MATEMÁTICAS EMPRESARIALES

Apuntes

CONTENIDO

TEMA 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

1.1 VECTORES. ESPACIO VECTORIAL

$\mathbb{R}^n$ es el conjunto de todos los vectores con n componentes. Además, $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial.

Ejemplo 1: Dados dos vectores de $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = (2,0,-5), \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2{,}3 \\ -1 \end{pmatrix} = (-8{,}2.3,-1)$$

y $\lambda = 3{,}1$ un escalar. Calculamos

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (2,0,-5) + (-8{,}2.3,-1) = (-6{,}2.3,-6) = \begin{pmatrix} -6 \\ 2{,}3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

y

$$\lambda\boldsymbol{u} = 3{,}1 \cdot (2,0,-5) = (6.2{,}0,-15{,}5) = \begin{pmatrix} 6{,}2 \\ 0 \\ -15{,}5 \end{pmatrix}$$

Como podemos ver, podemos sumar vectores y multiplicarlos por un escalar. El resultado vuelve a ser un vector. Esta es una definición intuitiva de espacio vectorial.

Definición de Espacio Vectorial: Es un conjunto no vacío V de elementos llamados vectores, donde se puede definir una suma interior y un producto por escalares. El producto de un escalar por un vector también es un elemento del espacio vectorial. Además, se tienen que cumplir las siguientes propiedades.

Dados tres vectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ cualesquiera y dos escalares α y β se tiene:

Propiedades de la suma de vectores:

1. La suma de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, denotada por $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, es un elemento de V.
2. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$. Propiedad Conmutativa.
3. $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$. Propiedad Asociativa.

4. Existe un vector nulo (cero) $\mathbf{0}$ en V tal que $\boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \boldsymbol{u}$.
5. Para cada $\boldsymbol{u}$ en V, existe un vector $-\boldsymbol{u}$ en V tal que $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$. (Elemento simétrico).

<u>Propiedades del producto por escalares</u>:

1. $\alpha\boldsymbol{u}$ es un elemento de V.
2. $\alpha(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v}$. Propiedad Distributiva respecto a la suma de vectores.
3. $(\alpha + \beta)\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{u}$. Propiedad Distributiva respecto a la suma de escalares.
4. $\alpha(\beta\boldsymbol{u}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{u}$.
5. $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.
6. $0 \cdot \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ El resultado de multiplicar el escalar nulo por cualquier vector es el vector nulo.
7. $\alpha \cdot \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$. El resultado de multiplicar cualquier escalar por el vector nulo es el vector nulo.
8. $\alpha \cdot (-\boldsymbol{u}) = (-\alpha) \cdot \boldsymbol{u} = -(\alpha \cdot \boldsymbol{u})$. El producto de un escalar por el opuesto de un vector es igual al producto del opuesto del escalar por el vector y es igual al opuesto del producto del escalar por el vector.
9. $Si\ \alpha \cdot \boldsymbol{u} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = 0\ o\ u = \mathbf{0}$. Si el producto de un escalar por un vector es el vector nulo, o bien es nulo el escalar, o bien es nulo el vector.

Nótese que para que un conjunto de vectores sea espacio vectorial se tienen que dar dos condiciones, que la suma sea interna (es decir, que la suma de dos vectores del conjunto de como resultado otro vector del conjunto) y que el producto de un vector del conjunto por un escalar sea otro vector del conjunto.

EJEMPLOS DE ESPACIOS VECTORIALES:

- $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4, \dots, \mathbb{R}^n$
- Polinomios de grado menor o igual que n.
- Matrices de un orden dado.

1.2 CONCEPTOS ESPECÍFICOS DEL ESPACIO VECTORIAL: COMBINACIÓN LINEAL, DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL, SISTEMA GENERADOR Y BASE

COMBINACIÓN LINEAL:

Una combinación lineal de unos vectores dados $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots \boldsymbol{v_n}\}$ es el resultado de sumar dichos vectores multiplicados previamente por escalares arbitrarios $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$.

$k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + k_n\boldsymbol{v_n}$ (Combinación lineal de n vectores dados).

Existen infinitas combinaciones lineales de unos vectores dados, tantas como formas de elegir los escalares.

$$k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + k_n\boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{x}$$

$\boldsymbol{x}$ es el vector resultante, siendo $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ sus coordenadas.

Si todos los escalares que eligiéramos fueran nulos, entonces $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$

<u>Ejemplo:</u> El vector $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, ya que **w** se obtiene como: $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v}$.

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL:

<u>Definición intuitiva de independencia lineal</u>: Diremos que un conjunto de vectores $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \dots, \boldsymbol{v_n}\} \in \mathbb{R}^n$ es <u>LINEALMENTE INDEPENDIENTE</u> si ninguno de ellos se puede escribir como combinación lineal de los demás. En caso contrario, el conjunto de vectores será <u>LINEALMENTE DEPENDIENTE</u>.

<u>Ejemplo 1</u>: Sean $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}$ y $\boldsymbol{v_4}$ los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$.

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v_4} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

En este ejemplo, el conjunto formado por los tres primeros vectores es linealmente independiente, ya que hagamos lo que hagamos, jamás podremos escribir ninguno de ellos como combinación lineal de los demás. Sin embargo, el vector $\boldsymbol{v_4}$ sí se puede escribir como combinación lineal de los demás.

$$\boldsymbol{v_4} = 9\boldsymbol{v_1} + 5\boldsymbol{v_2} + 4\boldsymbol{v_3}$$

Por tanto, globalmente, el conjunto de vectores es linealmente dependiente. La dependencia e independencia lineales son propiedades de un conjunto de vectores, no de un vector concreto.

<u>Ejemplo 2:</u>

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v_2} = 2\boldsymbol{v_1}$$

Como se puede observar, el vector $\boldsymbol{v_2}$ es dos veces $\boldsymbol{v_1}$, lo que quiere decir que $\boldsymbol{v_1}$ se puede escribir como combinación lineal de $\boldsymbol{v_1}$, y por consiguiente, en este caso, el conjunto de vectores es linealmente dependiente.

<u>Ejemplo 3:</u>

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Estos vectores son linealmente independientes ya que hagamos lo que hagamos, no podemos escribir ninguno de ellos como combinación lineal del otro.

Definición formal (DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL): Diremos que un conjunto de vectores $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \dots, \boldsymbol{v_n}\} \in \mathbb{R}^n$ es LINEALMENTE DEPENDIENTE si la ecuación vectorial $k_1 \cdot \boldsymbol{v_1} + k_2 \cdot \boldsymbol{v_2} + k_3 \cdot \boldsymbol{v_3} + \cdots + k_n \cdot \boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{0}$ tiene al menos una solución distinta de la trivial ($k_i = 0$), es decir, si $k_i \neq 0$. Análogamente, diremos que el conjunto es LINEALMENTE INDEPENDIENTE si la ecuación vectorial anterior tiene una única solución, la trivial, es decir, si $k_1 = k_2 = k_3 = \cdots = k_n = \boldsymbol{0}$.

Por tanto, dos o más vectores son linealmente dependientes si existe alguna combinación lineal de ellos que teniendo los escalares no todos nulos dé como resultado el vector nulo.

Propiedades de la dependencia e independencia lineal:

1. Un conjunto de vectores linealmente independiente no puede contener al vector nulo $\boldsymbol{0}$.
2. Un conjunto de vectores linealmente independiente no puede contener dos vectores iguales ni dos vectores proporcionales.

SISTEMA GENERADOR Y BASE:

Definición (SISTEMA GENERADOR): Un sistema generador de un espacio vectorial es cualquier conjunto de vectores tales que todo vector del espacio sea combinación lineal de ellos.

Definición (BASE): Una base de un espacio vectorial es cualquier sistema generador cuyos vectores sean linealmente independientes.

EJEMPLOS DE BASES:

- En $\mathbb{R}^2$: $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}\} = \{(1,0), (0,1)\}$. Base canónica de $\mathbb{R}^2$.
- En $\mathbb{R}^3$: $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$. Base canónica de $\mathbb{R}^3$.
- En $\mathbb{R}^n$: $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}, \dots, \boldsymbol{e_n}\} = \{(1,0,0,\dots,0), (0,1,0,\dots,0), (0,0,1,0,\dots,0) \dots (0,0,\dots..,0,1)\}$. Base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Definición (COORDENADAS): Supongamos de V es un espacio vectorial y $B = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ es una base. Cualquier elemento $\boldsymbol{v}$ del espacio V se escribe de forma única como combinación lineal de la base. Si $\boldsymbol{v} = \alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \alpha_2 \boldsymbol{v_2} + \alpha_3 \boldsymbol{v_3} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v_n}$, se dice que α_1,$\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ son las coordenadas de $\boldsymbol{v}$ en la base B.

Nótese que en la base canónica, las coordenadas de un vector son sus componentes.

Ejemplo: Si tenemos el vector $(7,5)$ en $\mathbb{R}^2$, las coordenadas de este vector en la base canónica son 7 y 5, ya que $(7,5) = 7(1,0) + 5(0,1)$.

TEOREMA DE LA BASE: Todas las bases de un mismo espacio vectorial tienen el mismo número de elementos.

Definición (DIMENSIÓN): La dimensión de un espacio vectorial es el número de elementos de cualquiera de sus bases.

TEOREMA: Dado un espacio vectorial de dimensión n, cualquier conjunto de n vectores que sea linealmente independiente es sistema generador y, por tanto, base. Asimismo, cualquier conjunto de n vectores que sea sistema generador es linealmente independiente, y, por tanto, es base.

1.3 SUBESPACIOS VECTORIALES

Definición (SUBESPACIO VECTORIAL): Es un subconjunto del espacio vectorial que sigue siendo un espacio vectorial. La condición necesaria y suficiente para que un subconjunto V de vectores sea un subespacio vectorial es que $\alpha_1\boldsymbol{v_1} + \alpha_2\boldsymbol{v_2}$ pertenezca a V siempre que $\boldsymbol{v_1}$ y $\boldsymbol{v_2}$ pertenezcan a V y α_1 y α_2 sean escalares.
Nótese que:

- El vector nulo $\mathbf{0}$ pertenece a todos los subespacios de un espacio V.
- Un espacio vectorial V tiene como subespacios, entre otros posibles, al conjunto $\{\mathbf{0}\}$, formado sólo por el vector nulo, que se llamara **subespacio nulo**. El mismo espacio V es un subespacio de sí mismo. Los demás subespacios de V, distintos de V y $\{\mathbf{0}\}$, se llaman **subespacios propios**.

EJERCICIOS:

1. **En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideran los subconjuntos:**

$$\boldsymbol{S_1 = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1 + x_2 + x_3 = 1\}}$$
$$\boldsymbol{S_2 = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1 + x_2 + x_3 = 0\}}$$
$$\boldsymbol{S_3 = \{(x_1, 0, 2x_1)\}}$$

   a) **Averígüese cuáles de los subconjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.**
   b) **Dese una base de cada uno de los subespacios.**

   Solución

   Para que los subconjuntos anteriores sean subespacios se tienen que dar dos condiciones, que la suma sea interna y que el producto de un vector del subconjunto por un escalar sea otro vector del subconjunto.

$$S_1 = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$$

   No es un subespacio ya que si sumamos dos vectores de este subconjunto (x_1, x_2, x_3) y (x_1', x_2', x_3'), el resultado es

$$(x_1, x_2, x_3) + (x_1{}', x_2{}', x_3{}') = (x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3{}')$$

$$x_1 + x_1' + x_2 + x_2' + x_3 + x_3' = (x_1 + x_2 + x_3) + (\, x_1{}' + x_2{}' + x_3{}') = 1 + 1 = 2 \neq 1.$$

Luego, no se cumple la condición de que la suma sea interna.

$$\boldsymbol{S_2} = \{(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3})/\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3} = \boldsymbol{0}\}$$

$$(x_1, x_2, x_3) + (\, x_1', x_2', x_3{}') = (x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3{}')$$

$$x_1 + x_1' + x_2 + x_2' + x_3 + x_3{}' = (x_1 + x_2 + x_3) + (\, x_1{}' + x_2{}' + x_3{}') = 0 + 0 = 0$$

Luego, en este caso sí se cumple la suma interna.

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$$

$$\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 = \alpha(x_1 + x_2 + x_3) = 0$$

Por tanto, el producto por escalares también se cumple.

Al cumplirse ambas condiciones podemos afirmar que el subconjunto anterior **sí es un subespacio**.

A continuación, tenemos que calcular una base de este subespacio.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 - x_3$$

Por tanto, el vector genérico es $(-x_2 - x_3, x_2, x_3)$, donde

$$(-x_2 - x_3, x_2, x_3) = x_2(-1,1,0) + x_3(-1,0,1).$$

Por consiguiente, una base de este subespacio es $\{(-1,1,0), (-1,0,1)\}$, y su dimensión es 2, ya que la base está compuesta por dos vectores.

$$\boldsymbol{S_3} = \{(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{2x_1})\}$$

Ejemplos vectores de este subconjunto serían $(2,0,4), (4,0,8), (5,0,10)$, etc.
Entonces tenemos que comprobar que sumando dos de ellos, nos da otro vector de la misma forma.

$$(x, 0{,}2x) + \; (y, 0{,}2y) = (x + y, 0{,}2x + 2y) = (x + y, 0{,}2(x + y))$$

Esto nos demuestra que sí se cumple la suma interna, ya que la suma de dos vectores del subconjunto nos da como resultado otro de la misma forma.

$$\alpha(x, 0{,}2x) = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot 0, \alpha \cdot 2x) = (\alpha x, 0{,}2\alpha x)$$

Acabamos de demostrar que también se cumple el producto por escalares. Es decir, si multiplicamos un escalar por un vector del subconjunto, nos da otro de la misma forma.

Luego, al cumplirse ambas condiciones, podemos afirmar que el subconjunto que estábamos estudiando **sí es un subespacio**.

A continuación, tenemos que calcular una base de este subespacio.

En este caso, el vector genérico viene dado por el enunciado del ejercicio, $(x_1, 0{,}2x_1) = x_1(1{,}0{,}2)$. De modo que una base del subespacio sería $\{(1{,}0{,}2)\}$, y su dimensión sería 1 al estar la base compuesta por un único vector.

2. **Indicar si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales del espacio vectorial apropiado en cada caso. Además, en caso de que lo sean, dar una base.**
   a) $\boldsymbol{S_1} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ ó } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}\}$
   b) $\boldsymbol{S_2} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^3 : \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{2z} = \boldsymbol{0}\}$

<u>Solución</u>

a) $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ ó } y = 0\}$

El subconjunto anterior **no es un subespacio vectorial** ya que la suma no es interna. Por ejemplo, si tomamos los vectores (1,0) y (0,1), ambos están dentro de ese subconjunto, pero su suma: $(1{,}0) + (0{,}1) = (1{,}1)$ no lo está.

b) $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 0\}$

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$

A continuación, comprobamos que la suma es interna

$$\begin{aligned} x + x' + y + y' + 2(z + z') &= x + x' + y + y' + 2z + 2z' \\ &= (x + y + 2z) + (x' + y' + 2z') = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Ahora tenemos que comprobar que se cumple el producto por escalares.

$$\alpha(x, y, 2z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha 2z)$$

$$\alpha x + \alpha y + \alpha 2z = \alpha(x + y + 2z) = \alpha \cdot 0 = 0$$

Luego, **se trata de un subespacio vectorial**.

$$x + y + 2z = 0 \Rightarrow x = -y - 2z$$

De ahí, obtendríamos un vector genérico que sería:

$$(x, y, z) = (-y - 2z, y, z) = y(-1{,}1{,}0) + z(-2{,}0{,}1)$$

Luego, una base del subespacio sería $\{(-1,1,0),(-2,0,1)\}$. Al estar la base formada por 2 elementos, el subespacio tiene dimensión 2. Nótese que hay infinitas bases. Por ejemplo, si en lugar de despejar x, despejamos z, el vector genérico quedaría:

$$z = \frac{-x-y}{2}$$

$$(x,y,z) = \left(x,y,\frac{-x-y}{2}\right) = x\left(1,0,\frac{-1}{2}\right) + y\left(0,1,\frac{-1}{2}\right).$$

Y la base sería

$$\left\{\left(1,0,\frac{-1}{2}\right),\left(0,1,\frac{-1}{2}\right)\right\}.$$

3. Escribir el vector $\boldsymbol{u} = (\mathbf{1},\mathbf{3}) \in \mathbb{R}^2$ como combinación lineal de los siguientes vectores:

a) $(\mathbf{1},\mathbf{1}); (\mathbf{1},\mathbf{0})$

b) $(\mathbf{3},\mathbf{1}); (-\mathbf{1},\mathbf{1}); (\mathbf{2},\mathbf{3})$

<u>Solución</u>

a) $(1,1); (1,0)$

$$(1,1)\alpha + (1,0)\beta = (1,3)$$

$$(\alpha,\alpha) + (\beta,0) = (1,3) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha + 0 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 1 - \alpha = 1 - 3 = -2 \\ \alpha = 3 \end{cases}$$

b) $(3,1); (-1,1); (2,3)$

$$(3,1)\alpha + (-1,1)\beta + (2,3)\lambda = (1,3)$$

$$(3\alpha,\alpha) + (-\beta,\beta) + (2\lambda,3\lambda) = (1,3) \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha - \beta + 2\lambda = 1 \\ \alpha + \beta + 3\lambda = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha - \beta + 2\lambda = 1 \\ \alpha = 3 - \beta - 3\lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3(3-\beta-3\lambda) - \beta + 2\lambda = 1 \Rightarrow 9 - 3\beta - 9\lambda - \beta + 2\lambda = 1$$

$$\Rightarrow -4\beta - 7\lambda = -8 \Rightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{-8+7\lambda}{-4} \\ \alpha = 3 - \dfrac{-8+7\lambda}{-4} - 3\lambda \end{cases}$$

Como se puede ver, en este caso tenemos infinitas soluciones, luego para obtener una de ellas, tenemos que dar un valor a λ. Por ejemplo, si $\lambda = 1$:

$$\beta = \frac{-8+7\lambda}{-4} = \frac{-8+7}{-4} = \frac{1}{4}$$

$$\alpha = 3 - \frac{-8+7\lambda}{-4} - 3\lambda = 3 - \frac{-8+7}{-4} - 3 = -\frac{1}{4}$$

4. Estudiar si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes:

a) $\{(\mathbf{0},\mathbf{1}); (-\mathbf{1},-\mathbf{1}); (\mathbf{1},\mathbf{2})\}$

b) $\{(\mathbf{3},-\mathbf{1}); (-\mathbf{6},\mathbf{2}); (\mathbf{0},\mathbf{0})\}$

c) $\{(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{1});(\mathbf{3},\mathbf{1},\mathbf{1});(\mathbf{1},\mathbf{0},-\mathbf{1})\}$

Solución

a) $\{(0,1);(-1,-1);(1,2)\}$

En este caso, estamos en un espacio de dimensión 2, y por tanto, sólo puede haber 2 vectores linealmente independientes entre sí. Como en este apartado encontramos 3 vectores, al menos uno de ellos será linealmente dependiente, y se podrá escribir como combinación lineal de los otros dos. De todas formas, lo comprobamos resolviendo la siguiente ecuación:

$$\alpha(0,1)+\beta(-1,-1)+\gamma(1,2)=(0,0)$$

$$\left.\begin{array}{r}-\beta+\gamma=0\\ \alpha-\beta+2\gamma=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}\gamma=\beta\\ \alpha-\beta+2\beta=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}\gamma=\beta\\ \alpha=-\beta\end{array}\right\}$$

Por tanto, hay infinitas soluciones: $(-\beta,\beta,\beta)$, y por tanto, **el conjunto de vectores anterior no es linealmente independiente**.

b) $\{(3,-1);(-6,2);(0,0)\}$

Al igual que en el apartado anterior, nos encontramos en un espacio de dimensión 2, y por tanto, sólo puede haber 2 vectores linealmente independientes entre sí. Como hay 3 vectores, al menos uno de ellos será linealmente dependiente, y se podrá escribir como combinación lineal de los otros dos. Además, al ser uno de los 3 vectores (0,0), **jamás podría ser linealmente independiente**. De todas formas, lo comprobamos resolviendo la siguiente ecuación:

$$\alpha(3,-1)+\beta(-6,2)+\gamma(0,0)=(0,0)$$

$$\left.\begin{array}{r}3\alpha-6\beta=0\\ -\alpha+2\beta=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}3(2\beta)-6\beta=0\\ \alpha=2\beta\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}6\beta-6\beta=0\\ \alpha=-\beta\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}0=0\\ \alpha=-\beta\end{array}\right\}$$

Hay infinitas soluciones: $(-\beta,\beta)$. De todas, formas, aunque nos saliera la solución trivial, los vectores anteriores nunca serían linealmente independientes, porque al ser uno de ellos (0,0), siempre habrá una parte de la ecuación que desaparecerá.

c) $\{(1,2,1);(3,1,1);(1,0,-1)\}$

En este caso, tenemos tres vectores de tres componentes cada uno, luego en este caso, así que podría tratarse de vectores linealmente independientes. Lo vemos:

$$\alpha(1,2,1)+\beta(3,1,1)+\gamma(1,0,-1)=(0,0,0)$$

$$\left.\begin{matrix}\alpha+3\beta+\gamma=0\\ 2\alpha+\beta=0\\ \alpha+\beta-\gamma=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\alpha+3(-2\alpha)+\gamma=0\\ \beta=-2\alpha\\ \alpha+\beta-\gamma=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\gamma=5\alpha\\ \beta=-2\alpha\\ \alpha-2\alpha-5\alpha=0\end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}\gamma=5\alpha=0\\ \beta=-2\alpha=0\\ \alpha=0\end{matrix}\right\}$$

El sistema anterior tiene solución única (la trivial (0,0,0)), por tanto se trata de **vectores linealmente independientes**.

