras distintas se pueden formar con las cinco vocales?; **(h)** ¿Cuántas palabras de 9 letras se pueden formar reordenando las letras que la palabra "cocodrilo"?

2. Se lanza un dado 5 veces. ¿Cuántos resultados distintos pueden darse si se tiene en cuenta el orden de lanzamiento?

3. Con 5 vocales y 4 consonantes, ¿cuántas palabras de dos vocales (iguales o distintas) y dos consonantes distintas se pueden formar teniendo en cuenta que en cada palabra no figuran dos consonantes seguidas?

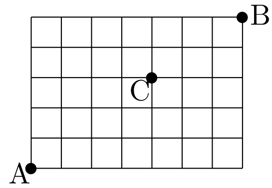
4. ¿Cuántas sucesiones de ceros y unos de longitud n contienen exactamente tres ceros?

5. Se dispone de siete libros azules, cinco negros y tres blancos, todos ellos distintos entre sí. ¿De cuántas formas se pueden alinear en un estante si han de colocarse juntos los del mismo color?

6. Un circuito eléctrico posee 10 interruptores, cada uno de ellos con dos posiciones (0 y 1). ¿Cuántos estados diferentes puede tener el circuito? ¿Cuántos de ellos tienen exactamente 3 interruptores en la posición 1?

7. ¿De cuántas formas distintas pueden repartirse 5 bolas blancas, 3 rojas y 2 negras en 10 urnas distintas de tal forma que cada urna contenga una bola?

8. La cuadrícula de la figura es el plano de una ciudad. Si las únicas direcciones permitidas son la dirección este y norte, ¿cuántos caminos distintos conducen desde A hasta B? ¿Cuántos de ellos pasan por C?



Soluciones y/o sugerencia a los ejercicios

1. **(a)** 14.348.907; **(b)** 9.687.600; **(c)** 2.467.531; **(d)** 1.794.000; **(e)** 2.657.205; **(f)** 1.794.000; **(g)** 120; **(h)** 30.240.
2. 7.776.
3. 900.
4. $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$
5. 21.772.800.
6. 1024. 120.
7. 2520.
8. 792. 350.

4. TÉCNICAS PARA CONTAR

4.4. Combinaciones

Combinaciones sin repetición
Se llaman **combinaciones sin repetición**, o simplemente **combinaciones**, de n elementos tomados de m en m al número de <u>listas no ordenadas</u> diferentes que se pueden formar con m elementos distintos elegidos de entre los n posibles, y se representa por $C_{n,m}$.
Obviamente, se ha de cumplir que $0 \leq m \leq n$, y su valor es:

$$C_{n,m} = \frac{V_{n,m}}{P_m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Las combinaciones de n elementos tomados de m coincide con el número de subconjuntos con m elementos del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Números combinatorios
Se llama **número combinatorio** n sobre m al número de combinaciones de n elementos tomados de m en m, y se representa por:

$$\binom{n}{m} = C_{n,m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Teniendo en cuenta que $0! = 1$, los números combinatorios n sobre m se pueden definir para cualesquiera par de enteros n y m que verifiquen que $0 \leq m \leq n$.

Propiedades. El triángulo de Tartaglia

1. Para cada cualquier número natural n: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, y si $n \geq 1$: $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.
2. Para cualesquiera números naturales $n \geq m$: $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$
3. Para cualesquiera números naturales $n > m$: $\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$
4. Usando la propiedad anterior, se construye el **triángulo de Tartaglia**, donde cada número es la suma de los dos que están inmediatamente por encima, cuyas formas combinatoria y numérica son:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}$$

Combinaciones con repetición
Se llaman **combinaciones con repetición** de n elementos tomados de m en m al número de listas no ordenadas diferentes que se pueden formar con m elementos iguales o distintos elegidos de entre los n posibles, y son:

$$CR_{n,m} = \binom{n+m-1}{m}$$

Ejercicios

1. ¿Cuántos equipos de baloncesto se pueden formar con 10 jugadores? ¿En cuántos de esos equipos interviene el jugador número 3?

