

Matemática discreta
Segundo del grado en Matemáticas, UAM, 2016-2017
Examen extraordinario, 16-6-2017

1. Calcula el número de listas de longitud 20, con símbolos del conjunto $\{0, 1, \dots, 9\}$, y tales que
- empiezan por 8 o por 9;
 - contienen con seguridad los símbolos 2, 3 y 5.

2. Llamamos P_{101} al conjunto de los polinomios $p(x)$, con coeficientes 0 o 1, y grado exactamente 101.

Calcula la *proporción* que ocupan, en P_{101} , los polinomios $p(x) \in P_{101}$ tales que el coeficiente 101 de $p(x)^2$ vale 0.

3. Tenemos una tarjeta formada por 2×3 cuadrados. En esos cuadrados van números entre el 0 y el 9. No situamos números iguales si dos cuadrados tienen un lado en común.

a) Calcula cuántas tarjetas distintas se pueden hacer.

b) Calcula cuántas tarjetas distintas hay en las que aparecen seis números distintos (de entre la colección $\{0, 1, \dots, 9\}$).

4. a) G es un grafo regular (todos sus vértices tienen el mismo grado) conexo, consta de 10 aristas, y tiene al menos un ciclo de longitud 3. Calcula el número de árboles abarcadores distintos que contiene.

b) G es un grafo conexo, sin ciclos y 53 aristas. Calcula de cuántas maneras distintas se puede colorear si disponemos de 13 colores.

5. Llamamos $\tau(G)$ al número de árboles abarcadores de un grafo G .

Sea G un grafo formado por dos grafos G_1 y G_2 que compartan únicamente un vértice. Demuestra que

$$\tau(G) = \tau(G_1) \cdot \tau(G_2).$$

6. Sea $(a_n)_{n \geq 0}$ la sucesión dada por

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_n = \frac{a_{n-3}}{n} \quad \text{para } n \geq 3.$$

Halla una fórmula para la función generatriz

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

7. Queremos repartir 200 euros entre seis personas, A, B, C, D, E y F . Se entiende que cada persona recibe un número entero de euros. El reparto ha de cumplir las siguientes restricciones: A se llevará, al menos, 100 euros; B y C recibirán sus pagos en monedas de 2 euros; D ha de llevarse algo en el reparto; y E y F recibirán (cada uno de ellos) a lo sumo, 1 euro.

¿Cuántos repartos distintos se pueden hacer?

(Nota: un reparto consiste únicamente en decidir cuánto dinero recibe cada uno).