5. **Comprobar si los siguientes conjuntos de vectores son base de $\mathbb{R}^3$:**
   a) $\boldsymbol{B}=\{(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3});(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1});(-\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{0})\}$
   b) $\boldsymbol{B}=\{(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0});(\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{0});(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1})\}$
   c) $\boldsymbol{B}=\{(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1});(\mathbf{2},\mathbf{0},\mathbf{1});(\mathbf{4},\mathbf{2},\mathbf{3})\}$

   <u>Solución</u>

Para que un conjunto de vectores sea una base de un espacio vectorial, tiene que ser sistema generador y además los vectores deben ser linealmente independientes. No obstante, el enunciado dice que trabajamos en $\mathbb{R}^3$, y en los tres apartados de este ejercicio tenemos conjuntos de tres vectores, y anteriormente hemos visto que dado un espacio vectorial de dimensión n, cualquier conjunto de n vectores que sea linealmente independiente es sistema generador y, por tanto, base. Asimismo, cualquier conjunto de n vectores que sea sistema generador es linealmente independiente, y, por tanto, es base.

Por tanto, basta con comprobar que se cumple una de las dos condiciones. Nosotros vamos a comprobar que los vectores son linealmente independientes.

a) $B=\{(1,2,3);(0,0,1);(-1,1,0)\}$

$$\alpha(1,2,3)+\beta(0,0,1)+\gamma(-1,1,0)=(0,0,0)$$

$$\left.\begin{matrix}\alpha-\gamma=0\\ 2\alpha+\gamma=0\\ 3\alpha+\beta=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\alpha=\gamma\\ \alpha=\dfrac{-\gamma}{2}\\ \beta=-3\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\gamma=\dfrac{-\gamma}{2}\\ \beta=-3\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}3\gamma=0\\ \beta=-3\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\gamma=0\\ \alpha=\gamma=0\\ \beta=-3\alpha=0\end{matrix}\right\}$$

Obtenemos la solución trivial (0,0,0), y por tanto, **los vectores anteriores son linealmente independientes.** Además, dado que trabajamos en un espacio vectorial de dimensión 3, y el conjunto de 3 vectores que estamos estudiando es linealmente independiente, también **es sistema generador y, por tanto, base de $\mathbb{R}^3$.**

b) $B=\{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$

En este caso, se trata de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, luego es una base de $\mathbb{R}^3$. De todas formas, vamos a comprobarlo.

$$\alpha(1,0,0)+\beta(0,1,0)+\gamma(0,0,1)=(0,0,0)$$

$$\left.\begin{array}{r}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{array}\right\}$$

Obtenemos la solución trivial (0,0,0) y, por tanto, **el conjunto de 3 vectores anterior es linealmente independiente, y por tanto, sistema generador y base de $\mathbb{R}^3$.**

c) $B=\{(1,1,1);(2,0,1);(4,2,3)\}$

$$\alpha(1,1,1)+\beta(2,0,1)+\gamma(4,2,3)=(0,0,0)$$

$$\left.\begin{array}{c}\alpha+2\beta+4\gamma=0\\ \alpha+2\gamma=0\\ \alpha+\beta+3\gamma=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}-2\gamma+2\beta+4\gamma=0\\ \alpha=-2\gamma\\ \alpha+\beta+3\gamma=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}\beta=-\gamma\\ \alpha=-2\gamma\\ -2\gamma-\gamma+3\gamma=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}\beta=-\gamma\\ \alpha=-2\gamma\\ 0=0\end{array}\right\}$$

Luego, hay infinitas soluciones $(-2\gamma,-\gamma,\gamma)$ y el conjunto de vectores que estamos estudiando **no es linealmente independiente, y como consecuencia, tampoco es base de $\mathbb{R}^3$**.

6. Sea $\boldsymbol{W}=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in\mathbb{R}^3:\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\mathbf{0}\}$ y $\boldsymbol{v}=(\mathbf{2},-\mathbf{1},-\mathbf{1})\in\boldsymbol{W}$.
   a) Calcule una base de $\boldsymbol{W}$.
   b) Comprobar que $\boldsymbol{B}=\{(-\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{1});(-\mathbf{1},\mathbf{3},-\mathbf{2})\}$ es una base de $\boldsymbol{W}$.
   c) Hallar las coordenadas de $\boldsymbol{v}$ respecto de $\boldsymbol{B}$.

Solución

a) Calcule una base de W.

$$x+y+z=0\Rightarrow x=-y-z$$

$$(-y-z,y,z)=y(-1,1,0)+z(-1,0,1)$$

Una base de $\boldsymbol{W}$ sería $\{(-\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{0}),(-\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{1})\}$. Luego estamos trabajando en un espacio de dimensión 2. Además, se trata de un subespacio de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 2.

b) Comprobar que $B=\{(-1,0,1);(-1,3,-2)\}$ es una base de W.

Para que B sea una base de W, tendría que ser sistema generador y además, los vectores de B tendrían que ser linealmente independientes.

Teniendo en cuenta el teorema que dice que dado un espacio vectorial de dimensión n, cualquier conjunto de n vectores que sea linealmente independiente es sistema generador y, por tanto, base, como en el apartado anterior hemos comprobado que trabajamos en un espacio de dimensión 2, y el conjunto que nos proponen tiene dos vectores, únicamente hace falta comprobar que los vectores de B son linealmente independientes.

$$\alpha(-1,0,1) + \beta(-1,3,-2) = (0,0,0)$$

$$\left.\begin{array}{r} -\alpha - \beta = 0 \\ 3\beta = 0 \\ \alpha - 2\beta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \alpha = -\beta \\ \beta = 0 \\ \alpha - 2\beta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \alpha = -\beta = 0 \\ \beta = 0 \\ 0 = 0 \end{array}\right\}$$

Obtenemos la solución trivial $(0,0)$ y, por tanto, **el conjunto de vectores de 3 componentes anterior es linealmente independiente, y como consecuencia, también es sistema generador y base.**

c) Hallar las coordenadas de v respecto de B.

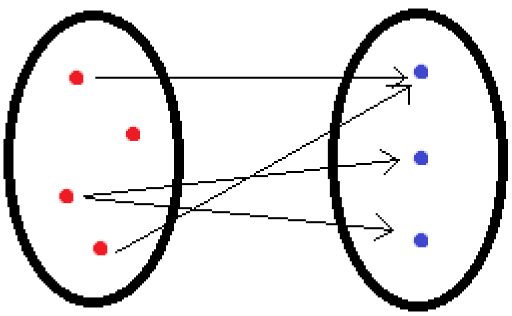
$$\alpha(-1,0,1) + \beta(-1,3,-2) = (2,-1,-1)$$

$$\left.\begin{array}{r} -\alpha - \beta = 2 \\ 3\beta = -1 \\ \alpha - 2\beta = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \alpha = -\beta - 2 \\ \beta = -\frac{1}{3} \\ \alpha - 2\beta = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \alpha = -\beta - 2 = -\frac{5}{3} \\ \beta = -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} - 2\left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} \alpha = -\beta - 2 = -\frac{5}{3} \\ \beta = -\frac{1}{3} \\ -1 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \boldsymbol{\alpha = -\frac{5}{3}} \\ \boldsymbol{\beta = -\frac{1}{3}} \end{array}\right\}$$

1.4 APLICACIONES LINEALES

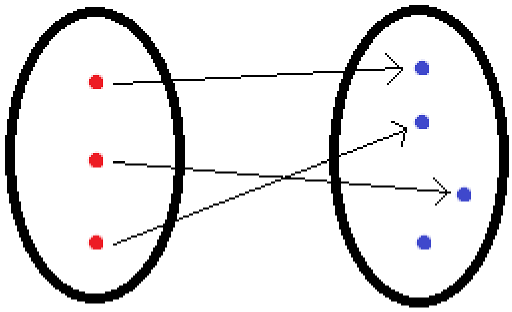
Definición (CORRESPONDENCIA): Existe correspondencia cuando a elementos del conjunto inicial se les relaciona con elementos del conjunto final. Por ejemplo:



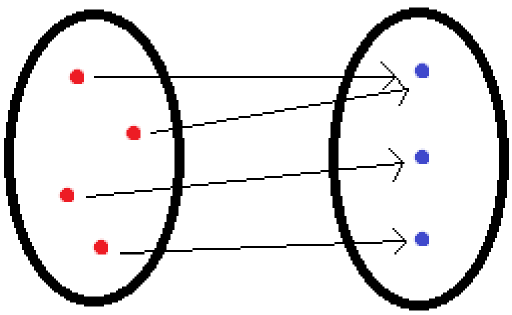
Definición (APLICACIÓN): es una correspondencia en la que cada elemento del conjunto origen tiene como máximo una imagen, es decir, sale una sola flecha, y se representa por $f: A \to B$.

Tipos de aplicaciones:

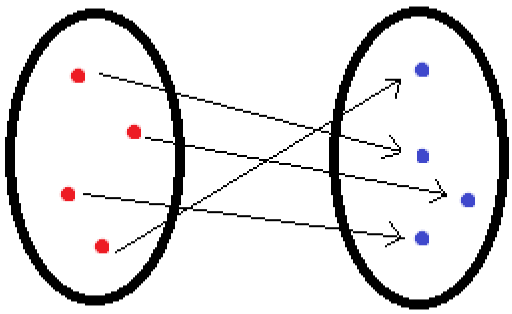
- <u>APLICACIÓN INYECTIVA</u>: Es una aplicación donde los elementos del conjunto imagen son como máximo transformados de un único elemento del conjunto origen, es decir, si $a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$.



- <u>APLICACIÓN SOBREYECTIVA O SUPRAYECTIVA</u>: Es una aplicación donde todos los elementos del conjunto imagen son como mínimo transformados de un elemento del conjunto origen, es decir, $\forall b \in B \; \exists \; a \in A / f(a) = b$.



- <u>APLICACIÓN BIYECTIVA</u>: Es una aplicación que es a la vez inyectiva y suprayectiva.



<u>Definición (APLICACIÓN LINEAL)</u>: es toda aplicación ($f: V \rightarrow V'$) entre dos espacios vectoriales que cumpla los dos requisitos siguientes:

1. $f(\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}) = f(\boldsymbol{v_1}) + f(\boldsymbol{v_2})$.
2. $f(k\boldsymbol{v}) = k \cdot f(\boldsymbol{v})$.

Las dos propiedades anteriores pueden resumirse en $f(a \cdot \boldsymbol{u} + b \cdot \boldsymbol{v}) = af(\boldsymbol{u}) + bf(\boldsymbol{v})$.

Además, toda aplicación lineal cumple que $f(\boldsymbol{0_V}) = \boldsymbol{0_{V'}}$.

<u>Definición (NÚCLEO DE UNA APLICACIÓN LINEAL):</u> Es el conjunto de vectores que se transforman en el vector cero y se denota por $Ker(f)$, donde f es la aplicación lineal. Es decir, el núcleo siempre es un subespacio vectorial.

<u>EJERCICIOS:</u>

1. **Se consideran las aplicaciones de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$:**
   i. $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}/\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}) = \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3}$.
   ii. $\boldsymbol{g}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}/\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}) = \boldsymbol{2x_1} - \boldsymbol{x_3}$.
   iii. $\boldsymbol{h}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}/\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}) = \boldsymbol{x_1 x_2 x_3}$.
   a) **Compruébese que las dos primeras, f y g, son aplicaciones lineales y la tercera no es lineal.**
   b) **Compruébese que el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ que en la aplicación g se transformen en cero (núcleo de g) forman un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.**
   c) **Dese una base de dicho subespacio.**

<u>Solución</u>

a) Compruébese que las dos primeras, f y g, son aplicaciones lineales y la tercera no es lineal.

Para que las aplicaciones siguientes sean aplicaciones lineales, tienen que cumplir las dos propiedades siguientes: $f(\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}) = f(\boldsymbol{v_1}) + f(\boldsymbol{v_2})$ y $f(k\boldsymbol{v}) = k \cdot f(\boldsymbol{v})$.

i. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}/f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$.

$$(x_1, x_2, x_3) + (x_1', x_2', x_3') = (x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3')$$

$$f(x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3') = f(x_1, x_2, x_3) + f(x_1', x_2', x_3')$$

$$x_1 + x_1' + x_2 + x_2' + x_3 + x_3' = (x_1 + x_2 + x_3) + (x_1{}' + x_2{}' + x_3{}')$$

$$\boldsymbol{x_1 + x_1' + x_2 + x_2' + x_3 + x_3' = x_1 + x_1' + x_2 + x_2' + x_3 + x_3'}$$

$$f\big(k \cdot (x_1, x_2, x_3)\big) = k \cdot f(x_1, x_2, x_3)$$

$$f(kx_1, kx_2, kx_3) = k \cdot (x_1 + x_2 + x_3)$$

$$\boldsymbol{kx_1 + kx_2 + kx_3 = kx_1 + kx_2 + kx_3}$$

Luego, al cumplirse ambas propiedades, **la aplicación anterior es lineal**.

ii. $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}/g(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_3$.

$$(x_1, x_2, x_3) + (x_1', x_2', x_3') = (x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3')$$

$$f(x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3') = f(x_1, x_2, x_3) + f(x_1', x_2', x_3')$$

$$2(x_1 + x_1') - (x_3 + x_3') = (2x_1 - x_3) + (2x_1' - x_3')$$

$$\boldsymbol{2x_1 + 2x_1' - x_3 - x_3' = 2x_1 + 2x_1' - x_3 - x_3'}$$

$$f\big(k \cdot (x_1, x_2, x_3)\big) = k \cdot f(x_1, x_2, x_3)$$

$$f(kx_1, kx_2, kx_3) = k \cdot (2x_1 - x_3)$$

$$\boldsymbol{2kx_1 - kx_3 = k2x_1 - kx_3}$$

Luego, al cumplirse ambas propiedades, **la aplicación anterior es lineal**.

iii. $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}/h(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3$.

$$(x_1, x_2, x_3) + (x_1', x_2', x_3') = (x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3')$$

$$f(x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3') = f(x_1, x_2, x_3) + f(x_1', x_2', x_3')$$

$$(x_1 + x_1')(x_2 + x_2')(x_3 + x_3') \neq x_1x_2x_3 + x_1'x_2'x_3'$$

$$(x_1x_2 + x_1x_2' + x_1'x_2 + x_1'x_2')(x_3 + x_3') \neq x_1x_2x_3 + x_1'x_2'x_3'$$

$$\boldsymbol{(x_1x_2x_3 + x_1x_2'x_3 + x_1'x_2x_3 + x_1'x_2'x_3 + x_1x_2x_3' + x_1x_2'x_3' + x_1'x_2x_3' + x_1'x_2'x_3') \neq x_1x_2x_3 + x_1'x_2'x_3'}$$

Luego, al no verificar la primera propiedad, **no es una aplicación lineal.**

b) Compruébese que el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ que en la aplicación g se transformen en cero (núcleo de g) forman un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Para comprobar que el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ que en la aplicación g se transformen en cero forman un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, tenemos que comprobar que se cumplen la suma interna y el producto por escalares.

Comprobamos que la suma es interna.

$$(x_1, x_2, x_3) + (x_1', x_2', x_3') = (x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3')$$

Además, sabemos que $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_3 = 0$ y $f(x_1', x_2', x_3') = 2x_1' - x_3' = 0$. Por tanto,

$$f(x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3') = 2(x_1 + x_1') - (x_3 + x_3') = 2x_1 + 2x_1' - x_3 - x_3' = (2x_1 - x_3) + (2x_1' - x_3') = 0 + 0 = 0$$

Acabamos de comprobar que la suma es interna.

Comprobamos ahora el producto por escalares.

$$f\big(k(x_1,x_2,x_3)\big) = f(kx_1,kx_2,kx_3) = 2kx_1 - kx_3 = k(2x_1 - x_3) = k \cdot 0 = 0$$

Luego, también se verifica el producto por escalares.

Al cumplirse ambas condiciones, podemos decir que, efectivamente, **el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ que en la aplicación g se transforman en cero (núcleo de g) forman un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.**

c) Dese una base de dicho subespacio.

Teniendo en cuenta que

$$2x_1 - x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 2x_1$$

Por lo que el vector genérico sería: $(x_1,x_2,2x_1) = x_1(1,0,2) + x_2(0,1,0)$. Y una base del subespacio de $\mathbb{R}^3$ sería: $\{(1,0,2);(0,1,0)\}$.

2. Demuéstrese que $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\boldsymbol{f(x,y) = (x+1, y+2)}$ no es aplicación lineal.

Solución

Como sabemos, para que una aplicación sea lineal, tiene que cumplir las dos propiedades siguientes: $f(\boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{v_2}) = f(\boldsymbol{v_1}) + f(\boldsymbol{v_2})$ y $f(k\boldsymbol{v}) = k \cdot f(\boldsymbol{v})$.

$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$$

$$f(x+x',y+y') \neq f(x,y) + f(x',y')$$

$$(x+x'+1, y+y'+2) \neq (x+1,y+2) + (x'+1,y'+2)$$

$$(x+x'+1, y+y'+2) \neq (x+1+x'+1, y+2+y'+2)$$

$$\boldsymbol{(x+x'+1, y+y'+2) \neq (x+x'+2, y+y'+4)}$$

Luego, al no cumplirse la primera propiedad, **no es aplicación lineal**. De todos modos, vamos a comprobar si se cumple la segunda propiedad.

$$f\big(k(x,y)\big) \neq kf(x,y)$$

$$f(kx,ky) \neq kf(x,y)$$

$$(kx+1, ky+2) \neq k(x+1,y+2)$$

$$\boldsymbol{(kx+1, ky+2) \neq (kx+k, ky+k2)}$$

Tampoco cumple la segunda propiedad. De todos modos, en cuanto no se cumpla una de las dos propiedades, la aplicación ya no es lineal.