2. Hay seis bombos, cada una de ellos con 5 bolas numeradas del 1 al 5 y de tal manera que las bolas con el mismo número son indistinguibles. Si cada bombo deposita una bola en una cesta, ¿cuántos resultados distintos se pueden presentar? ¿Cuántos de estos resultados contiene una bola numerada con el 5?

3. Se extraen, una a una, cinco cartas de una baraja. Si el orden de aparición de las cartas es irrelevante, pero distinguiendo si las extracciones se han hecho con o sin reemplazamiento, ¿cuántos resultados diferentes se pueden obtener?

4. Un banco tiene que elegir cinco cargos (director, subdirector, interventor, cajero y cobrador) entre 8 personas, de los cuales 3 son hombres y 5 mujeres. Calcula de cuántas formas puede hacer la elección si: **(a)** Se eligen los 3 hombres; **(b)** Se eligen 3 mujeres y 2 hombres; **(c)** Se eligen al menos 3 mujeres; **(d)** Dos de los hombres se llevan mal y no pueden estar juntos en la misma elección.

5. El consejo de administración de cierta empresa se compone de cinco personas. Se somete a votación secreta la aprobación de un proyecto y nadie puede abstenerse, pero sí votar en blanco. ¿Cuántos resultados distintos se pueden dar en la votación? Si el proyecto se aprueba con al menos 3 votos favorables, ¿cuántos resultados de los anteriores aprueban el proyecto?

6. En un tablero de ajedrez, ¿de cuántas formas distintas se pueden colocar 8 torres de forma que ninguna esté en la diagonal principal ni se puedan comer entre ellas?

7. En una baraja de 52 cartas, ¿de cuántas formas distintas se pueden escoger cinco cartas de modo que haya al menos una carta de cada palo?

8. ¿Cuantas palabras de 13 letras se pueden formar con las letras de la palabra "clasificación"?

9. Un ascensor de un centro comercial parte del sótano con cinco pasajeros y se detiene en siete pisos. ¿De cuántas maneras distintas pueden descender los pasajeros? ¿Y con la condición de que dos pasajeros no bajen en el mismo piso?

10. ¿De cuantas maneras se pueden repartir 10 canicas idénticas entre 6 niños? ¿Y si las canicas son todas diferentes?

Soluciones y/o sugerencia a los ejercicios

1. 252. 126.
2. 210. 126.
3. 658.008. 1.086.008.
4. **(a)** 1200; **(b)** 3600; **(c)** 5520; **(d)** 4320.
5. 21. 6.
6. 14.883.
7. 456.192.
8. 86.486.400.
9. Pasajeros distintos: 16.807, 2520. Pasajeros indistinguibles: 462, 21.
10. 3.003. 60.466.176.

4. TÉCNICAS PARA CONTAR

4.5. El principio de inclusión-exclusión

El principio de inclusión-exclusión
Es la generalización a n conjuntos de la fórmula para el cardinal de la unión de dos conjuntos. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son n conjuntos finitos, y si se llama:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| \\
\alpha_2 &= |A_1 \cap A_2| + \ldots + |A_{n-1} \cap A_n| = \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| \\
\alpha_3 &= |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \ldots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| = \sum_{i \neq j \neq k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
\ldots & \qquad \ldots\ldots \\
\alpha_n &= |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|
\end{aligned}$$

entonces:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \ldots + (-1)^{n-1}\alpha_n$$

Desarreglos
Un **desarreglo** de n objetos es una permutación de los mismos de tal manera que ninguno de ellos queda en su posición natural. El número de desarreglos de n objetos es:

$$d_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

Demostración: Si S_n es el conjunto de permutaciones de los n primeros números naturales, cuyo cardinal es $|S_n| = P_n = n!$, y $A_i = \{\pi \in S_n : \pi(i) = i\}$ es el conjunto de permutaciones en las que el lugar i lo ocupa i, $1 \leq i \leq n$, se trata de hallar el cardinal del conjunto $X = S_n - (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$, que es:

$$|X| = |S_n| - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = n! - \left(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \ldots + (-1)^{n-1}\alpha_n\right)$$

donde α_p es el número de permutaciones que tienen p números en su mismo lugar. Por tanto:

$$\alpha_1 = \binom{n}{1}(n-1)! = n! \qquad \alpha_2 = \binom{n}{2}(n-2)! = \frac{n!}{2!} \qquad \alpha_3 = \binom{n}{3}(n-3)! = \frac{n!}{3!} \qquad \cdots \qquad \alpha_n = \binom{n}{n} = 1$$

y entonces:

$$|X| = n! - \left[n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\right] = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