3. Demuéstrese que $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$dada por $\boldsymbol{f(x,y,z) = (x,y,0)}$ es aplicación lineal.

Solución

Para verificar que la aplicación anterior es lineal, debemos comprobar que cumple las dos propiedades siguientes:$f(\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}) = f(\boldsymbol{v_1}) + f(\boldsymbol{v_2})$ y $f(k\boldsymbol{v}) = k \cdot f(\boldsymbol{v})$.

$$(x,y,z) + (x',y',z') = (x+x',y+y',z+z')$$

$$f(x+x',y+y',z+z') = f(x,y,z) + f(x',y',z')$$

$$(x+x',y+y',0) = (x,y,0) + (x',y',0)$$

$$\boldsymbol{(x+x',y+y',0) = (x+x',y+y',0)}$$

$$f\big(k(x,y,z)\big) = kf(x,y,z)$$

$$f(kx,ky,kz) = k(x,y,0)$$

$$\boldsymbol{(kx,ky,0) = (kx,ky,0)}$$

Al cumplirse ambas propiedades, **la aplicación es lineal**.

4. ¿Cuáles de las siguientes funciones $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ son aplicaciones lineales?

a) $\boldsymbol{f(x,y) = (1+x,y)}$
b) $\boldsymbol{f(x,y) = (y,x)}$
c) $\boldsymbol{f(x,y) = (\mathrm{sen}(x),y)}$
d) $\boldsymbol{f(x,y) = (x^2,y)}$

Solución

Para verificar que las aplicaciones anteriores son lineales, debemos comprobar que cumplen las dos propiedades siguientes: $f(\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}) = f(\boldsymbol{v_1}) + f(\boldsymbol{v_2})$ y $f(k\boldsymbol{v}) = k \cdot f(\boldsymbol{v})$.

1.2 $f(x,y) = (1+x,y)$

$$(x,y) + (x',y') \neq (x+x',y+y')$$

$$f(x+x',y+y') \neq f(x,y) + f(x',y')$$

$$(1+x+x',y+y') \neq (1+x,y) + (1+x',y')$$

$$\boldsymbol{(1+x+x',y+y') \neq (2+x+x',y+y')}$$

Como no cumple la primera propiedad, **no es aplicación lineal**.

Además, otra forma de comprobar que no se trata de una aplicación lineal es demostrando que no cumple que $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

$$\boldsymbol{f(0,0) = (1+0,0) = (1,0) \neq (0,0)}$$

1.3 $f(x,y) = (y,x)$

$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$$

$$f(x+x', y+y') = f(x,y) + f(x',y')$$

$$(y+y', x+x') = (y,x) + (y',x')$$

$$\boldsymbol{(y+y', x+x') = (y+y', x+x')}$$

Sí cumple la primera propiedad. A continuación comprobamos si cumple la segunda.

$$f(k(x,y)) = kf(x,y)$$

$$f(kx,ky) = k(y,x)$$

$$\boldsymbol{(ky,kx) = (ky,xx)}$$

También cumple la 2ª propiedad, luego **se trata de una aplicación lineal.**

1.4 $f(x,y) = (\mathrm{sen}(x)\,, y)$

$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$$

$$f(x+x', y+y') = f(x,y) + f(x',y')$$

$$(\mathrm{sen}(x+x')\,, y+y') = (\mathrm{sen}(x)\,, y) + (\mathrm{sen}(x')\,, y')$$

$$\boldsymbol{(\mathrm{sen}(x+x')\,, y+y') = (\mathrm{sen}(x) + \mathrm{sen}(x')\,, y+y')}$$

Sí cumple la primera propiedad. A continuación comprobamos si cumple la segunda.

$$f(k(x,y)) \neq kf(x,y)$$

$$f(kx,ky) \neq k(\mathrm{sen}(x)\,, y)$$

$$\boldsymbol{(\mathrm{sen}(kx)\,, ky) \neq (k\,\mathrm{sen}(x)\,, ky)}$$

No cumple la segunda propiedad, luego **no es aplicación lineal**.

Otra forma de comprobar que no es aplicación lineal consiste en poner un ejemplo concreto y ver que al menos una de las propiedades no se verifica.

$$f\left(\frac{\pi}{2},0\right) \neq \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right),0\right) = (1{,}0)$$

$$f\left(2\cdot\left(\frac{\pi}{2},0\right)\right) \neq 2\cdot f\left(\frac{\pi}{2},0\right)$$

$$f(\pi,0) \neq 2\cdot(1{,}0)$$

$$(\operatorname{sen}(\pi),0) \neq (2{,}0)$$

$$(\mathbf{0},\mathbf{0}) \neq (\mathbf{2},\mathbf{0})$$

1.5 $f(x,y) = (x^2,y)$

$$(x,y) + (x',y') \neq (x+x',y+y')$$

$$f(x+x',y+y') \neq f(x,y) + f(x',y')$$

$$((x+x')^2,y+y') \neq (x^2,y) + ((x')^2,y')$$

$$\boldsymbol{((x+x')^2,y+y') \neq (x^2+(x')^2,y+y')}$$

No cumple la primera propiedad, luego **no es una aplicación lineal**. De todas formas, vamos comprobamos si cumple la segunda.

$$f(k(x,y)) \neq kf(x,y)$$

$$f(kx,ky) \neq k(x^2,y)$$

$$\boldsymbol{((kx)^2,ky) \neq (k(x^2),ky)}$$

Tampoco cumple la segunda propiedad, luego **no es aplicación lineal**.

Al igual que en el apartado anterior, también se puede probar que no se trata de una aplicación lineal poniendo un ejemplo.

$$f(1{,}1) = (1^2,1) = (1{,}1)$$

$$f(2\cdot(1{,}1)) \neq 2\cdot f(1{,}1)$$

$$f(2{,}2) \neq 2\cdot(1{,}1)$$

$$(2^2,2) \neq (2{,}2)$$

$$(\mathbf{4},\mathbf{2}) \neq (\mathbf{2},\mathbf{2})$$

1.5 MATRICES Y DETERMINANTES

MATRICES:

Definición: Una matriz es una colección de números organizados en un número fijo de filas y columnas. Normalmente, estos números son números reales. En general, las matrices pueden contener números complejos, pero nosotros no lo vamos a ver. Es importante que tengáis presente que la primera entrada (es decir, *m*) es el número de filas, mientras que la segunda entrada (*n*) representa el número de columnas.

$$A = (a_{ij}) = A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo: A continuación presentamos una matriz con 3 filas y 3 columnas:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 8 & 4{,}6 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dimensiones (tamaño) de una matriz: Vienen dadas por el número de filas y columnas de la matriz. Diríamos que la matriz superior tiene m filas y n columnas, o lo que es lo mismo, es una matriz $m \times n$.

Ejemplo: A continuación presentamos una matriz con 3 filas y 2 columnas, por lo tanto se trata de una matriz 3×2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Muchas veces veréis las dimensiones de la matriz escritas abajo a la derecha de la matriz, tal y como se observa en este ejemplo. Pero esto es sólo una forma de recordar las dimensiones de la matriz, y no parte de la misma.

Ejemplo 2: En este caso, la matriz tiene 2 filas y 3 columnas, luego se trata de una matriz 2×3:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Elementos de una matriz: Son cada uno de los números contenidos en la matriz. Los elementos de la matriz tienen una situación específica. El elemento a_{ij} es conocido como la entrada (i, j)-ésima de *A*.

Ejemplo: El primer número que aparece en la matriz, arriba a la izquierda, ocupa la posición fila 1 y columna 1, es decir, es el elemento a_{11}. En la matriz anterior el elemento $a_{11} = 1$. El elemento de la fila 2 y columna 3 es el elemento $a_{23} = 4{,}6$. El valor del elemento en la fila 3 y la columna 1 es $a_{31} = 4$.

El vector fila $(a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in})$ es la fila *i*-ésima de *A*, y el vector columna $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ es la columna *j*-ésima de *A.*

De modo que como se puede observar, un VECTOR COLUMNA (también llamado MATRIZ COLUMNA) es una única columna, o lo que es lo mismo, una matriz $m \times 1$. Por otro lado, un VECTOR FILA (también llamado MATRIZ FILA) es una única fila, es decir, una matriz $1 \times n$.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Fila 1: $(1 \quad 4)$

Fila 2: $(2 \quad 5)$

Fila 3: $(3 \quad 6)$

Columna 1: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Columna 2: $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Matriz Cuadrada y Matriz Rectangular: En una MATRIZ CUADRADA el número de filas es igual al número de columnas. Una matriz cuadrada de orden *n*, es una matriz $(n \times n)$. Cualquier otra matriz en la que el número de filas y de columnas no sea el mismo se denomina MATRIZ RECTANGULAR.

Ejemplo: Matriz Cuadrada:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \\ 7 & 10 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Ejemplo: Matriz Rectangular:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Diagonal Principal: La DIAGONAL PRINCIPAL de una matriz cuadrada está formada por los elementos a_{ii}.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -3 & 0 & -2 \\ 0 & \mathbf{2} & -1 & 1 \\ -2 & 5 & \mathbf{3} & -5 \\ 3 & 8 & 0 & \mathbf{-7} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & 8 & 0 \\ 3 & \mathbf{7} & -1 \\ 1 & 6 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 4 \\ 3 & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Dentro de la matriz hay otras diagonales, pero que no son tan importantes, y no tienen nombre específico.

Traza de una matriz cuadrada: La TRAZA de una matriz cuadrada A, denotada por $traza(A)$ es la suma de los elementos de su diagonal principal. Esto es,

$$traza(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \\ 7 & 10 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$$traza(A) = 5 + 0 + 3 = 8$$

Igualdad de Matrices: Para que dos matrices sean iguales deben tener las mismas dimensiones y los mismos valores en las mismas posiciones.

En otras palabras, si $A_{n\times m} = (a_{ij})$ y $B_{p\times q} = (b_{ij})$. Entonces, $A = B$ si y solo si $n = p, m = q$ y $a_{ij} = b_{ij}$ para todo *i* y *j*.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Ejemplo 2: Aquí tenemos dos matrices que a pesar de tener los mismos elementos, no son iguales, ya que sus dimensiones son distintas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 2} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Ejemplo 3: Estas dos matrices tienen las mismas dimensiones, y los mismos elementos, pero estos elementos no están situados en las mismas posiciones dentro de las matrices, de modo que no son iguales.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 2} \neq \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Matriz Cero: Una matriz cero es aquella en la que todos los elementos de la misma son ceros. Si añadimos una matriz cero a una segunda matriz, esta última no experimentará ningún cambio.

Ejemplo: A continuación presentamos una matriz cero 3x3.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3} = 0$$

Matriz Identidad: Una MATRIZ IDENTIDAD es una matriz cuadrada en la que todos los elementos de la diagonal principal son 1, y los elementos a ambos lados de ésta son ceros, y la denotamos con la letra I.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Triangular: una MATRIZ TRIANGULAR es un tipo especial de matriz cuadrada donde los elementos que están por encima o por debajo de la diagonal principal son ceros. Hay varios tipos:

- Triangular Superior. **Ejemplo:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Triangular Inferior. **Ejemplo:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 4 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

- Triangular. **Ejemplo:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

SUMA DE MATRICES:

Para poder sumar dos matrices ambas tienen que tener las mismas dimensiones, es decir, el mismo número de filas y columnas.

Si A es una matriz $m \times n$, y B también, entonces la matriz resultante de su suma será también una matriz $m \times n$ obtenida sumando los elementos correspondientes de ambas matrices.

__Ejemplo:__

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 7 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

__Ejemplo 2__:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la suma de matrices: En todas las reglas que se presentan a continuación se asume que todas ellas tienen las mismas dimensiones.

- PROPIEDAD COMMUTATIVA**:** A + B = B + A.
  __Ejemplo:__

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \\ 13 & 15 & 17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \\ 12 & 14 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 3+2 & 5+4 \\ 7+6 & 9+8 & 11+10 \\ 13+12 & 15+14 & 17+16 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 13 & 17 & 21 \\ 25 & 29 & 33 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \\ 12 & 14 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \\ 13 & 15 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & 2+3 & 4+5 \\ 6+7 & 8+9 & 10+11 \\ 12+13 & 14+15 & 16+17 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 13 & 17 & 21 \\ 25 & 29 & 33 \end{pmatrix}$$

- A + 0 = 0 + A = A.
  __Ejemplo:__

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 10 & 7{,}5 \\ 2 & 9 & -3{,}2 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 7{,}5 \\ 2 & 9 & -3{,}2 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- 0 + 0 = 0.
  __Ejemplo:__

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- PROPIEDAD ASOCIATIVA: (A + B) + C = A + (B + C).
- MULTIPLICACIÓN DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR (UNA CONSTANTE)**:** Para multiplicar una matriz por un escalar tenemos que multiplicar cada elemento de la matriz por ese escalar.

$$kA = k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$2\begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 16 & 1 & 6 \\ 8 & 1 & 6 & 10 \\ 4 & 10 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2:

$$-1\begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -5 \\ 7 & 2 & 10 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -3 & 3 \\ -4 & 1 & -3 & 5 \\ -7 & -2 & -10 & -6 \end{pmatrix}$$

- $k(A+B) = kA + kB$.
- $A + (-A) = 0$.
- NEGACIÓN DE UNA MATRIZ**:** Se consigue multiplicando cada elemento de la matriz por -1. $-A = -1 \cdot A$

Resta de Matrices: Si A y B tienen las mismas dimensiones, entonces podemos definir $A - B$ como $A + (-B)$. Es decir, para calcular $A - B$ lo único que tenemos que hacer es restar a cada elemento de A el elemento correspondiente de B. Además, también es importante recalcar que las propiedades de la suma también son aplicables a la resta.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 10 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & -2 \\ -3 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Matriz Traspuesta: La TRASPUESTA de una matriz es una nueva matriz cuyas filas son las columnas de la matriz original (lo que hace que sus columnas sean las filas de la original). Denotaremos la traspuesta de A como A^T**.** El superíndice T significa traspuesta.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 7 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 7 & 10 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 4 & 0 & 10 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 8 \\ 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 8 \\ 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 2}^T = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ -3 & 8 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

Ejemplo 3:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Ejemplo 4: La traspuesta de una matriz fila es una matriz columna. Y la traspuesta de una matriz columna es una matriz fila.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$D^T = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la traspuesta:

- $(A^T)^T = A$. Si trasponemos la matriz traspuesta obtendremos la matriz original.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(A^T)^T = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T\right)^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

- $(A+B)^T = A^T + B^T$.
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$. Volveremos a ver esta propiedad cuando veamos el producto de matrices.
- $A^T = A$, cuando trabajamos con matrices simétricas.

OBSERVACIÓN: Nótese que cuando trasponemos una matriz cuadrada los elementos de la diagonal principal no cambian.

Matriz Simétrica: Una MATRIZ SIMÉTRICA es una matriz cuadrada que es igual a su traspuesta. Esto pasa cuando $a_{ij} = a_{ji}$. $A^T = A$. Nótese que los elementos de la diagonal principal no tienen que satisfacer ningún requerimiento especial.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$a_{21} = a_{12} = -1$$

$$a_{31} = a_{13} = 3$$

$$a_{32} = a_{23} = 4$$

Ejemplo 2:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{21} = a_{12} = 2$$

$$a_{31} = a_{13} = 1$$

$$a_{32} = a_{23} = -2$$

Ejemplo 3: La matriz cero es simétrica.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Resumen de las reglas más importantes vistas hasta ahora: A continuación presentamos algunas de las reglas más importantes vistas hasta ahora. En todas ellas las matrices tienen las mismas dimensiones, es decir, poseen el mismo número de filas y columnas.

$A + 0 = A$	$A + B = B + A$	$0 + 0 = 0$
$(A + B) + C = A + (B + C)$	$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$	$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
$\alpha 0 = 0$	$-1A = -A$	$A - A = 0$

$(A^T)^T = A$	$0^T = 0$	$(A+B)^T = A^T + B^T$

PRODUCTO DE MATRICES:

Para poder realizar el producto AB el número de columnas de A (n) tiene que ser igual al número de filas de B, para poder multiplicar las filas de A por la columnas de B. Definiremos el producto $C = AB$ como la matriz formada por los elementos

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Como ejemplo, tomemos las siguientes matrices generales 2 × 3 y 3 × 2.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}_{2\times 3} \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \\ y & z \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

La matriz resultante será una matriz 2 × 2.

El procedimiento es el siguiente: Vamos a comenzar con la **primera fila** de la primera matriz, multiplicando sus elementos por los de la **primera columna** de la segunda matriz, elemento a elemento. Y después, sumamos los productos resultantes. Escribimos el resultado de esta operación en la posición a_{11} (arriba a la izquierda).

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} & v \\ \boldsymbol{w} & x \\ \boldsymbol{y} & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au + bw + cy & \\ & \end{pmatrix}$$

Volvemos a hacer lo mismo con la **primera fila** de la primera matriz y la **segunda columna** de la segunda matriz. Escribimos el resultado en la posición a_{12}.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & \boldsymbol{v} \\ w & \boldsymbol{x} \\ y & \boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au + bw + cy & \boldsymbol{av + bx + cz} \\ & \end{pmatrix}$$

A continuación, volvemos a hacer lo mismo con la **segunda fila** de la primera matriz y la **primera columna** de la segunda matriz. Escribimos el resultado en la posición a_{21}.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} & v \\ \boldsymbol{w} & x \\ \boldsymbol{y} & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au + bw + cy & av + bx + cz \\ \boldsymbol{du + ew + fy} & \end{pmatrix}$$

Finalmente, hacemos lo mismo con la **segunda fila** de la primera matriz y la **segunda columna** de la segunda matriz. Escribimos el resultado en la posición a_{22}.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & \boldsymbol{v} \\ w & \boldsymbol{x} \\ y & \boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au + bw + cy & av + bx + cz \\ du + ew + fy & \boldsymbol{dv + ex + fz} \end{pmatrix}$$

<u>Ejemplo</u>: Multiplique las siguientes matrices:

a)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & 11 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 3+(-1)\cdot 1+2\cdot 6 & 0\cdot(-1)+(-1)\cdot 2+2\cdot 1 \\ 4\cdot 3+11\cdot 1+2\cdot 6 & 4\cdot(-1)+11\cdot 2+2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 35 & 20 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 2}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 8\cdot(-2)+9\cdot 4 & 8\cdot 3+9\cdot 0 \\ 5\cdot(-2)+(-1)\cdot 4 & 5\cdot 3+(-1)\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 24 \\ -14 & 15 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{1\times 4}\begin{pmatrix} 1 & 5 & -7 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1+0\cdot 1+(-1)\cdot 0+1\cdot 2 & 2\cdot 5+0\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+1\cdot 0 & 2\cdot(-7)+0\cdot 0+(-1)\cdot 1+1\cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 11 & -15 \end{pmatrix}_{1\times 3}$$

d)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 4}\begin{pmatrix} 1 & 5 & -7 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1+0\cdot 1+(-1)\cdot 0+1\cdot 2 & 2\cdot 5+0\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+1\cdot 0 & 2\cdot(-7)+0\cdot 0+(-1)\cdot 1+1\cdot 0 \\ 1\cdot 1+2\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot 2 & 1\cdot 5+2\cdot 1+0\cdot(-1)+1\cdot 0 & 1\cdot(-7)+2\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 11 & -15 \\ 5 & 7 & -7 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Propiedades del producto de matrices: Si A, B y C son 3 matrices cualesquiera, e I es la matriz identidad, podemos definir las siguientes propiedades para el producto de matrices, siempre y cuando las dimensiones de las mismas lo permitan.

- PROPIEDAD ASOCIATIVA: $A(BC) = (AB)C$.
  <u>Ejemplo:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 28 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 28 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A(BC) = (AB)C$$

- ELEMENTO NEUTRO DE LA MULTIPLICACIÓN: $AI = IA = A$. Es una propiedad análoga a la multiplicación de un número por 1.
  Ejemplo:
  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 4 & 7 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 4 & 7 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

- PROPIEDAD DISTRIBUTIVA POR LA IZQUIERDA: $A(B + C) = AB + AC$.
- PROPIEDAD DISTRIBUTIVA POR LA DERECHA: $(A + B)C = AC + BC$.
- MULTIPLICACIÓN POR CERO: $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$.
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
- $AB \neq BA$
  Ejemplo:
  $$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$
  $$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
  $$AB = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$$
  $$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 23 & 15 \end{pmatrix}$$
  Por tanto, hemos demostrado que $AB \neq BA$.

- $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$
- $(A - B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$
- $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2$

EJERCICIOS:

1. **Sean A y B las siguientes matrices**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-7} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{8} \end{pmatrix}$$

Calcule AB.

<u>Solución</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}_{2\times 4} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}_{4\times 1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot(-2) + (-2)\cdot 3 + (-4)\cdot 8 \\ (-1)\cdot 1 + 1\cdot(-2) + 3\cdot 3 + (-7)\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -41 \\ -50 \end{pmatrix}_{2\times 1}$$

2. **Sean A y B las siguientes matrices**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

¿Por qué tanto AB, cómo BA se pueden calcular? ¿Son iguales?

<u>Solución</u>

En primer lugar, AB se puede calcular ya que el número de columnas de A (3) es igual al número de filas de B (3). En segundo lugar, el producto BA puede calcularse también por la misma razón, ya que el número de columnas de B (3) es igual al número de filas de A (3). Además, también se puede observar que ambas matrices son cuadradas.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 3 & 1\cdot 0 + 1\cdot 3 + 1\cdot 1 & 1\cdot 2 + 1\cdot 5 + 1\cdot 5 \\ 1\cdot 1 + 3\cdot 2 + 2\cdot 3 & 1\cdot 0 + 3\cdot 3 + 2\cdot 1 & 1\cdot 2 + 3\cdot 5 + 2\cdot 5 \\ 1\cdot 1 + 3\cdot 2 + 3\cdot 3 & 1\cdot 0 + 3\cdot 3 + 3\cdot 1 & 1\cdot 2 + 3\cdot 5 + 3\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 12 \\ 13 & 11 & 27 \\ 16 & 12 & 32 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 2\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot 3 + 2\cdot 3 & 1\cdot 1 + 0\cdot 2 + 2\cdot 3 \\ 2\cdot 1 + 3\cdot 1 + 5\cdot 1 & 2\cdot 1 + 3\cdot 3 + 5\cdot 3 & 2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 5\cdot 3 \\ 3\cdot 1 + 1\cdot 1 + 5\cdot 1 & 3\cdot 1 + 1\cdot 3 + 5\cdot 3 & 3\cdot 1 + 1\cdot 2 + 5\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 7 \\ 10 & 26 & 23 \\ 9 & 21 & 20 \end{pmatrix}$$

$$AB \neq BA$$

3. Sean $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ las siguientes matrices

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

a) ¿Podemos calcular los productos $\boldsymbol{AB}$ y $\boldsymbol{BA}$? Calcular $\boldsymbol{AB}$.
b) Calcule $\boldsymbol{AC}$.
c) Calcule $\boldsymbol{A(B+C)}$ y verifique que $\boldsymbol{A(B+C) = AB + AC}$.

<u>Solución</u>

a) En primer lugar, AB se puede calcular ya que el número de columnas de A (3) es igual al número de filas de B (3). Sin embargo, el producto BA no se puede calcular porque el número de columnas de B (2) es distinto del número de filas de A (3).

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 2\cdot 2 \\ 2\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot 0 & 2\cdot 0 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot 2 \\ (-3)\cdot 1 + 0\cdot 1 + 2\cdot 0 & (-3)\cdot 0 + 0\cdot 1 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

b)

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 0\cdot 2 + 2\cdot 3 & 1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 2\cdot 4 \\ 2\cdot 0 + (-1)\cdot 2 + 1\cdot 3 & 2\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot 4 \\ (-3)\cdot 0 + 0\cdot 2 + 2\cdot 3 & (-3)\cdot 1 + 0\cdot 1 + 2\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 1 & 5 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

c)

$$A(B+C)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ -3 & 0 & 2\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ -3 & 0 & 2\end{pmatrix}_{3\times 3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}_{3\times 2}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 1+0\cdot 3+2\cdot 3 & 1\cdot 1+0\cdot 2+2\cdot 6\\ 2\cdot 1+(-1)\cdot 3+1\cdot 3 & 2\cdot 1+(-1)\cdot 2+1\cdot 6\\ (-3)\cdot 1+0\cdot 3+2\cdot 3 & (-3)\cdot 1+0\cdot 2+2\cdot 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 13\\ 2 & 6\\ 3 & 9\end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$AB+AC=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & 1\\ -3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & 9\\ 1 & 5\\ 6 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 13\\ 2 & 6\\ 3 & 9\end{pmatrix}$$

De modo que acabamos de verificar que $A(B+C)=AB+AC$.

4. Sean $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ las siguientes matrices cuadradas

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3}\\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6}\\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{9} & \mathbf{8} & \mathbf{7}\\ \mathbf{6} & \mathbf{5} & \mathbf{4}\\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{5}\\ \mathbf{7} & \mathbf{9} & \mathbf{0}\\ \mathbf{-3} & \mathbf{-2} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}$$

Calcule:

a) $\boldsymbol{2A-3B+C}$.

b) $\boldsymbol{2A^2-3AB+AC}$.

c) $\boldsymbol{2A^2B-3AB^2+ACB}$.

Solución

a)

$$2A=2\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 2 & 2\cdot 2 & 3\cdot 2\\ 4\cdot 2 & 5\cdot 2 & 6\cdot 2\\ 7\cdot 2 & 8\cdot 2 & 9\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 8 & 10 & 12\\ 14 & 16 & 18\end{pmatrix}$$

$$3B=3\begin{pmatrix}9 & 8 & 7\\ 6 & 5 & 4\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\cdot 3 & 8\cdot 3 & 7\cdot 3\\ 6\cdot 3 & 5\cdot 3 & 4\cdot 3\\ 3\cdot 3 & 2\cdot 3 & 1\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}27 & 24 & 21\\ 18 & 15 & 12\\ 9 & 6 & 3\end{pmatrix}$$

$$2A-3B+C=\begin{pmatrix}2&4&6\\8&10&12\\14&16&18\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}27&24&21\\18&15&12\\9&6&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&3&5\\7&9&0\\-3&-2&-1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-24&-17&-10\\-3&4&0\\2&8&14\end{pmatrix}$$

b) Si utilizamos la propiedad distributiva,

$$2A^2-3AB+AC=2AA-3AB+AC=A(2A-3B+C)=$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}_{3\times3}\begin{pmatrix}-24&-17&-10\\-3&4&0\\2&8&14\end{pmatrix}_{3\times3}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot(-24)+2\cdot(-3)+3\cdot2 & 1\cdot(-17)+2\cdot4+3\cdot8 & 1\cdot(-10)+2\cdot0+3\cdot14\\4\cdot(-24)+5\cdot(-3)+6\cdot2 & 4\cdot(-24)+5\cdot(-3)+6\cdot2 & 4\cdot(-24)+5\cdot(-3)+6\cdot2\\7\cdot(-24)+8\cdot(-3)+9\cdot2 & 7\cdot(-17)+8\cdot4+9\cdot8 & 7\cdot(-10)+8\cdot0+9\cdot14\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-24&15&32\\-99&0&44\\-174&-15&56\end{pmatrix}_{3\times3}$$

c) Si utilizamos la propiedad distributiva,

$$2A^2B-3AB^2+ACB=2AAB-3ABB+ACB=A(2AB-3BB+CB)=A(2A-3B+C)B=$$

$$A(2A-3B+C)B=\begin{pmatrix}-24&15&32\\-99&0&44\\-174&-15&56\end{pmatrix}_{3\times3}\begin{pmatrix}9&8&7\\6&5&4\\3&2&1\end{pmatrix}_{3\times3}=$$

$$=\begin{pmatrix}(-24)\cdot9+15\cdot6+32\cdot3 & (-24)\cdot8+15\cdot5+32\cdot2 & (-24)\cdot7+15\cdot4+32\cdot1\\(-99)\cdot9+0\cdot6+44\cdot3 & (-99)\cdot8+0\cdot5+44\cdot2 & (-99)\cdot7+0\cdot4+44\cdot1\\(-174)\cdot9+(-15)\cdot6+56\cdot3 & (-174)\cdot8+(-15)\cdot5+56\cdot2 & (-174)\cdot7+(-15)\cdot4+56\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-30&-53&-76\\-759&-704&-649\\-1.488&-1.355&-1.222\end{pmatrix}_{3\times3}$$

5. Sea A la siguiente matriz

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1}\\\mathbf{0}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}$$

Calcúlese:

a) $\boldsymbol{A\cdot A^T}$

b) $\boldsymbol{A^T\cdot A}$

c) $\boldsymbol{2A\cdot 3A^T}$

d) $\boldsymbol{(A\cdot A^T)^T}$

e) $\boldsymbol{A \cdot A^T \cdot A \cdot A^T}$

<u>Solución</u>

a)

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{3\times1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{1\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

b)

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{1\times3} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{3\times1} = (1+0+4)_{3\times3} = (5)$$

c)

$$2A \cdot 3A^T = 6(A \cdot A^T) = 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

d)

$$(A \cdot A^T)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Nótese que $A \cdot A^T = (A \cdot A^T)^T$, lo que significa que $A \cdot A^T$ es una matriz simétrica.

e)

$$A \cdot A^T \cdot A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{3\times3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{3\times3} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 20 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

6. Sean A y B las siguientes matrices

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Calcule:

a) $\boldsymbol{A \cdot B^T}$
b) $\boldsymbol{B \cdot A^T}$
c) $\boldsymbol{B^T \cdot A}$
d) $\boldsymbol{A \cdot A^T}$
e) $\boldsymbol{A^T \cdot A}$
f) $\boldsymbol{(A^T \cdot B)A}$

Solución

a)

$$B^T = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B^T = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 2 \\ -12 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A^T = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -12 & 0 \\ 6 & -9 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Nótese que $B \cdot A^T = (A \cdot B^T)^T$.

c)

$$B^T \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = (8 - 9 + 0) = (-1)$$

d)

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 \\ -6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nótese que $A \cdot A^T$ es una matriz simétrica, lo que significa que $A \cdot A^T = (A \cdot A^T)^T$.

e)

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = (4 + 9 + 0) = (13)$$

f)

$$A^T \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 + 0 \cdot 1) = (-1)$$

$$(A^T \cdot B)A = (-1)_{1\times 1} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

Este último producto no se puede efectuar.

DETERMINANTES:

Definición: El determinante de una matriz cuadrada es un número que va asociado a esa matriz. Denotaremos el determinante de A por $\det(A)$ o $|A|$. Sólo podemos calcular determinantes de matrices cuadradas. Las matrices rectangulares y los vectores no tienen determinante.

Los determinantes se pueden utilizar para resolver sistemas de ecuaciones, para calcular la inversa de una matriz, o para calcular su rango, entre otras cosas. Veremos todos estos temas a lo largo de este capítulo.

Cálculo del determinante en matrices de orden 2 (2×2):

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

__Ejemplo:__

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - (-3) \cdot 2 = \mathbf{6}$$

Cálculo del determinante en matrices de orden 3 (3×3): La Regla de Sarrus:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

__Ejemplo:__

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \\ -6 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \\ -6 & 4 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= 0(-1)(-8) + 3 \cdot 0 \cdot (-6) + 2 \cdot 5 \cdot 4 - 2(-1)(-6) - 5 \cdot 3 \cdot (-8) - 0 \cdot 0 \cdot 4 = \mathbf{148}$$

Los dos métodos anteriores no pueden aplicarse a matrices de órdenes mayores que 3. Para calcular el determinante de estas últimas existen diferentes métodos.

Cálculo del determinante en matrices de orden mayor que 3:

__1er Método__: **Formula de Laplace:**

$$\det(A) = |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \, (-1)^{i+j} \det(A_{ij}),$$

donde $(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ es el __ADJUNTO__ de a_{ij} y $\det(A_{ij})$ es lo que llamamos el __MENOR COMPLEMENTARIO__.

Ejemplo:

$$C=\begin{pmatrix}1&-2&-3&4\\-2&3&4&-5\\3&-4&-5&6\\4&5&6&-7\end{pmatrix}$$

$$|C|=\begin{vmatrix}1&-2&-3&4\\-2&3&4&-5\\3&-4&-5&6\\4&5&6&-7\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&4&-5\\-4&-5&6\\5&6&-7\end{vmatrix}+(-2)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-2&-3&4\\-4&-5&6\\5&6&-7\end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-2&-3&4\\3&4&-5\\5&6&-7\end{vmatrix}+4\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}-2&-3&4\\3&4&-5\\-4&-5&6\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}3&4&-5\\-4&-5&6\\5&6&-7\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-2&-3&4\\-4&-5&6\\5&6&-7\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-2&-3&4\\3&4&-5\\5&6&-7\end{vmatrix}+(-4)\begin{vmatrix}-2&-3&4\\3&4&-5\\-4&-5&6\end{vmatrix}=$$

$$=(3\cdot(-5)\cdot(-7)+4\cdot6\cdot5+(-5)\cdot4\cdot6—5)\cdot(-5)\cdot5-4\cdot(-4)\cdot(-7)-3\cdot6\cdot6+$$

$$+2(-2\cdot(-5)\cdot(-7)+4\cdot(-4)\cdot6+(-3)\cdot6\cdot5-4\cdot(-5)\cdot5-(-2)\cdot6\cdot6-(-3)\cdot(-4)\cdot(-7))+$$

$$+3(-2\cdot4\cdot(-7)+4\cdot3\cdot6+(-3)\cdot(-5)\cdot5-4\cdot4\cdot5-(-2)\cdot(-5)\cdot6-(-3)\cdot3\cdot(-7))+$$

$$-4\big((-2)\cdot4\cdot6+4\cdot3\cdot(-5)+(-3)\cdot(-5)\cdot(-4)-4\cdot4\cdot(-4)-(-2)\cdot(-5)\cdot(-5)-(-3)\cdot3\cdot6\big)=$$

$$=0+2\cdot0+3\cdot0+(-4)\cdot0=\mathbf{0}$$

Ejemplo 2:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&2&0&0\\0&2&1&0\\0&2&0&1\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&0&0\\0&2&0&0\\0&2&1&0\\0&2&0&1\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&0&0\\2&1&0\\2&0&1\end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&0&0\\2&1&0\\2&0&1\end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&0&0\\2&0&0\\2&0&1\end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}2&0&0\\2&0&0\\2&1&0\end{vmatrix}=2+0+0+0=\mathbf{2}$$

OBSERVACIÓN: Nótese que para obtener el determinante de una matriz triangular tenemos que multiplicar los elementos de su diagonal principal.

Ejemplo 3:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 8 + 0 + 0 + 0 = \mathbf{8}$$

<u>2º Método:</u> El segundo método consiste en utilizar las propiedades de los determinantes que presentamos a continuación.

Propiedades de los Determinantes:

- Si dos filas (o columnas) se intercambian, el signo del determinante cambia también. **<u>Ejemplo:</u>**

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

- Si la matriz tiene una fila (o columna) de ceros, entonces el determinante es 0. **<u>Ejemplo:</u>**

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

- Si dos filas (o columnas) son iguales, entonces el determinante es 0. **<u>Ejemplo:</u>**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

- Si dos filas (o columnas) son proporcionales, entonces el determinante es 0. **<u>Ejemplo:</u>**

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

- Si cambiamos una fila (o columna) sumando o restando a sus elementos los correspondientes elementos de otra fila (o columna), entonces el determinante se mantiene inalterado. **Ejemplo:**

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+1 & 4-2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -10$$

- Si los elementos de cualquier fila (o columna) se multiplican por una constante k, entonces el determinante queda también multiplicado por esa contante k. **Ejemplo:**

$$\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-10) = -20$$

- Cuando al menos una fila (o una columna) de la matriz es combinación lineal de las otras filas (o columnas), entonces el determinante es cero. Y viceversa, si el determinante es cero, eso quiere decir que existe dependencia lineal entre las filas o las columnas de la matriz. **Ejemplo:** Consideremos el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

El determinante es cero porque la primera columna es una combinación lineal de la segunda y la tercera.

$$Col. 1 = Col. 2 + Col. 3.$$

Del mismo modo, existe dependencia lineal entre las filas, dada por la siguiente relación:

$$Fila\ 1 = \frac{7}{8} Fila\ 2 + \frac{4}{5} Fila\ 3.$$

- El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal. **Ejemplo:**

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 3 = 18.$$

- El determinante del producto de dos matrices cuadradas es el producto de los determinantes de ambas matrices. Es decir, $|AB| = |A||B|$.
Una posible aplicación de esta regla está en el cálculo de determinantes de potencias de matrices: Por ejemplo, $|A^2| = |A||A| = |A|^2$, y en general, para potencias de orden n, $|A^n| = |A||A| \dots |A| = |A|^n$.

- El determinante de la traspuesta de una matriz es igual que el de la matriz original. Es decir, $|A^T| = |A|$.
- $|I| = 1$.

Ejemplo: Nótese que la matriz identidad es una matriz triangular, de modo que su determinante puede calcularse como el producto de los elementos de su diagonal principal.

$$|I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Ejemplo: Calcule el determinante de las siguientes matrices.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

En la primera igualdad, hacemos $Col.3 - 2Col.1$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -1(1 \cdot (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \cdot 3) = \mathbf{0}$$

b)

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

En la primera igualdad, hacemos $Fila\ 1 - Fila\ 2$, en la segunda, $Fila\ 2 - \frac{1}{2} Fila\ 3$, y en la tercera, $Fila\ 3 + 4 \cdot Fila\ 4$.