Combinaciones con repetición limitada
Otro caso en que se usa el principio de inclusión-exclusión se ilustra con el siguiente ejemplo:
¿Cuántos números positivos menores que 10000 tienen la suma de sus cifras igual a 25?
Se trata de hallar cuántos números $x_1x_2x_3x_4$ verifican que **(E)** $x_1+x_2+x_3+x_4 = 25$ con $0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 9$.
Si se llama A al conjunto de soluciones no negativas de (E), y A_i, $1 \leq i \leq 4$, al conjunto de soluciones no negativas de (E) con $x_i \geq 10$, entonces se trata de hallar:

$$N = |A| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = |A| - (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4)$$

Para contar las diferentes soluciones no negativas de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = p$, se puede proceder de dos formas:

- Identificar cada una de ellas con una sucesión de p ceros y 3 unos, donde los unos representan la separación entre dígitos y el número de ceros el dígito. Por ejemplo, si $p = 12$:

  $$3513 \quad \equiv \quad 000100000101000$$

  Si se procede así, el número de soluciones sería: $PR_{p+3}^{p,3}$.

- Identificar cada una de ellas con una urna en la que hay x_i bolas numeradas con i, $1 \leq 1 \leq 4$. Se se procede así, el número de soluciones sería $CR_{4,p}$ (que, obviamente, coincide con el otro valor).

Haciendo los cálculos pertinentes:

$$\begin{aligned}
|A| &= |\{\text{soluciones no negativas de } x_1+x_2+x_3+x_4=25\}| = PR^{25,3}_{25+3} = \frac{28!}{25!3!} = \binom{28}{3} \\
\alpha_1 &= \binom{4}{1}|\{\text{soluciones no negativas de } x_1+x_2+x_3+x_4=15\}| = 4PR^{15,3}_{15+3} = 4\frac{18!}{15!3!} = 4\binom{18}{3} \\
\alpha_2 &= \binom{4}{2}|\{\text{soluciones no negativas de } x_1+x_2+x_3+x_4=5\}| = 6PR^{5,3}_{5+3} = 6\frac{8!}{5!3!} = 6\binom{8}{3} \\
\alpha_3 &= \alpha_4 = 0
\end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que si un dígito es mayor o igual que 10, ya se le suponen asignados 10 ceros (o 10 bolas) y sólo hay que distribuir las restantes. Por tanto, los números positivos menores que 10000 que tienen la suma de sus cifras igual a 25 son:

$$N = \binom{28}{3} - 4\binom{18}{3} + 6\binom{8}{3} = 348$$

El principio de inclusión-exclusión en términos de propiedades

Sea A un conjunto cuyos elementos pueden o no verificar una serie de propiedades Q_i, $1 \leq i \leq n$, y sea A_i el conjunto de elementos de A que verifican la propiedad Q_i. Entonces:

- El número de elementos de A que verifican alguna propiedad es:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \ldots + (-1)^{n-1}\alpha_n$$

- El número de elementos de A que no satisfacen ninguna propiedad es:

$$|A - A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A| - \left[\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \ldots + (-1)^{n-1}\alpha_n\right]$$

- El número de elementos de A que verifican exactamente k propiedades es:

$$E(k) = \alpha_k - \binom{k+1}{k}\alpha_{k+1} + \binom{k+2}{k}\alpha_{k+2} - \ldots + (-1)^{n-k}\binom{n}{k}\alpha_n$$

- El número de elementos de A que verifican al menos k propiedades es:

$$X(k) = \alpha_k - \binom{k}{k-1}\alpha_{k+1} + \binom{k+1}{k-1}\alpha_{k+2} - \ldots + (-1)^{n-k}\binom{n-1}{k-1}\alpha_n$$

Ejercicios

1. Se tienen 5 sobre y 5 cartas, y se distribuyen al azar las cartas en los sobres. ¿De cuántas formas se pueden distribuir para que no haya ninguna coincidencia? ¿Y para que haya una coincidencia? ¿Y dos? ... ¿Y cinco?