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 0 \\ -1/2 & -1 & -5/2 & 0 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 0 \\ -1/2 & -1 & -5/2 & 0 \\ 5 & 14 & 13 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1(-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -1/2 & -1 & -5/2 \\ 5 & 14 & 13 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left(1 \cdot (-1) \cdot 13 + 7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 14 + 3 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot 5 - 7 \cdot (-1) \cdot 5 - 1 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot 14 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 13\right) = \mathbf{10}$$

c)

$$C=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 3\\ 4 & 2 & 5 & -1\\ 2 & 0 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

En la primera igualdad hacemos $Col.1+2Col.3$, en la segunda $Col.2+Col.3$, y en la tercera $Col.4+3Col.3$.

$$|C|=\begin{vmatrix}2 & 1 & -1 & 3\\ 4 & 2 & 5 & -1\\ 2 & 0 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 1 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1 & -1 & 3\\ 14 & 2 & 5 & -1\\ 4 & 0 & 1 & 1\\ 6 & 2 & 1 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & -1 & 3\\ 14 & 7 & 5 & -1\\ 4 & 1 & 1 & 1\\ 6 & 3 & 1 & 5\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}0 & 0 & -1 & 0\\ 14 & 7 & 5 & 14\\ 4 & 1 & 1 & 4\\ 6 & 3 & 1 & 8\end{vmatrix}=-1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}14 & 7 & 14\\ 4 & 1 & 4\\ 6 & 3 & 8\end{vmatrix}=(-1)7\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 4\\ 6 & 3 & 8\end{vmatrix}=$$

$$=-7(2\cdot 1\cdot 8+2\cdot 4\cdot 3+1\cdot 4\cdot 6-2\cdot 1\cdot 6-2\cdot 4\cdot 3-1\cdot 4\cdot 8)=\mathbf{28}$$

d)

$$D=\begin{pmatrix}5 & 9 & 7 & 8 & 6\\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4\\ 3 & 6 & 8 & 3 & 3\\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

En la primera igualdad haremos $Col.2-Col.1$, en la segunda, $Col.3-Col.1$, en la tercera, $Col.4-Col.1$, en la cuarta, $Col.5-Col.1$ y en la sexta, $Fila\ 4-Fila\ 1$.

$$|D|=\begin{vmatrix}5 & 9 & 7 & 8 & 6\\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4\\ 3 & 6 & 8 & 3 & 3\\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & 4 & 7 & 8 & 6\\ 4 & 2 & 6 & 5 & 4\\ 3 & 3 & 8 & 3 & 3\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 3\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & 4 & 2 & 8 & 6\\ 4 & 2 & 2 & 5 & 4\\ 3 & 3 & 5 & 3 & 3\\ 2 & 3 & 2 & 5 & 3\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}5 & 4 & 2 & 3 & 6\\ 4 & 2 & 2 & 1 & 4\\ 3 & 3 & 5 & 0 & 3\\ 2 & 3 & 2 & 3 & 3\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & 4 & 2 & 3 & 1\\ 4 & 2 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 3 & 5 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=1(-1)^{5+1}\begin{vmatrix}4 & 2 & 3 & 1\\ 2 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 5 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & 2 & 3 & 1\\ 2 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 5 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=1(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}2 & 2 & 1\\ 3 & 5 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=-(2\cdot 5\cdot 0+1\cdot 3\cdot 0+2\cdot 0\cdot(-1)-1\cdot 5\cdot(-1)-2\cdot 0\cdot 0-2\cdot 3\cdot 0)=\mathbf{-5}$$

e)

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

En este caso vamos a resolver el determinante triangularizando la matriz. Concretamente la vamos a reducir a una triangular superior, es decir, vamos a hacer ceros en todas las posiciones situadas por debajo de la diagonal principal. Para ello, primero vamos a restar múltiplos de la fila 1 a las demás filas para conseguir que todas las entradas de la primera columna menos la primera sean cero ($Fila\ 4 - Fila\ 1$, $Fila\ 3 - 2Fila\ 1$, $Fila\ 2 - 3Fila\ 1$). Ninguna de estas operaciones cambia el signo del determinante.

$$|E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

A continuación, intercambiamos las filas 2 y 3. Este cambio también cambia el signo del determinante.

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

Ahora hacemos $Fila\ 4 + \frac{1}{2}Fila\ 3$. Por último, observar que trabajamos con una matriz triangular, de modo que el determinante es el producto de los elementos de su diagonal principal.

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 1 \cdot (-6) \cdot 5) = 30$$

f)

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|F| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

El determinante de la matriz anterior es cero ya que la tercera columna es el doble de la primera, lo que quiere decir que ambas columnas son proporcionales.

g)

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 5 \\ 3 & 8 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

$$|G| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 5 \\ 3 & 8 & 0 & -7 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

Todos los elementos de la columna 3 son ceros, por lo tanto, el determinante es 0.

h)

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \mathbf{1}$$

Matriz Singular: Si el determinante de una matriz es cero ($|A| = 0$), entonces se dice que la matriz es <u>SINGULAR</u>. Esto significa que, al menos una fila o una columna son linealmente dependientes de las demás. Sin embargo, si $|A| \neq 0$, entonces diremos que la matriz A será <u>NO SINGULAR</u> o <u>REGULAR</u>.

<u>Ejemplo:</u> Matriz Singular

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \cdot 6 - (-1) \cdot 4 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 0 \cdot 6 = 0$$

<u>Ejercicio</u>: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-6} & \boldsymbol{a} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$, determine para qué valores de $\boldsymbol{a}$ es singular, y para cuales no lo es.

<u>Solución</u>

$$\begin{vmatrix} 0 & -6 & a \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -3a + 12 = 0 \Rightarrow a = \frac{-12}{-3} = \mathbf{4}$$

Cuando $a = 4 \Rightarrow |A| = 0$, y, por tanto, la matriz es SINGULAR. Sin embargo, cuando $a \neq 4 \Rightarrow |A| \neq 0$ y la matriz es REGULAR (no singular).

INVERSA DE UNA MATRIZ:

La inversa de una matriz cuadrada A es una matriz A^{-1} tal que

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Donde I es la matriz identidad. Las matrices rectangulares no tienen inversa.

Ejemplo:

La inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ es $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, ya que

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

OBSERVACIÓN: No todas las matrices cuadradas tienen inversa. Para que una matriz cuadrada tenga inversa su determinante tiene que ser distinto de 0, ($|A| \neq 0$). Cuando una matriz tiene inversa se denomina INVERSIBLE o NO SINGULAR, y cuando no tiene la llamamos NO INVERSIBLE o SINGULAR.

Existen diferentes métodos para el cálculo de la inversa de una matriz, que presentamos a continuación.

1er Método: **Método del Adjunto:**

Cálculo de la inversa para matrices de orden 2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

La inversa de la matriz anterior es

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Cálculo de la inversa para matrices de orden 3 o mayor:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adj(A^t)) = \frac{1}{|A|}(adj(A))^t$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) \cdot 1 - 0 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 0 - (-2) \cdot 2 \cdot 1 = 5$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adj(A^t)) =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} (-1)^2(-1) & (-1)^3(-2) & (-1)^4 \cdot 2 \\ (-1)^3 \cdot 3 & (-1)^4 \cdot 1 & (-1)^5(-1) \\ (-1)^4 \cdot 1 & (-1)^5 \cdot 2 & (-1)^6 \cdot 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 & 2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 4 \cdot 6 + 1 \cdot 2 \cdot 5 + 0 \cdot 0 \cdot 3 - 1 \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot 0 \cdot 5 - 0 \cdot 2 \cdot 6 = 22$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adj(A^t)) =$$

$$= \frac{1}{22}\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{22}\begin{pmatrix} (-1)^2 \cdot 24 & (-1)^3 \cdot 12 & (-1)^4(-2) \\ (-1)^3(-5) & (-1)^4 \cdot 3 & (-1)^5 \cdot 5 \\ (-1)^4(-4) & (-1)^5(-2) & (-1)^6 \cdot 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 24 & -12 & -2 \\ 5 & 3 & -5 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 24/22 & -12/22 & -2/22 \\ 5/22 & 3/22 & -5/22 \\ -4/22 & 2/22 & 4/22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12/11 & -6/11 & -1/11 \\ 5/22 & 3/22 & -5/22 \\ -2/11 & 1/11 & 2/11 \end{pmatrix}$$

2º Método: **Método de Eliminación de Gauss-Jordan:**

En algebra lineal, **el método de eliminación de Gauss–Jordan** es una versión del método de eliminación Gaussiana, que consiste en hacer ceros tanto por encima, como por debajo del elemento pivote, yendo desde las primera hasta la última fila de la matriz.

Se denomina así por los científicos Carl Friedrich Gauss y Wilhelm Jordan, ya que fueron ellos quienes modificaron el método de eliminación Gaussiana, tal y como se describe en Jordan (1887).

Este método, aplicado a una matriz cuadrada, puede ser utilizado para el cálculo de la inversa de una matriz. Esto se hace aumentando la matriz cuadrada que queremos invertir colocando una matriz Identidad con idénticas dimensiones a su derecha. Y finalmente, realizando las operaciones pertinentes.

Por tanto, para utilizar el método de eliminación de Gauss-Jordan operaremos sobre la siguiente matriz

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right),$$

dónde I el la matriz identidad. A partir de esta matriz aumentada aplicaremos el método de eliminación para obtener otra matriz de la forma

$$(I|B) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right).$$

La matriz $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ resultante es la inversa de A.

Ejemplo: Si tenemos la siguiente matriz cuadrada $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, entonces, la matriz ampliada por medio de la identidad será

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

A continuación, presentamos las operaciones elementales con filas llevadas a cabo sobre la matriz $(A|I)$.

Fila 2 + $\frac{1}{2}$Fila 1, Fila 3 + $\frac{2}{3}$Fila 2, $\frac{3}{4}$Fila 3, Fila 2 + Fila 3, $\frac{2}{3}$Fila 2, Fila 1 + Fila 2, $\frac{1}{2}$Fila 1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 & 3/4 & 3/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{array}\right)$$

$$(I|A^{-1}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{array}\right)$$

Por tanto, inversa de A será:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Ahora vamos a utilizar el método del adjunto para calcular la inversa. Lógicamente obtendremos el mismo resultado que con el método de Gauss-Jordan.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nótese que $A = A^T$, lo que significa que A es una matriz simétrica.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS:

1. Calcule la inversa de las siguientes matrices utilizando el método de Gauss-Jordan.

a) $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

b) $\boldsymbol{B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

<u>Solución</u>

a)

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Fila 2 – Fila 1, Fila 3 + Fila 2, Fila 2 – Fila 3, Fila 1 + Fila 2, (-1)Fila 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$(B|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Fila 3 – 2Fila 1, Fila 3 - 2Fila 2, Fila 1 + Fila 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calcule la inversa de la matriz A utilizando el método del adjunto.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{7} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$$

<u>Solución</u>

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 54$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 25 & 7 & -1 \\ -9 & -9 & 9 \\ 4 & -14 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25/54 & 7/54 & -1/54 \\ -9/54 & -9/54 & 9/54 \\ 4/54 & -14/54 & 2/54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25/54 & 7/54 & -1/54 \\ -1/6 & -1/6 & 1/6 \\ 2/27 & -7/27 & 1/27 \end{pmatrix}$$

3. Calcule los valores de m para los cuales la matriz A no es inversible.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \boldsymbol{m} \\ \boldsymbol{m} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{6} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

<u>Solución</u>

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 0 \cdot 0 + m \cdot m \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) \cdot 6 - m \cdot 0 \cdot 6 - 1 \cdot (-1)(-1) - 1 \cdot m \cdot 0 =$$

$$= -m^2 - 6 - 1 = -m^2 - 7$$

Si queremos que A no sea inversible su determinante tiene que ser igual a 0.

$$-m^2 - 7 = 0$$

$$m = \pm\sqrt{-7} \notin \mathbb{R}$$

De manera que A es inversible para cualquier valor real de m.

4. Calcule los valores de x para los que la matriz A no es inversible.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{x} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

<u>Solución</u>

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & x & x \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = x \cdot 1 \cdot (-2) - x \cdot (-1) \cdot 3 = -2x + 3x = x$$

Si queremos que A no sea inversible, entonces su determinante tiene que ser igual a 0.

$$x = 0$$

Por tanto, para $\boldsymbol{x = 0}$, la matriz A no es inversible. Es decir, para $x \neq 0$, sí lo es.

Propiedades de la matriz inversa:

- $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$
- La inversa de una matriz, si existe, es única.
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
- $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$

EJERCICIOS:

1. Simplifique cada una de las siguientes expresiones:
a) $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}^{-1})^{-1} \cdot (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}^{-1})$
b) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^2 - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})^2$

Solución

a)

$$(A \cdot B^{-1})^{-1} \cdot (A \cdot B^{-1}) = (B^{-1})^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A \cdot B^{-1} = B \cdot A^{-1} \cdot A \cdot B^{-1}$$
$$= B \cdot I \cdot B^{-1} = B \cdot B^{-1} = I$$

b)

$$(A+B)^2 - (A-B)^2 = (A^2 + AB + BA + B^2) - (A^2 - AB - BA + B^2)$$
$$= A^2 + AB + BA + B^2 - A^2 + AB + BA - B^2 = 2AB + 2BA$$

1. Despeje el valor de la matriz X en cada una de las expresiones siguientes:

a) $\boldsymbol{A \cdot X = B}$
b) $\boldsymbol{X \cdot A = B}$
c) $\boldsymbol{A \cdot X^{-1} = B}$
d) $\boldsymbol{A \cdot X + B = B \cdot X + A}$
e) $\boldsymbol{A(B + X) = A^{-1}}$

Solución

a)

$$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1}(A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \Rightarrow (A^{-1} \cdot A)X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow IX = A^{-1} \cdot B$$
$$\Rightarrow X = A^{-1} \cdot B.$$

b)

$$X \cdot A = B \Rightarrow (X \cdot A)A^{-1} = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X(A \cdot A^{-1}) = B \cdot A^{-1} \Rightarrow XI = B \cdot A^{-1}$$
$$\Rightarrow X = B \cdot A^{-1}$$

c)

$$A \cdot X^{-1} = B \Rightarrow A^{-1} \cdot (A \cdot X^{-1}) = A^{-1} \cdot B \Rightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot X^{-1} = A^{-1} \cdot B \Rightarrow IX^{-1}$$
$$= A^{-1} \cdot B \Rightarrow X^{-1} = A^{-1} \cdot B \Rightarrow (X^{-1})^{-1} = (A^{-1} \cdot B)^{-1} \Rightarrow X$$
$$= (A^{-1} \cdot B)^{-1} \Rightarrow B^{-1} \cdot (A^{-1})^{-1} = B^{-1} \cdot A.$$

d)

$$A \cdot X + B = B \cdot X + A \Rightarrow A \cdot X - B \cdot X = A - B \Rightarrow (A-B)X = A - B$$
$$\Rightarrow (A-B)^{-1}(A-B)X = (A-B)^{-1}(A-B) \Rightarrow IX = I \Rightarrow X = I.$$

e)

$$A(B+X) = A^{-1} \Rightarrow A \cdot B + A \cdot X = A^{-1} \Rightarrow A \cdot X = A^{-1} - A \cdot B \Rightarrow A^{-1}(A \cdot X)$$
$$= A^{-1}(A^{-1} - A \cdot B) \Rightarrow (A^{-1} \cdot A)X = A^{-1}A^{-1} - A^{-1}A \cdot B \Rightarrow IX$$
$$= (A^{-1})^2 - IB \Rightarrow (A^{-1})^2 - B.$$

2. Sean A y B las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$$

Calcule:

a) $|\boldsymbol{AB}|$
b) $|(\boldsymbol{BA})^t|$
c) $|\boldsymbol{2A \cdot 3B}|$

d) $\left|\boldsymbol{ABA^{-1}B}\right|$
e) $\left|\boldsymbol{BB^{-1}}\right|$

<u>Solución</u>

a)

$$|A| = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$|B| = -1(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8$$
$$|AB| = |A| \cdot |B| = 2 \cdot 8 = 16$$

b)
$$|(BA)^t| = |A^t \cdot B^t| = |A^t| \cdot |B^t| = |A| \cdot |B| = 2 \cdot 8 = 16$$

c)
$$|2A \cdot 3B| = |2A| \cdot |3B| = 2^4|A| \cdot 3^4|B| = 16 \cdot 2 \cdot 81 \cdot 8 = 20.736$$

d)
$$|ABA^{-1}B| = |A| \cdot |B| \cdot |A^{-1}| \cdot |B| = 2 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 = 64$$

e)
$$|BB^{-1}| = |I| = 1$$

RANGO DE UNA MATRIZ:

Definición: El rango de una matriz es el máximo número de filas (o columnas) linealmente independientes de la matriz. Recordad que se dice que una fila (o columna) es linealmente independiente cuando no se puede expresar como combinación lineal de las demás. Esto quiere decir que podemos definir el rango de una matriz como el tamaño (o el orden) del determinante más grande de la matriz distinto de cero.

Todas las matrices, independientemente de si son cuadradas o rectangulares, tienen rango.

Supongamos, por ejemplo, que en tenemos una matriz cuadrada $n \times n$ $A_{n\times n}$ cuyo determinante es diferente de 0. Entonces, diremos que la matriz A tiene rango n, y lo denotaremos por $r(A) = n$.

<u>**Ejemplo:**</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2 \neq 0$$

$$r(A) = 2$$

En este caso, tenemos una matriz cuadrada de orden 2, cuyo determinante es distinto de cero. Por tanto, el rango de esta matriz será 2.

Ejemplo 2:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 1 - 4 - 4 - 4 - 3 = -4 \neq 0$$

$$r(A) = 3$$

En este segundo ejemplo, tenemos una matriz 3x3, cuyo determinante es distinto de cero. Por tanto, el rango de esta matriz será 3.

Reglas para el cálculo del rango de una matriz: En los dos ejemplos anteriores, el cálculo del rango ha sido muy sencillo y rápido, pero no siempre sucede así. Por ello, a continuación se presentan unas reglas muy básicas que nos ayudarán en posteriores ejercicios.

- El rango de A^T es el mismo que el de A.
- A la hora de calcular el rango de una matriz podemos eliminar una fila o columna de la misma si:
  - todos sus elementos son 0,
  - hay dos filas o columnas iguales,
  - una de ellas es proporcional a otra,
  - o una de ellas se puede escribir como combinación lineal de las demás.

  Si se diera cualquier punto de los citados anteriormente, entonces podríamos eliminar la fila o columna correspondiente, y seguir calculando determinantes sin tenerla en cuenta.

Ejemplo: Calcule el rango de la matriz A.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{-2} & \mathbf{6} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{5} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

En esta matriz, todos los elementos de la fila 4 son ceros, por lo que podemos eliminar esta fila. Eso significa que esta matriz tendrá un rango menor que 5, ya que, ahora, el determinante más grande que podemos calcular es de orden 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Además, la fila 3 es el doble de la fila 1 y, por consiguiente, también podemos eliminarla. Lo cual nos indica que el rango de la matriz será menor que 4, ya que el determinante más grande que podemos calcular es de orden 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Además, la fila 5 se puede expresar como combinación lineal de las filas 1 y 2. De modo que podemos eliminarla. Por tanto, la matriz A tendrá un rango menor que 3.

$$Fila\ 5 = 2Fila\ 2 + Fila\ 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, la columna 4 se puede expresar como combinación lineal de las columnas 2 y 3.

$$Col. 4 = Col. 2 - Col. 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0$$

De momento, sabemos que el rango de A es, al menos, 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0$$

Por tanto, el $\boldsymbol{r(A) = 2}$.

<u>Ejemplo 2:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -7 \\ 3 & -2 & 1 & 17 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

La columna 3 se puede escribir como combinación lineal de las columnas 1 y 2. Por consiguiente, podemos eliminarla. Eso significa que la matriz A tendrá un rango menor que 4.

$$Col. 3 = Col. 1 + Col. 2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -7 \\ 3 & -2 & 1 & 17 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -7 \\ 3 & -2 & 17 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$|2| = 2 \neq 0$$

Al menos, el $r(A) = 1$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0$$

Al menos, el $r(A) = 2$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot (-7) + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2(-1) - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot (-7) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 17 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -7 \\ 3 & -2 & 17 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -7 \\ 3 & -2 & 17 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -7 \\ 3 & -2 & 17 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

Si continuáramos calculando todos los determinantes de orden 3, veríamos que todos ellos tienen un valor igual a 0. Por lo tanto, $\boldsymbol{r(A) = 2}$.

EJERCICIOS:

1. Calcule el rango de las siguientes matrices:

a) $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}}$

b) $\boldsymbol{B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}}$

c) $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{6} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{9} \end{pmatrix}$

d) $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

e) $\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$

<u>Solución</u>

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$|2| = 2 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 \cdot 7 + 0 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 3 - 0 \cdot 0 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 \cdot 7$$
$$= 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 \cdot 7 + 7 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 \cdot 3 - 7 \cdot 0 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 \cdot 7$$
$$= 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 7 + 7 \cdot 1 \cdot 7 + 0 \cdot 3 \cdot 3 - 7 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 7 - 0 \cdot 1 \cdot 7 = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 7 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot 7 + 7 \cdot 0 \cdot 7 + 0 \cdot 3 \cdot 2 - 7 \cdot 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 3 \cdot 7 - 0 \cdot 0 \cdot 7 = 0$$

$$r(A) = \mathbf{2}$$

b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

La fila 2 es tres veces la fila 1, y por tanto, podemos eliminarla. Además, eso significa que $|B| = 0$. De modo que el rango de B será menor de 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + (-4) \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) \cdot 0 - 1 \cdot 0 \cdot 1 - (-4) \cdot 2 \cdot 3 = 25 \neq 0$$

$$r(B) = \mathbf{3}$$

c)

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

La columna 4 es el triple de la columna 1 y, por ello, podemos eliminarla.

$$Col.4 = 3Col.1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Además, la fila 3 puede expresarse como combinación lineal de las filas 1 y 2 y, por lo tanto, podemos descartarla. Por tanto, rango de esta matriz será como máximo 2.

$$Fila\ 3 = Fila\ 1 - Fila\ 2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|2| = 2 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1 \neq 0$$

$$r(C) = \mathbf{2}$$

Además, Por consiguiente, el rango de la matriz C es 2.

d)

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|3| = 3 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot 1$$
$$= -7 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -99 \neq 0$$

$$r(D) = \mathbf{4}$$

e)

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 6 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

En esta matriz, todos los elementos de la tercera columna son ceros, y además, la cuarta es tres veces la primera, por tanto, podemos eliminar ambas columnas para el cálculo del rango. Eso significa que el rango de la matriz E será menor de 4.

Finalmente, la columna 5 puede expresarse como combinación lineal de las columnas 1 y 2, y por tanto, también podemos eliminarla. Como consecuencia, el rango de E será menor de 3.

$$Col. 5 = -2 \cdot Col. 1 + Col. 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 6 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

$$r(E) = \mathbf{2}$$

2. Determine el rango de la matriz que se presenta a continuación según los distintos valores de c.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \boldsymbol{c} & \mathbf{6} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

<u>Solución</u>

$$|1| = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ c & 6 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2c + 6c - 12 = 4c = 0 \Rightarrow c = 0$$

Si $\boldsymbol{c = 0 \Rightarrow |A| = 0}$ y el $\boldsymbol{r(A) = 2}$.

Si $\boldsymbol{c \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0}$ y el $\boldsymbol{r(A) = 3}$.

1.6 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema de m ecuaciones lineales, con n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, es un conjunto de m ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

dónde los números a_{ij} son los coeficientes del sistema. Diremos que $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ es una solución del sistema si las m ecuaciones verifican $x_1 = x_1^*,\ x_2 = x_2^*, \ldots, x_n = x_n^*$.

Para poder trabajar con sistemas de ecuaciones lineales de gran tamaño los podemos escribir en forma matricial.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Esto es, $Ax = b$.

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES SEGÚN EL Nº DE SOLUCIONES QUE TENGAN:

Los sistemas de ecuaciones lineales pueden tener

- una única solución: en este caso el sistema es <u>COMPATLIBLE DETERMINADO</u>,

- infinitas soluciones: en este caso diremos que el sistema es <u>COMPATIBLE INDETERMINADO</u>, o
- ninguna solución: en este caso el sistema es <u>INCOMPATIBLE</u>.

<u>Ejemplos:</u>

a)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ 4x_1 + 2x_2 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_2 = \dfrac{7-4x_1}{2} \end{cases} \Rightarrow 2x_1 + \frac{7-4x_1}{2} = 5 \Rightarrow 2x_1 + \frac{7}{2} - \frac{4x_1}{2} = 5 \Rightarrow 2x_1 - 2x_1 = 5 - \frac{7}{2} \Rightarrow 0 \neq \frac{3}{2}$$

Este sistema no tiene solución, por lo que es INCOMPATIBLE.

b)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ 4x_2 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_2 = \dfrac{8}{4} = 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 + 2 = 5 \Rightarrow x_1 = 5 - 2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Este sistema tiene una única solución (3; 2). Por tanto, el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.

c)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_2 = \dfrac{8-2x_1}{2} \end{cases} \Rightarrow x_1 + \frac{8-2x_1}{2} = 4 \Rightarrow x_1 + \frac{8}{2} - \frac{2x_1}{2} = 4 \Rightarrow x_1 - x_1 = 4 - 4 \Rightarrow 0 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 4 - x_2 \\ x_2 \end{cases}$$

El sistema anterior tiene infinitas soluciones, ya que todos los vectores de la forma (x_1; 4 - x_1) lo resuelven. Por consiguiente, el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO.

Teorema de Rouché-Frobenius. El Teorema de Rouché-Frobenius nos proporciona un criterio para decidir si el sistema es compatible o incompatible. Y, en caso de ser compatible, cuantos parámetros necesitamos para describir la solución del mismo, es decir, nos permite saber si es compatible determinado o indeterminado. Por ejemplo, considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$$

En el sistema anterior se aprecia fácilmente que la segunda fila es el doble de la primera, y por consiguiente, es redundante. Por ello, el conjunto de soluciones de este sistema será el conjunto de vectores bidimensionales $(x_1;\ x_2)$ que satisfaga la condición $x_1; 2 - x_1$. Para cada valor de x_1 habrá un valor para x_2 que satisfaga las ecuaciones del sistema. Este conjunto, $\{(x_1; 2 - x_1): x_1 \in \mathbb{R}\}$ se puede expresar por medio de un solo parámetro. Diremos, por tanto, que hay un grado de libertad.

El Teorema de Rouché-Frobenius nos dice exactamente cuántos parámetros (grados de libertad) necesitamos para calcular la solución de cualquier sistema lineal.

<u>En general</u>:

- Si el $r(A) \neq r(A|b) \Rightarrow$ El sistema es <u>INCOMPATIBLE</u>.
- Si el $r(A) = r(A|b) = n \Rightarrow$ El sistema es <u>COMPATIBLE DETERMINADO</u>.
- Si el $r(A) = r(A|b) = r < n \Rightarrow$ El sistema es <u>COMPATIBLE INDETERMINADO</u> con $n - r$ grados de libertad.

<u>Ejemplo:</u> Estudie el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \boldsymbol{2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2} \\ \boldsymbol{-x_1 + 2x_2 - x_3 = 1} \\ \boldsymbol{x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 7} \end{cases}.$$

<u>Solución</u>

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|2| = 2 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 4 - (-1) \cdot (-1) \cdot 3 = 0$$

$$r(A) = 2$$

A continuación calculamos el rango de la matriz ampliada.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

$$|2| = 2 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$$

Se puede observar que en la matriz $(A|b)$, la columna 4 se puede expresar como combinación lineal de las columnas 2 y 3. Por lo tanto, podemos eliminar la columna 4, y, por consiguiente, el $r(A|b) = 2$.

$$Col.4 = Col.2 + Col.3$$

$r(A) = r(A|b) = 2 < 3 \Rightarrow$ **COMPATIBLE INDETERMINADO con $\mathbf{3 - 2 = 1}$ grados de libertad.** Esto significa que este sistema tiene infinitas soluciones.

<u>**Ejemplo 2:**</u> **Estudie el siguiente sistema de ecuaciones:**

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 + 2x_2 - x_3 = 2} \\ \boldsymbol{2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6} \\ \boldsymbol{-x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1} \end{cases}$$

<u>Solución</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot (-1) - (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot (-2) = -5 \neq 0$$

$$r(A) = 3$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

$$r(A|b) = 3$$

$r(A) = r(A|b) = 3 \Rightarrow$ **COMPATIBLE DETRMINADO. Por tanto, este sistema tiene una única solución.**

<u>**Ejercicio**</u>**: Estudie el siguiente sistema de ecuaciones lineales utilizando el Teorema de Rouché-Fröbenius teniendo en cuenta los posibles valores de $\boldsymbol{c}$.**

$$\begin{cases} \boldsymbol{cx_1 + x_2 + x_3 = 1} \\ \boldsymbol{x_1 + cx_2 + x_3 = c} \\ \boldsymbol{x_1 + x_2 + cx_3 = 2c} \end{cases}$$

Solución

$$\begin{cases} cx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + cx_2 + x_3 = c \\ x_1 + x_2 + cx_3 = 2c \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} c & 1 & 1 \\ 1 & c & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} c & 1 & 1 \\ 1 & c & 1 \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix} = c^3 + 1 + 1 - c - c - c = c^3 - 3c + 2$$

$$c^3 - 3c + 2 = 0$$

Como hemos obtenido una ecuación de tercer grado tenemos que utilizar Ruffini para calcular sus raíces. Siempre que obtengamos una ecuación de grado mayor que 2 tendremos que utilizar este procedimiento.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ & & -2 & 4 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$c^3 - 3c + 2 = (c+2)(c^2 - 2c + 1)$$

$$c^2 - 2c + 1 = 0$$

$$c = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = 1$$

$$c^3 - 3c + 2 = (c+2)(c-1)(c-1)$$

De modo que si $c \neq -2$ y $c \neq 1$ entonces el determinante de A es diferente de 0 y $r(A) = 3 = r(A|b) = 3 = \text{número de variables } (x_i)$. El sistema es, por tanto, **COMPATIBLE DETERMINADO**, y tiene una única solución.

A continuación, vamos a ver qué pasa cuando $c = -2$.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|-2| = -2 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$$

Sabemos que cuando $c = -2$, entonces el $|A| = 0$, así que no necesitamos calcular este determinante otra vez.

$$r(A) = 2$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

$$|-2| = -2 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -16 + 1 - 2 + 2 - 4 + 4 = -15 \neq 0$$

$$r(A|b) = 3$$

Por consiguiente, cuando $c = -2$, $r(A) = 2 \neq r(A|b) = 3$. Y el sistema es **INCOMPATIBLE**, lo que significa que no tiene solución.

Finalmente, tenemos que estudiar qué pasa cuando $c = 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Todos los menores de orden 2 que podemos encontrar dentro de A son iguales a 0, así que el $r(A) = 1$.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$|1| = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 + 1 - 1 - 1 - 2 = 0$$

$$r(A|b) = 2$$

Cuando $c = 1, r(A) = 1 \neq r(A|b) = 2$, y el sistema es **INCOMPATIBLE**, por lo que no tiene solución.

SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES:

<u>1^er Método:</u> <u>**Reducción por filas o eliminación de Gauss.**</u>

En el método de eliminación por Gauss lo primero que tenemos que hacer es plantear el sistema en forma matricial, y utilizar la matriz aumentada$(A|b)$.

A partir de ahí, modificaremos esta matriz realizando operaciones con filas. El conjunto de soluciones de un sistema se mantiene inalterado al utilizar las operaciones con filas que se presentan a continuación:

- Intercambiar dos filas.
- Multiplicar una fila por una constante.
- Añadir o sustraer a una fila el múltiplo de otra.

Una vez que hemos llevado a cabo estas operaciones, la matriz aumentada que obtenemos nos proporciona un sistema de ecuaciones lineales equivalente al inicial.

<u>**Ejemplo:**</u> **Resuelva el siguiente sistema mediante el método de eliminación de Gauss.**

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 + x_2 + x_3 = 6} \\ \boldsymbol{2x_1 + 4x_2 + x_3 = 5} \\ \boldsymbol{2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6} \end{cases}$$

<u>Solución</u>

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$Fila\ 2 - 2Fila\ 1, \frac{1}{2}Fila\ 2, Fila\ 3 - 2Fila\ 1, Fila\ 3 - Fila\ 2, -2Fila\ 3.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & -7 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 2 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1/2 & -7/2 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1/2 & -7/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -5/2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1/2 & -7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

La matriz aumentada que hemos obtenido finalmente representa el siguiente sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 - \dfrac{1}{2}x_3 = -\dfrac{7}{2} \\ x_3 = 5 \end{cases}$$

Por último, despejamos el valor de todas las variables del sistema para obtener su solución.

$$x_3 = \mathbf{5}$$
$$x_2 = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}x_3 = -\frac{7}{2} + \frac{5}{2} = \mathbf{-1}$$
$$x_1 = 6 - x_2 - x_3 = 6 - (-1) - 5 = \mathbf{2}$$

La solución de este sistema será, por tanto

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

Este sistema tiene una única solución y, por tanto, es **COMPATIBLE DETERMINADO**.

Ejemplo 2:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 + 2x_2 + x_3 = 1} \\ \boldsymbol{2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2} \\ \boldsymbol{3x_1 + 4x_2 + x_3 = 3} \end{cases}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$Fila\ 2 - 2Fila\ 1, Fila\ 3 - 3Fila\ 1, Fila\ 3 - Fila\ 2, -\frac{1}{5}Fila\ 3, -\frac{1}{2}Fila\ 2.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - \dfrac{3}{2}x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Despejando obtenemos

$$x_3 = \mathbf{0}$$
$$x_2 = -\frac{3}{2}x_3 = \mathbf{0}$$
$$x_1 = 1 - 2x_2 - x_3 = 1 - 2 \cdot 0 - 0 = \mathbf{1}$$

La solución de este sistema será, por tanto

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Este sistema tiene una única solución y, por tanto, es **COMPATIBLE DETERMINADO**.
Ejemplo 3:

$$\begin{cases} \boldsymbol{3x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 6} \\ \boldsymbol{x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 4} \\ \boldsymbol{5x_1 + 10x_2 + 15x_3 = 9} \end{cases}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 5 & 6 \\ 1 & 7 & 5 & 4 \\ 5 & 10 & 15 & 9 \end{array}\right)$$

En primer lugar, vamos a intercambiar las filas 1 y 2, para poder obtener un 1 en la primera posición de la primera fila. Y, a continuación, realizaremos las siguientes operaciones con filas.

$$Fila\ 2 - 3Fila\ 1, Fila\ 3 - 5Fila\ 1, -\frac{1}{24}Fila\ 2, Fila\ 3 + 25Fila\ 2, \frac{12}{5}Fila\ 3.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 5 & 6 \\ 1 & 7 & 5 & 4 \\ 5 & 10 & 15 & 9 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 5 & 4 \\ 3 & -3 & 5 & 6 \\ 5 & 10 & 15 & 9 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 5 & 4 \\ 0 & -24 & -10 & -6 \\ 5 & 10 & 15 & 9 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 5 & 4 \\ 0 & -24 & -10 & -6 \\ 0 & -25 & -10 & -11 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 5/12 & 1/4 \\ 0 & -25 & -10 & -11 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 5/12 & 1/4 \\ 0 & 0 & 5/12 & -19/4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 5/12 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -57/5 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 4 \\ x_2 + \dfrac{5}{12}x_3 = \dfrac{1}{4} \\ x_3 = \dfrac{-57}{5} \end{cases}$$

Despejando obtenemos

$$x_3 = \boldsymbol{\frac{-57}{5}}$$

$$x_2 = \frac{1}{4} - \frac{5}{12}x_3 = \frac{1}{4} - \frac{5}{12} \cdot \left(-\frac{57}{5}\right) = \mathbf{5}$$

$$x_1 = 4 - 7x_2 - 5x_3 = 4 - 7 \cdot 5 - 5 \cdot \left(-\frac{57}{5}\right) = \mathbf{26}$$

La solución de este sistema será, por tanto

$$\begin{pmatrix} \mathbf{26} \\ \mathbf{5} \\ \frac{\mathbf{-57}}{\mathbf{5}} \end{pmatrix}$$

Este sistema tiene una única solución y, por tanto, es **COMPATIBLE DETERMINADO**.

Ejemplo 4:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 + x_2 + x_3 = 5} \\ \boldsymbol{4x_1 + 2x_2 + x_3 = 12} \\ \boldsymbol{9x_1 + 3x_2 + x_3 = 23} \end{cases}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 12 \\ 9 & 3 & 1 & 23 \end{array}\right)$$

$Fila\ 2 - 4Fila\ 1, Fila\ 3 - 9Fila\ 1, Fila\ 3 - 3Fila\ 2, -\frac{1}{2}Fila\ 3.$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 12 \\ 9 & 3 & 1 & 23 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \\ 9 & 3 & 1 & 23 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \\ 0 & -6 & -8 & -22 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3/2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ \quad x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 4 \\ \qquad x_3 = 2 \end{cases}$$

Despejando obtenemos

$$x_3 = \mathbf{2}$$
$$x_2 = 4 - \frac{3}{2}x_3 = 4 - \frac{3}{2} \cdot 2 = \mathbf{1}$$
$$x_1 = 5 - x_2 - x_3 = 5 - 1 - 2 = \mathbf{2}$$

La solución de este sistema será, por tanto

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Este sistema tiene una única solución y, por tanto, es **COMPATIBLE DETERMINADO**.

Ejemplo 5:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 + 2x_2 + x_3 = 1} \\ \boldsymbol{2x_1 + 2x_2 = 2} \\ \boldsymbol{3x_1 + 4x_2 + x_3 = 3} \end{cases}$$

$$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\2&2&0&2\\3&4&1&3\end{array}\right)$$

$Fila\ 2-2Fila\ 1, Fila\ 3-3Fila\ 1, Fila\ 3-Fila\ 2, -\dfrac{1}{2}Fila\ 2.$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\2&2&0&2\\3&4&1&3\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\0&-2&-2&0\\3&4&1&3\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\0&-2&-2&0\\0&-2&-2&0\end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\0&-2&-2&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=1\\ \quad x_2+x_3=0\end{cases}$$

Despejando obtenemos

$$x_2=-\boldsymbol{x_3}$$
$$x_1=1-2x_2-x_3=1-2(-x_3)-x_3=\mathbf{1}+\boldsymbol{x_3}$$

La solución de este sistema será, por tanto

$$\begin{pmatrix}\mathbf{1}+\boldsymbol{x_3}\\-\boldsymbol{x_3}\\\boldsymbol{x_3}\end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema anterior vendrá dada en función de la variable x_3, que hemos dejado libre. Es por ello que este sistema tiene infinitas soluciones y es **COMPATIBLE INDETERMINADO** con $3-2=1$ grado de libertad.

Ejemplo 6:

$$\begin{cases}\mathbf{3}\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_2}+\boldsymbol{x_3}=\mathbf{3}\\ \boldsymbol{x_1}-\boldsymbol{x_2}-\boldsymbol{x_3}=\mathbf{1}\\ \boldsymbol{x_1}+\mathbf{2}\boldsymbol{x_2}+\mathbf{2}\boldsymbol{x_3}=\mathbf{1}\end{cases}$$

$$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c}3&1&1&3\\1&-1&-1&1\\1&2&2&1\end{array}\right)$$

En primer lugar, vamos a intercambiar las filas 1 y 2, para poder obtener un 1 en la primera posición de la primera fila. Y, a continuación, realizaremos las siguientes operaciones con filas.

$Fila\ 2-3Fila\ 1, Fila\ 3-Fila\ 1, \frac{1}{4}Fila\ 2, Fila\ 3-3Fila\ 2.$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&1&1&3\\1&-1&-1&1\\1&2&2&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&1\\3&1&1&3\\1&2&2&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&1\\0&4&4&0\\1&2&2&1\end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&1\\0&4&4&0\\0&3&3&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&1\\0&1&1&0\\0&3&3&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\begin{cases}x_1-x_2-x_3=1\\ \quad x_2+x_3=0\end{cases}$$

Despejando obtenemos

$$x_2=-\boldsymbol{x_3}$$
$$x_1=1+x_2+x_3=1+(-x_3)+x_3=\mathbf{1}$$

La solución de este sistema será, por tanto

$$\begin{pmatrix}1\\ -\boldsymbol{x_3}\\ \boldsymbol{x_3}\end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema anterior vendrá dada en función de la variable x_3, que hemos dejado libre. Es por ello que este sistema tiene infinitas soluciones y es **COMPATIBLE INDETERMINADO** con $3-2=1$ grado de libertad.