2. ¿Cuántos números menores que 1000 verifican que la suma de sus dígitos es 5?

3. ¿Cuántos números entre 1000 y 9999 verifican que la suma de sus dígitos es 9? ¿Cuántos de éstos tienen todos sus dígitos distintos de cero?

4. Determina el número de soluciones enteras de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32$ verificando que: **(a)** $x_i \geq 0$; **(b)** $x_i > 0$; **(c)** $x_1, x_2 \geq 5$, $x_3, x_4 \geq 7$; **(d)** $x_i \geq 8$; **(e)** $x_i \geq -2$; **(f)** $x_1, x_2, x_3 > 0$, $0 < x_4 \leq 25$.

5. Se considera el código, sobre el alfabeto $\{0, 1\}$, formado por las palabras de 16 dígitos en las que el número de unos es múltiplo de 4. ¿Cuántas palabras distintas puede haber?

6. ¿Cuántos segmentos determinan n puntos situados sobre una circunferencia? Suponiendo que no hay tres segmentos que compartan un punto, ¿cuántos puntos de intersección hay en el interior de la circunferencia?

7. Con una baraja de 52 cartas, el número de repartos posibles de 5 cartas que contienen al menos tres pikas no es $C_{13,3} \cdot C_{49,2}$. ¿Cuál es la respuesta correcta?

8. ¿Cuál es el número de cuaternas (a, b, c, d) de números enteros que satisfacen que $0 < a < b < c < d < 20$.

9. ¿De cuántas maneras se pueden elegir cuatro parejas entre 30 personas?

10. Tres matrimonios se sientan en una mesa circular. ¿De cuántas formas lo pueden hacer sentándose juntos los dos miembros de cada matrimonio? ¿Y si no se pueden sentar juntos?

11. Calcula el número de sucesiones que se pueden formar con tres letras a, cinco letras b y ocho letras c. ¿En cuántas de ellas no hay dos letras b consecutivas? ¿En cuántas no hay dos letras iguales consecutivas?

12. ¿Cuántas sucesiones de 10 símbolos se pueden formar con cuatro letras a, cuatro b, cuatro c y cuatro d, si cada una de ellas debe aparecer al menos dos veces?

13. **(a)** Una caravana publicitaria consta de 6 coches y 6 furgonetas, siendo todos los vehículos de diferente color. ¿De cuántas formas diferentes puede organizarse la fila de la caravana con la condición de que no circulen dos furgonetas juntas?
(b) Si se suprimen dos furgonetas, ¿cuántas caravanas se pueden organizar con la misma condición anterior?

14. En un centro de enseñanza se reciben solicitudes de ingreso, que se atienden según las calificaciones de las siguientes cuatro asignaturas: Matemáticas, Física, Química e Inglés. Cada asignatura tiene una calificación entera entre 5 y 10. ¿Cuántos expedientes académicos diferentes se pueden recibir? ¿Cuántos de ellos tienen nota media igual a 7?

15. **(a)** En las aulas 1, 2, 3 y 4 de la Facultad de Informática se van a examinar 192 alumnos de Matemática Discreta. Suponiendo que no hay limitación en la capacidad de las aulas, y atendiendo sólo a la cantidad de alumnos por aula, ¿de cuántas formas distintas se puede hacer la distribución de los los alumnos en las aulas?
(b) Como la capacidad de las aulas sí es limitada, se introducen un total de 54 sillas auxiliares entre todas las aulas. Si en cada aula no caben más de 20 sillas, ¿de cuántas formas distintas puede hacerse el reparto de sillas en las aulas?

Soluciones y/o sugerencia a los ejercicios

1. 44, 45, 20, 10, 0 y 1.
2. 21.
3. 165. 56.
4. **(a)** 6.545; **(b)** 4495; **(c)** 165; **(d)** 1; **(e)** 12.341; **(f)** 4.475.
5. 16.511.
6. $\frac{n(n-1)}{2}$. $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$.
7. 372.658.
8. 3.876.
9. 614.557.125.
10. 16. 32.
11. 720.720. 130.680. 45.864.
12. 226.800.
13. **(a)** 3.628.800; **(b)** 604.800.
14. 1.296. 125.
15. **(a)** 1.216.865; **(b)** 3.430.