Ejemplo 7:

$$\begin{cases}\boldsymbol{x_1-x_2+2x_3-x_4=-1}\\ \boldsymbol{2x_1+x_2-2x_3-2x_4=-2}\\ \boldsymbol{-x_1+2x_2-4x_3+x_4=1}\\ \boldsymbol{3x_1-3x_4=-3}\end{cases}$$

$$(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&-1&-1\\2&1&-2&-2&-2\\-1&2&-4&1&1\\3&0&0&-3&-3\end{array}\right)$$

$$Fila\ 2-2Fila\ 1, Fila\ 3+Fila\ 1, Fila\ 4-3Fila\ 1, Fila\ 4-Fila\ 2, \frac{1}{3}Fila\ 2, Fila\ 3-Fila\ 2.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&-1&-1\\2&1&-2&-2&-2\\-1&2&-4&1&1\\3&0&0&-3&-3\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&-1&-1\\0&3&-6&0&0\\-1&2&-4&1&1\\3&0&0&-3&-3\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&-1&-1\\0&3&-6&0&0\\0&1&-2&0&0\\3&0&0&-3&-3\end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&-1&-1\\0&3&-6&0&0\\0&1&-2&0&0\\0&3&-6&0&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&-1&-1\\0&3&-6&0&0\\0&1&-2&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&-1&-1\\0&1&-2&0&0\\0&1&-2&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&-1&-1\\0&1&-2&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Despejando obtenemos

$$x_2 = \mathbf{2x_3}$$
$$x_1 = -1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -1 + 2x_3 - 2x_3 + x_4 = \mathbf{x_4 - 1}$$

La solución de este sistema será, por tanto

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x_4 - 1} \\ \mathbf{2x_3} \\ \mathbf{x_3} \\ \mathbf{x_4} \end{pmatrix}$$

Esto significa que la solución del sistema anterior vendrá dada en función de las variables x_3 y x_4, que son las variables que, en este caso, hemos dejado libres. Es por ello que este sistema tiene infinitas soluciones y es **COMPATIBLE INDETERMINADO** con $4 - 2 = 2$ grados de libertad.

Ejemplo 8:

$$\begin{cases} \mathbf{x_1 - x_2 + x_3 + 2x_5 = 3} \\ \mathbf{x_2 - x_3 = 4} \\ \mathbf{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6} \\ \mathbf{x_1 + 2x_5 = 7} \end{cases}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{array}\right)$$

$$Fila\ 3 - Fila\ 1, Fila\ 4 - Fila\ 1, Fila\ 4 - Fila\ 3, Fila\ 4 - Fila\ 2, Fila\ 3 - 2Fila\ 2, \frac{1}{2}Fila\ 3.$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_5 = 3 \\ x_2 - x_3 = 4 \\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Despejando obtenemos

$$x_3 = -\mathbf{\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5}$$

$$x_2 = 4 + x_3 = 4 - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 = \mathbf{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5}$$

$$x_1 = 3 + x_2 - x_3 - 2x_5 = 3 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 - \left(-\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5\right) - 2x_5 =$$

$$= 3 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 - 2x_5 = \mathbf{7 - 2x_5}$$

La solución de este sistema será, por tanto

$$\begin{pmatrix} \mathbf{7 - 2x_5} \\ \mathbf{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5} \\ \mathbf{-\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5} \\ \mathbf{x_4} \\ \mathbf{x_5} \end{pmatrix}$$

Esto significa que la solución del sistema anterior vendrá dada en función de las variables x_4 y x_5, que son las variables que, en este caso, hemos dejado libres. Es por ello que este sistema tiene infinitas soluciones y es **COMPATIBLE INDETERMINADO** con $4 - 2 = 2$ grados de libertad.

Ejemplo 9:

$$\begin{cases} \mathbf{x_1 + 2x_2 + x_3 = 1} \\ \mathbf{2x_1 + 2x_2 = 2} \\ \mathbf{3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2} \end{cases}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$Fila\ 2 - 2Fila\ 1, Fila\ 3 - 3Fila\ 1, Fila\ 3 - Fila\ 2, -\frac{1}{2}Fila\ 2.$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 0 \neq -1 \end{cases}$$

Este sistema no tiene solución, ya que no hay valores de x_1, x_2 y x_3 que satisfagan la última ecuación. Por lo tanto, el sistema es **INCOMPATIBLE**.

Ejemplo 10:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7} \\ \boldsymbol{x_1 + 2x_3 = -2} \\ \boldsymbol{2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 9} \end{cases}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 7 & 9 \end{array}\right)$$

$Fila\ 2 - Fila\ 1, Fila\ 3 - 2Fila\ 1, Fila\ 3 - \frac{1}{2}Fila\ 2, -\frac{1}{2}Fila\ 2.$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 7 & 9 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & -2 & -9 \\ 2 & 3 & 7 & 9 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & -2 & -9 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 9/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7 \\ x_2 + x_3 = 9/2 \\ 0 \neq -1/2 \end{cases}$$

Este sistema no tiene solución, ya que no hay valores de x_1, x_2 y x_3 que satisfagan la última ecuación. Por consiguiente, el sistema es **INCOMPATIBLE**.

<u>Ejercicio:</u> ¿Para qué valor de *c* es el siguiente sistema de ecuaciones lineales compatible? Encuentre todas las soluciones del sistema para ese valor de *c*.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 + x_2 + x_3 = 2} \\ \boldsymbol{2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5} \\ \boldsymbol{4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = c} \end{cases}$$

<u>Solución</u>

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & c \end{array}\right)$$

$Fila\ 2 - 2Fila\ 1,\ Fila\ 3 - 4Fila\ 1,\ -Fila\ 2\ ,\ Fila\ 3 + Fila\ 2.$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & c-8 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & c-8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & c-9 \end{array}\right)$$

Si queremos que el sistema sea compatible, $c-9$ tiene que ser igual a 0.

$$c-9=0 \Rightarrow c=\mathbf{9}$$

Si $c=9$ el sistema es

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2 \\ x_2=-1 \end{cases}$$

Despejando, obtenemos

$$\boldsymbol{x_3}$$
$$x_2=\mathbf{-1}$$
$$x_1=2-x_2-x_3=2+1-x_3=\mathbf{3}-\boldsymbol{x_3}$$

<u>Otra forma:</u> A continuación lo vamos a resolver utilizando el Teorema de Rouché-Fröbenius.

$$|1|=1\neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1-2=-1\neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}=4+8+6-4-6-8=0$$

$$r(A)=2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & c \end{vmatrix}=c+20+12-8-15-2c=-c+9$$

Para que sea compatible los rangos tienen que ser iguales. Luego $r(A|b)$ tiene que ser igual a 2, y eso quiere decir que el $|A|b|$ tiene que ser igual a 0. Por tanto, $-c+9$ tiene que ser igual a 0.

$$-c+9=0 \Rightarrow c=9$$

De modo que cuando $c=9$ el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO con 1 grado de libertad.

Ahora sólo queda resolver el sistema por Gauss.

$$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 9 \end{array}\right)$$

$Fila\ 2-2Fila\ 1$, $Fila\ 3-4Fila\ 1$, $-Fila\ 2$, $Fila\ 3+Fila\ 2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 9 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 9 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Despejando, obtenemos

$$\boldsymbol{x_3}$$
$$x_2 = \mathbf{-1}$$
$$x_1 = 2 - x_2 - x_3 = 2 + 1 - x_3 = \mathbf{3} - \boldsymbol{x_3}$$

Por lo que la solución del sistema es $\begin{pmatrix} \mathbf{3} - \boldsymbol{x_3} \\ \mathbf{-1} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix}$.

Ejercicio: Resuelva los siguientes sistema de ecuaciones por el método de eliminación de Gauss.

a) $\begin{cases} \boldsymbol{x_1 - x_2 + 5x_3 = 80} \\ \boldsymbol{3x_1 + 2x_2 - x_3 = 25} \\ \boldsymbol{5x_1 + 9x_3 = 185} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \boldsymbol{-x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3} \\ \boldsymbol{2x_1 + 3x_2 - x_3 = 17} \\ \boldsymbol{x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 10} \\ \boldsymbol{x_2 - x_3 = 5} \end{cases}$

Solución

a)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 = 80 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 25 \\ 5x_1 + 9x_3 = 185 \end{cases}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 80 \\ 3 & 2 & -1 & 25 \\ 5 & 0 & 9 & 185 \end{array}\right)$$

$Fila\ 2 - 3Fila\ 1,\ Fila\ 3 - 5Fila\ 1,\ Fila\ 3 - Fila\ 2,\ \frac{1}{5}Fila\ 2.$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 80 \\ 3 & 2 & -1 & 25 \\ 5 & 0 & 9 & 185 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 80 \\ 0 & 5 & -16 & -215 \\ 5 & 0 & 9 & 185 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 80 \\ 0 & 5 & -16 & -215 \\ 0 & 5 & -16 & -215 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 80 \\ 0 & 5 & -16 & -215 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 80 \\ 0 & 1 & -16/5 & -43 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

A continuación, escribimos el sistema resultante y calculamos su solución. Como hemos obtenido una fila de ceros, eso significa que tendremos que dejar una variable libre para escribir la solución. O lo que es lo mismo, el sistema será **COMPATIBLE INDETERMINADO**, con un grado de libertad.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 = 80 \\ x_2 - \frac{16}{5}x_3 = -43 \end{cases}$$

Dejamos libre x_3. Y despejamos el valor de las demás variables en función de ésta.

$$x_2 - \frac{16}{5}x_3 = -43 \Rightarrow x_2 = \mathbf{-43 + \frac{16}{5}x_3}$$
$$x_1 - x_2 + 5x_3 = 80 \Rightarrow x_1 = 80 + x_2 - 5x_3 = 80 - 43 + \frac{16}{5}x_3 - 5x_3 = \mathbf{37 - \frac{9}{5}x_3}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{37 - \frac{9}{5}x_3} \\ \mathbf{-43 + \frac{16}{5}x_3} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 17 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 10 \\ x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 17 \\ 1 & 5 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

En primer lugar, vamos a intercambiar las filas 1 y 3 para tener un 1 en la primera posición de la primera fila de la matriz. Y después, continuaremos simplificando la matriz mediante operaciones con filas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 17 \\ 1 & 5 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 4 & 10 \\ 2 & 3 & -1 & 17 \\ -1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

$Fila\ 2 - 2Fila\ 1$, $Fila\ 3 + Fila\ 1$, $Fila\ 3 + Fila\ 2$, $-\frac{1}{7}Fila\ 2$, $Fila\ 4 - Fila\ 2$, $-\frac{7}{16}Fila\ 4$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 4 & 10 \\ 2 & 3 & -1 & 17 \\ -1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 4 & 10 \\ 0 & -7 & -9 & -3 \\ -1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 4 & 10 \\ 0 & -7 & -9 & -3 \\ 0 & 7 & 9 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 4 & 10 \\ 0 & -7 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 9/7 & 3/7 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 9/7 & 3/7 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -16/7 & 32/7 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 9/7 & 3/7 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

A continuación, escribimos el sistema equivalente.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 10 \\ x_2 + \frac{9}{7}x_3 = \frac{3}{7} \\ 0 = 10 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

En la 3ª fila encontramos una contradicción ya que $0 \neq 10$, y, por tanto, el sistema es **INCOMPATIBLE**, lo que significa que no tiene solución.

2º Método: **Regla de Cramer.**

La Regla de Cramer es el procedimiento que nos permite resolver sistemas de ecuaciones lineales, en el que el valor de cada variable se calcula como el cociente entre dos determinantes.

El primer paso consiste en escribir el sistema en forma matricial $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ donde la matriz $\boldsymbol{A}$ es INVERSIBLE, es decir, su determinante tiene que ser distinto de 0. Si la matriz $\boldsymbol{A}$ no es inversible no podemos utilizar este método.

Si se cumple lo anterior, la Regla de Cramer dice:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, i = 1, 2, \ldots, n$$

dónde A_i es la matriz que obtenemos después de reemplazar la columna i-ésima de A por la matriz columna (vector) *b*.

De modo que, como se puede observar, para cada variable, el denominador es el determinante de la matriz de coeficientes (A), mientras que el numerador es el determinante de una matriz en la cual una de las columnas ha sido reemplazada por la matriz columna de términos constantes ($\boldsymbol{b}$).

Ejemplo: Resuelva el siguiente sistema utilizando la Regla de Cramer:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5} \\ \boldsymbol{3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7} \\ \boldsymbol{2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 8} \end{cases}$$

Solución

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 8 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 24 + 36 + 20 - 24 - 27 = -4 \neq 0$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 7 & 5 & 6 \\ 8 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{5 \cdot 5 \cdot 3 + (-2) \cdot 7 \cdot 4 + 3 \cdot 6 \cdot 8 - (-2) \cdot 5 \cdot 8 - 5 \cdot 6 \cdot 4 - 3 \cdot 7 \cdot 3}{-4} = \frac{60}{-4} = \mathbf{-15}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & 7 & 6 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{1 \cdot 7 \cdot 3 + (-2) \cdot 3 \cdot 8 + 5 \cdot 6 \cdot 2 - (-2) \cdot 7 \cdot 2 - 1 \cdot 6 \cdot 8 - 5 \cdot 3 \cdot 3}{-4} = \frac{-32}{-4} = \mathbf{8}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{1 \cdot 5 \cdot 8 + 5 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 7 \cdot 2 - 5 \cdot 5 \cdot 2 - 1 \cdot 7 \cdot 4 - 3 \cdot 3 \cdot 8}{-4} = \frac{-8}{-4} = \mathbf{2}$$

La solución de este sistema será, por tanto

$$\begin{pmatrix} \mathbf{-15} \\ \mathbf{8} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

<u>Ejemplo 2:</u>

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 + 2x_2 - x_3 = 2} \\ \boldsymbol{2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6} \\ \boldsymbol{-x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1} \end{cases}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 4 - 6 + 1 + 8 - 6 = -5 \neq 0$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-5}{-5} = \mathbf{1}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-10}{-5} = \mathbf{2}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-15}{-5} = \mathbf{3}$$

La solución de este sistema será, por tanto

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

<u>**Ejemplo 3:**</u> **Resuelva el siguiente sistema utilizando la Regla de Cramer:**

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7} \\ \boldsymbol{4x_1 + 5x_2 + x_3 = 11} \\ \boldsymbol{7x_1 - 4x_2 - x_3 = 1} \end{cases}$$

<u>Solución</u>

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 11 \\ 7x_1 - 4x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Tal y como hemos hecho en los dos primeros casos, comprobamos que podemos utilizar este método para resolver el sistema.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 32 + 14 - 70 + 4 + 8 = -81 \neq 0$$

A continuación resolvemos el sistema.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 11 & 5 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & -4 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-35 - 88 + 2 - 10 + 22 + 28}{-81} = \frac{-81}{-81} = \mathbf{1}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 4 & 11 & 1 \\ 7 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & -4 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-11 + 8 + 49 - 154 - 1 + 28}{-81} = \frac{-81}{-81} = \mathbf{1}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 4 & 5 & 11 \\ 7 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & -4 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{5 - 112 + 154 - 245 + 44 - 8}{-81} = \frac{-162}{-81} = \mathbf{2}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

<u>3er Método:</u> <u>**Calculando la inversa.**</u>

Anteriormente, hemos visto que los sistemas de ecuaciones lineales pueden representarse en forma matricial: $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Así, si A es una matriz inversible, podemos despejar el valor de la matriz columna x por medio del cálculo de la inversa de A y, después, resolver el producto resultante.

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Rightarrow A^{-1}A\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} \Rightarrow I\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

<u>**Ejemplo:**</u>

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 + 2x_2 - x_3 = 2} \\ \boldsymbol{2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6} \\ \boldsymbol{-x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1} \end{cases}$$

<u>Solución</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 4 - 6 + 1 + 8 - 6 = -5 \neq 0$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4/5 & -1/5 & -3/5 \\ -2/5 & 3/5 & 4/5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4/5 & -1/5 & -3/5 \\ -2/5 & 3/5 & 4/5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

La solución del sistema será

$$x_1 = \mathbf{1}, x_2 = \mathbf{2}, x_3 = \mathbf{3}$$

<u>Ejemplo 2:</u>

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 + 3x_2 = 2} \\ \boldsymbol{2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1} \\ \boldsymbol{3x_1 + x_2 + x_3 = 5} \end{cases}$$

<u>Solución</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 18 + 0 - 6 - 2 = 12$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/12 & -1/6 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/12 & -1/6 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{9/4} \\ \mathbf{-1/12} \\ \mathbf{-5/3} \end{pmatrix}$$

La solución del sistema será

$$x_1 = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}}, x_2 = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}, x_3 = -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}$$

<u>Ejercicio</u>: Estudie y resuelva el sistema de ecuaciones lineales que se presenta a continuación:

$$\begin{cases} \boldsymbol{(1+a)x+y+z=1} \\ \boldsymbol{x+(1+a)y+z=a} \\ \boldsymbol{x+y+(1+a)z=a^2} \end{cases}$$

<u>Solución</u>

$$A=\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$$

$$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & a \\ 1 & 1 & 1+a & a^2 \end{array}\right)$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}=a^2(a+3)$$

$$a^2(a+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} a+3=0 \Rightarrow a=-3 \\ a^2=0 \Rightarrow a=0 \end{cases}$$

- Si $a \neq -3$ o $a \neq 0$, entonces $|A|=0$ y $r(A)=r(A|b)=3$, luego el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO. El sistema tiene solución y es única.
- Si $a=0$:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1+0 & 1 & 1 \\ 1 & 1+0 & 1 \\ 1 & 1 & 1+0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$|1|=1 \neq 0$$

$$r(A)=1$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1 \neq 0$$

$$r(A|b)=2$$

En este caso, $r(A)=1 \neq r(A|b)=2$. Luego el sistema es **INCOMPATIBLE**, y, por tanto, no tiene solución.

- If $a=-3$:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1-3 & 1 & 1 \\ 1 & 1-3 & 1 \\ 1 & 1 & 1-3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=$$

$$= (-2)(-2)(-2) + 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot(-2)\cdot 1 - (-2)\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot(-2) = 0$$

$$|-2| = -2 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$$

$$r(A) = 2$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2)(-2)\cdot 9 + 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot(-3)\cdot 1 - 1\cdot(-2)\cdot 1 - (-2)\cdot(-3)\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 9 = 21 \neq 0$$

$$r(A|b) = 3$$

El $r(A) = 2 \neq r(A|b) = 3$. Luego, al igual que en el caso anterior, el sistema es **INCOMPATIBLE** y, por tanto, no tiene solución.

A continuación, obtendremos la solución del sistema cuando $a \neq 0$ y $a \neq -3$.