4. TÉCNICAS PARA CONTAR

4.6. Algoritmos de enumeración

Hay conjuntos tan grandes que no se pueden representar ni siquiera con el ordenador. Por ejemplo, $P_{100} = 100! \simeq 9,3 \cdot 10^{177}$. En estos casos, es necesario disponer de algún algoritmo que permita ordenarlos y saber cuál sigue a cada uno de ellos en dicho orden.

Orden lexicográfico
Dadas dos sucesiones con el mismo número de dígitos, $a_1a_2\dots a_n$ y $b_1b_2\dots b_n$, el **orden lexicográfico** es el siguiente:

$$a_1a_2\dots a_n < b_1b_2\dots b_n \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 < b_1 \\ \text{o} \\ a_i = b_i, \text{ para } 1 \le i \le k, \text{ y } a_{k+1} < b_{k+1} \end{cases}$$

Enumerando permutaciones
Para encontrar la permutación siguiente a $x_1x_2\dots x_n$ en el orden lexicográfico se procede así:

- Se encuentra el mayor j tal que $x_j < x_{j+1}$ (los dígitos tras x_j están en orden decreciente).
- Se encuentra el mayor k tal que $x_j < x_k$.
- La siguiente permutación se obtiene intercambiando los dígitos x_j y x_k, y reordenando los restantes dígitos que siguen a x_j en orden creciente.

Por ejemplo, en la permutación $\pi = 3415762$, $j = 4$ y $k = 6$, y la permutación que le sigue es:

$$\pi = \mathbf{3415762} \longrightarrow 3415762 \longrightarrow 3416257 \longrightarrow \mathbf{3416257}$$

Enumerando combinaciones
En el conjunto de las combinaciones de los n primeros números naturales tomados de k en k, suponiendo que los elementos de cada una de ellas aparecen ordenados en orden creciente, también se establece el orden lexicográfico, de tal forma que la primera sería $1, 2, 3, \dots, k$ y la última $(n-k+1), (n-k+2), \dots, n$.
Para determina la combinación que sigue a $c_1, c_2, \dots, c_k$ se procede así:

- Se encuentra el mayor j tal que $c_j < n - k + j$.
- La siguiente combinación es: $c_1, c_2, \dots, c_{j-1}, (c_j+1), (c_j+2), \dots, (c_j+k-j+1)$.

En las combinaciones de los 9 primeros números naturales tomados de 6 en 6, al aplicar el algoritmo para determina la combinación que sigue a 134789 se obtiene que $j = 3$ (el mayor j tal que $c_j < 3 + j$), por lo que la combinación siguiente es:

$$\mathbf{134789} \longrightarrow 134789 \longrightarrow 135678 \longrightarrow \mathbf{135678}$$

Enumerando subconjuntos
Para enumerar todos los subconjuntos del conjunto $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ se comienza estableciendo una biyección (identificando) entre los subconjuntos de X y las sucesiones binarias de longitud n:

$$A \subset X \quad \longleftrightarrow \quad a_1a_2\dots a_n \quad \text{con } a_i = \begin{cases} 0 & \text{, si } x_i \notin A \\ 1 & \text{, si } x_i \in A \end{cases}$$

Sobre estas sucesiones binarias, que en total son 2^n (tantas como subconjuntos tiene el conjunto X), se establece el orden lexicográfico, de tal manera que la más pequeña es $00\dots0$ (conjunto vacío) y la más grande es $11\dots1$ (conjunto X). Sobre los subconjuntos de X se considera el orden inducido por el orden de las sucesiones binarias.
Dentro de los subconjuntos de $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, el conjunto que sigue a $A = \{1, 3, 6, 7\}$ es:

$$\mathbf{A = \{1, 3, 6, 7\}} \longleftrightarrow 1010011 \underset{\text{siguiente}}{\Longrightarrow} 1010100 \longleftrightarrow \mathbf{\{1, 3, 5\}}$$