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2(a+3)}\begin{pmatrix} a^2+2a & -a & a \\ -a & a^2+2a & -a \\ a & -a & a^2+2a \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{a^2(a+3)}\begin{pmatrix} a^2+2a & -a & a \\ -a & a^2+2a & -a \\ a & -a & a^2+2a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a^2(a+3)}\begin{pmatrix} a^3+2a \\ 2a^2-a \\ a^4+2a^3+a^2-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a^3+2a}{a^2(a+3)} \\ \dfrac{2a^2-a}{a^2(a+3)} \\ \dfrac{a^4+2a^3+a^2-a}{a^2(a+3)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\dfrac{a^2+2}{a(a+3)}} \\ \boldsymbol{\dfrac{2a-1}{a(a+3)}} \\ \boldsymbol{\dfrac{a^3+2a^2+a-1}{a(a+3)}} \end{pmatrix}$$

2. En el siguiente sistema

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 + x_2 - x_3 = 2} \\ \boldsymbol{x_1 + 2x_2 + x_3 = 3} \\ \boldsymbol{x_1 + x_2 + (a^2-5)x_3 = a} \end{cases},$$

Calcule el valor del parámetro a para que el sistema sea

a) **compatible determinado, y calcule la solución del sistema.**
b) **compatible indeterminado, y calcule todas las soluciones del sistema.**
c) **incompatible.**

Solución

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + (a^2 - 5)x_3 = a \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & (a^2 - 5) \end{pmatrix}$$

$$(A|b) = \left(\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & (a^2 - 5) \end{matrix}\left|\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ a \end{matrix}\right.\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & (a^2 - 5) \end{vmatrix} = 2(a^2 - 5) - 1 + 1 + 2 - 1 - (a^2 - 5) =$$

$$= (a^2 - 5) + 1 = a^2 - 4$$

$$a^2 - 4 = 0$$

$$a = \pm\sqrt{4} = \begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases}$$

$$a^2 - 4 = (a - 2)(a + 2)$$

a) Si $a \neq 2$ y $a \neq -2$, entonces el determinante de A es diferente de 0 y $r(A) = 3 = r(A|b) = 3 = \text{nº de variables } (x_i)$. Por tanto, el sistema es **COMPATIBLE DETERMINADO**.

Ahora, vamos a calcular la solución del sistema utilizando la regla de Cramer.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 1 & (a^2 - 5) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & (a^2 - 5) \end{vmatrix}} = \frac{4(a^2 - 5) - 3 + a + 2a - 2 - 3(a^2 - 5)}{(a - 2)(a + 2)} =$$

$$= \frac{(a^2 - 5) + 3a - 5}{(a - 2)(a + 2)} = \frac{a^2 + 3a - 10}{(a - 2)(a + 2)}$$

$$a^2 + 3a - 10 = 0$$

$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} = \begin{cases} \dfrac{4}{2} = 2 \\ \dfrac{-3-7}{2} = -5 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{a^2 + 3a - 10}{(a-2)(a+2)} = \frac{(a-2)(a+10)}{(a-2)(a+2)} = \frac{\boldsymbol{(a+10)}}{\boldsymbol{(a+2)}}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & a & (a^2-5) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & (a^2-5) \end{vmatrix}} = \frac{3(a^2-5) - a + 2 + 3 - a - 2(a^2-5)}{(a-2)(a+2)} =$$

$$= \frac{(a^2-5) - 2a + 5}{(a-2)(a+2)} = \frac{a^2 - 2a}{(a-2)(a+2)} = \frac{a(a-2)}{(a-2)(a+2)} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{(a+2)}}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & (a^2-5) \end{vmatrix}} = \frac{2a + 2 + 3 - 4 - 3 - a}{(a-2)(a+2)} = \frac{a-2}{(a-2)(a+2)} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{(a+2)}}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{(a+10)}}{\boldsymbol{(a+2)}} \\ \dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{(a+2)}} \\ \dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{(a+2)}} \end{pmatrix}$$

Ahora, vamos a ver qué pasa cuando $a = 2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

Ya sabemos que cuando $a = 2$, el $|A| = 0$, así que no hace falta volver a calcularlo.

$$r(A) = 2$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$|1| = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 2 + 3 - 4 - 3 - 2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 - 3 - 2 + 3 + 2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 4 - 3 - 2 + 3 + 4 = 0$$

Todos los determinantes de tercer orden de $(A|b)$ son iguales a 0. Luego, $r(A|b) = 2$.

b) Así, cuando $a = 2$, $r(A) = 2 = r(A|b) < 3$ (número de variables x_i). Luego, el sistema es **COMPATIBLE INDETERMINADO, con 3 - 2 = 1 grado de libertad**.

El siguiente paso consiste en calcular las infinitas soluciones del sistema. Como $|A| = 0$, en este caso, no podemos aplicar la Regla de Cramer, por tanto, utilizaremos el método de eliminación de Gauss para resolverlo.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$Fila\ 2 - Fila\ 1$, $Fila\ 3 - Fila\ 1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Una vez reducida la matriz ampliada, escribimos el sistema equivalente y lo resolvemos. Al haber obtenido una fila entera de ceros, tendremos que dejar una variable libre para calcular su solución. Eso quiere decir que, en este caso, el sistema es **COMPATIBLE INDETERMINADO**, con 3 – 2 = 1 grado de libertad.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ \quad x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x_3}$$

$$x_2 + 2x_3 = 3 \Rightarrow x_2 = \mathbf{3 - 2}\boldsymbol{x_3}$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 + x_3 = -(3 - 2x_3) + x_3 = \mathbf{3}\boldsymbol{x_3} \mathbf{- 3}$$

La solución del sistema es la siguiente.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{3}\boldsymbol{x_3} - \mathbf{3} \\ \mathbf{3} - \mathbf{2}\boldsymbol{x_3} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix}$$

Finalmente, tenemos que estudiar qué pasa cuando $a = -2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

Anteriormente, vimos como cuando $a = -2$ el $|A| = 0$, de modo que no hace falta volver a calcular su determinante.

$$r(A) = 2$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$|1| = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 2 + 3 - 4 - 3 + 2 = -4 \neq 0$$

$$r(A|b) = 3$$

c) Luego, cuando $a = -2, r(A) = 2 \neq r(A|b) = 3$. Por consiguiente, el sistema es **INCOMPATIBLE** y no tiene solución.

SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Definición: Un sistema de ecuaciones lineales es **homogéneo** si todos sus términos constantes son cero:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Los sistemas homogéneos también se pueden escribir en forma matricial: $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$, donde $\boldsymbol{A}$ es la matriz (*m* × *n*) de coeficientes, $\boldsymbol{x}$ es la matriz columna de (*n*) variables del sistema, y **0** es una matriz columna cuyos (*m*) elementos son todos 0.

Conjunto de soluciones: Los sistemas homogéneos siempre son COMPATIBLES. Todos los sistemas homogéneos tienen al menos una solución, conocida como SOLUCIÓN TRIVIAL, en la que todas las variables son iguales a cero. Si la única solución posible para el sistema es la trivial, entonces el sistema homogéneo será COMPATIBLE DETERMINADO. Si no, será COMPATIBLE INDETERMINADO. Además, el conjunto de soluciones presenta las siguientes propiedades adicionales:

1. Si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son dos vectores que representan, respectivamente, dos soluciones de un sistema homogéneo, entonces el vector suma $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ también es solución del sistema.
2. If $\boldsymbol{u}$ es un vector que representa una solución de un sistema homogéneo, y α es cualquier número (escalar), entonces $\alpha\boldsymbol{u}$ también es solución del sistema.

Ejemplo: Estudie y resuelva el siguiente sistema homogéneo:

$$\begin{cases} \boldsymbol{3x + 2z = 0} \\ \boldsymbol{x + y + z = 0} \\ \boldsymbol{y + z = 0} \end{cases}$$

Solución

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$|3| = 3 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 0 - 3 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \neq 0$$

$$r(A) = 3 = r(A|b)$$

El sistema es **COMPATIBLE DETERMINADO**, y por consiguiente, tiene una única solución. Al tratarse de un sistema homogéneo su solución será la trivial, es decir, aquella en la que todas las variables son iguales a 0.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

<u>Ejemplo 2:</u> Resuelva el siguiente sistema homogéneo.

$$\begin{cases} \mathbf{2x_1 - x_2 + 2x_4 = 0} \\ \mathbf{-x_1 + x_2 - x_3 = 0} \\ \mathbf{2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0} \\ \mathbf{2x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 0} \end{cases}$$

<u>Solución</u>

$Fila\ 4 - Fila\ 1, \frac{1}{2}Fila\ 1,\ Fila\ 2 + Fila\ 1, Fila\ 3 + Fila\ 4, 2Fila\ 2, Fila\ 4 + 2Fila\ 2,$ $-\frac{1}{5}Fila\ 4.$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 6 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6/5 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Una vez que hemos reducido la matriz ampliada por Gauss, escribimos el sistema resultante y despejamos el valor de todas las variables. Al haber una fila de ceros dentro de la matriz, tendremos que dejar una variable libre para poder escribir la solución. Es decir, el sistema será **COMPATIBLE INDETERMINADO** con un grado de libertad.

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_3 - \frac{6}{5}x_4 = 0 \end{cases}$$

Dejando libre la variable $\boldsymbol{x_4}$, la solución será la siguiente

$$x_3 - \frac{6}{5}x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = \boldsymbol{\frac{6}{5}x_4}$$

$$x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \Rightarrow x_2 - 2 \cdot \frac{6}{5}x_4 + 2x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{12}{5}x_4 - 2x_4 = \boldsymbol{\frac{2}{5}x_4}$$

$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_4 = 0 \Rightarrow x_1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}x_4 + x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{5}x_4 - x_4 = -\boldsymbol{\frac{4}{5}x_4}$$

1.7 AUTOVALORES, AUTOVECTORES Y DIAGONALIZACIÓN

Diagonalizar una matriz cuadrada A es encontrar una matriz diagonal D de la forma $D = P^{-1}AP$, o $A = PDP^{-1}$. En la expresión anterior

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

donde $\lambda_1,\ \lambda_2, \dots, \lambda_n$ representan los autovalores de A. P es una matriz formada por los n autovectores de A.

Teorema. Sea A una matriz cuadrada de orden n. Para saber si una matriz A es diagonalizable y si lo es, diagonalizarla, tenemos que seguir los siguientes pasos:

- En primer lugar, tenemos que calcular el <u>POLINOMIO CARACTERÍSTICO</u>.

$$p(\lambda) = |A - \lambda I_n| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

  $p(\lambda)$ es un polinomio de orden n (orden de A).

- En Segundo lugar, tenemos que calcular los valores de λ, que como decíamos antes, son los autovalores de A. Para calcularlos, tenemos que resolver $|A - \lambda I| = 0$.
- A continuación, factorizaremos $p(\lambda)$, o lo que es mismo, obtendremos las raíces del polinomio anterior, es decir calcularemos los valores de λ_i. Y cuando los hayamos calculado, tendremos que escribir el polinomio como sigue:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdot \cdots \cdot (\lambda - \lambda_i)^{k_i},$$

  donde $\lambda_i, i = 1, \dots, k$, pueden ser reales o complejos. Si alguna de las raíces obtenidas es compleja, entonces la matriz no es diagonalizable. Para cada i, los exponentes k_i nos indican las <u>MULTIPLICIDADES ALGEBRAICAS</u> de cada uno de los autovalores λ_i.

- Después, tenemos que encontrar el autovector asociado a cada autovalor. Por ejemplo, para λ_i , calcularemos su correspondiente autovector resolviendo el siguiente sistema.

$$(A-\lambda_i I_n)X = 0$$

Cada uno de estos sistemas tendrá infinitas soluciones distintas de la trivial.

- Para cada uno de los vectores anteriormente calculados tenemos que obtener una base. El número de columnas de la base (dimensión del subespacio) se llama MULTIPLICIDAD GEOMÉTRICA. La matriz será diagonalizable si y sólo si las multiplicidades algebraica y geométrica son iguales. De lo contrario, la matriz no será diagonalizable.

- Por último, tenemos que escribir P, que es una matriz cuadrada de orden n formada por las bases de los autovectores anteriormente calculadas. Si P es inversible y D es la matriz diagonal cuya diagonal principal está formada por los autovalores de A, podemos escribir

$$A = PDP^{-1}.$$

Nótese que la posición de los autovectores en P es idéntica a la posición de los autovalores en D. Esto implica que A es SIMILAR a D. Por tanto, A es diagonalizable.

Ejemplo: Considere la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

Solución

En primer lugar, escribimos el polinomio característico.

$$|A-\lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)+2 = 4-\lambda-4\lambda+\lambda^2+2 = \lambda^2-5\lambda+6$$

$$\lambda^2-5\lambda+6 = 0$$

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-4\cdot 1\cdot 6}}{2} = \frac{5\pm 1}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = \frac{6}{2} = \mathbf{3} \\ \lambda_2 = \frac{4}{2} = \mathbf{2} \end{cases}$$

Por tanto, ya podemos factorizar el polinomio anterior.

$$(\lambda-3)(\lambda-2) = 0$$

Como se puede observar, $\lambda_1 = 3$ tiene multiplicidad algebraica 1 al igual que $\lambda_2 = 2$.

A continuación tenemos que calcular los autovectores.

$\boldsymbol{\lambda_1 = 3}$

$$(A - 3I_n)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 2 \\ -1 & 4-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$Fila\ 2 - 2 \cdot Fila\ 1, -\frac{1}{2} Fila\ 1.$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{x_1}$$

$$x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \boldsymbol{x_1}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_1}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Este autovalor tiene multiplicidad geométrica 1 ya que la base está formada por una sola columna.

$\boldsymbol{\lambda_2 = 2}$

$$(A - 2I_n)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 2 \\ -1 & 4-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$Fila\ 2 - Fila\ 1, -Fila\ 1.$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{x_2}$$

$$x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \boldsymbol{2x_2}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{2x_2} \\ \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_2}\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

La multiplicidad geométrica de este autovalor es 1 ya que la base está formada por una columna.

Luego, en este caso, A es diagonalizable ya que para cada uno de los autovalores anteriores las multiplicidades algebraica y geométrica coinciden (1). Por tanto,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente,

$$P^{-1} = \frac{1}{1-2}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

<u>Ejemplo 2:</u> Considere la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{12} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$$

<u>Solución</u>

En primer lugar, escribimos el polinomio característico.

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 \\ 12 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(7-\lambda) + 24 = -21 + 3\lambda - 7\lambda + \lambda^2 + 24 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = \frac{6}{2} = \mathbf{3} \\ \lambda_2 = \frac{2}{2} = \mathbf{1} \end{cases}$$

Por tanto, ya podemos factorizar el polinomio anterior.

$$(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

Como se puede observar, $\lambda_1 = 3$ tiene multiplicidad algebraica 1 al igual que $\lambda_2 = 1$.

A continuación tenemos que calcular los autovectores.

$\boldsymbol{\lambda_1 = 3}$

$$(A - 3I_n)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} -3-3 & -2 \\ 12 & 7-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$Fila\ 2 + 2 \cdot Fila\ 1, -\frac{1}{6}Fila\ 1.$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -6 & -2 & 0 \\ 12 & 4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{x_1}$$

$$x_1 + \frac{1}{3}x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \boldsymbol{-3x_1}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{-3x_1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{-3} \end{pmatrix}$$

La multiplicidad geométrica de este autovalor es 1 ya que la base está formada por una columna.

$\boldsymbol{\lambda_2 = 1}$

$$(A - I_n)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} -3-1 & -2 \\ 12 & 7-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$Fila\ 2 + 3 \cdot Fila\ 1, -\frac{1}{4}Fila\ 1.$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & -2 & 0 \\ 12 & 6 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{x_1}$$

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \boldsymbol{-2x_1}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{-2x_1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{-2} \end{pmatrix}$$

La multiplicidad geométrica de este autovalor es 1 ya que la base está formada por una columna.

Luego, en este caso, A es diagonalizable ya que para cada uno de los autovalores anteriores las multiplicidades algebraica y geométrica coinciden (1). Por tanto,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

y

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente,

$$P^{-1} = \frac{1}{-2+3}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{12} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$$

<u>Ejemplo 3:</u> Considere la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

<u>Solución</u>

Primero escribimos el polinomio característico de A.

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-2-\lambda)(-1-\lambda)$$

$$(-1-\lambda)^2(-2-\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} (-1-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \mathbf{-1} \\ (-2-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \mathbf{-2} \end{cases}$$

Por tanto, ya podemos factorizar el polinomio anterior.

$$(\lambda+1)^2(\lambda+2) = 0$$

Como se puede observar, $\lambda_1 = -1$ tiene multiplicidad algebraica 2, y $\lambda_2 = -2$ tiene multiplicidad algebraica 1.

A continuación calculamos los autovectores.

$\boldsymbol{\lambda_1 = -1}$

Para comprobar si A es diagonalizable, nos vamos a centrar en el autovalor -1. Los autovectores asociados a -1 vienen dados por el siguiente sistema de ecuaciones.

$$(A + I_n)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1+1 & -1 & 1 \\ 0 & -2+1 & 1 \\ 0 & 0 & -1+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$Fila\ 2 - Fila\ 1, -Fila\ 1.$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{x_1}$$
$$\boldsymbol{x_2}$$
$$x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = \boldsymbol{x_2}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_1}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \boldsymbol{x_2}\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

La multiplicidad geométrica de este autovalor es 2 ya que la base está formada por una columna.

$\boldsymbol{\lambda_2 = -2}$

$$(A + 2I_n)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1+2 & -1 & 1 \\ 0 & -2+2 & 1 \\ 0 & 0 & -1+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$Fila\ 3 - Fila\ 2.$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_3 = \mathbf{0}$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = \boldsymbol{x_2}$$
$$\boldsymbol{x_2}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_2}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

La multiplicidad geométrica de este autovalor es 1 ya que la base está formada por una columna.

Luego, en este caso, A es diagonalizable ya que para cada uno de los autovalores anteriores las multiplicidades algebraica y geométrica coinciden. Por tanto,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente,

$$P^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$P^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4: Considere la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Solución

El polinomio característico de A es

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda - 8$$

$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$$

A continuación utilizamos Ruffini para obtener las raíces.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & -1 & 5 & -2 & -8 \\ & & -2 & 6 & 8 \\ \hline & -1 & 3 & 4 & 0 \end{array}$$

$$\lambda_1 = \mathbf{2}$$

$$(\lambda - 2)(-\lambda^2 + 3\lambda + 4) = 0$$
$$-\lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (-1) \cdot 4}}{-2} = \frac{-3 \pm 5}{-2} = \begin{cases} \lambda_2 = \dfrac{-8}{-2} = \mathbf{4} \\ \lambda_3 = \dfrac{2}{-2} = \mathbf{-1} \end{cases}$$

Por tanto, los autovalores de A son:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \mathbf{2} \\ \lambda_2 = \mathbf{4} \\ \lambda_3 = \mathbf{-1} \end{cases}$$

Como se puede observar, todos los autovalores tienen multiplicidad algebraica 1.

A continuación, calculamos los autovectores.

$\boldsymbol{\lambda_1} = \mathbf{2}$

$$(A - 2I_n)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 2 & 3 \\ 1 & 2-2 & 1 \\ 2 & -2 & 1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, intercambiamos las filas 1 y 2, para tener un 1 en la posición a_{11} de la matriz, y a continuación, utilizaremos operaciones con filas para simplificar el sistema de ecuaciones lo máximo posible.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$Fila\ 3 - 2 \cdot Fila\ 1$, $Fila\ 3 + Fila\ 2$, $\frac{1}{2} Fila\ 2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, la solución del sistema es la siguiente.

$$x_3$$
$$x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{3}{2}x_3$$
$$x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_3$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{-x_3} \\ \boldsymbol{-\frac{3}{2}x_3} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_3} \begin{pmatrix} \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{-\frac{3}{2}} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{-2} \\ \boldsymbol{-3} \\ \boldsymbol{2} \end{pmatrix}$$

La multiplicidad geométrica de este autovalor es 1 ya que la base está formada por una columna.

$\boldsymbol{\lambda_2 = 4}$

$$(A - 4I_n)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2-4 & 2 & 3 \\ 1 & 2-4 & 1 \\ 2 & -2 & 1-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, intercambiamos las filas 1 y 2, para tener un 1 en la posición a_{11} de la matriz, y a continuación, utilizaremos operaciones con filas para simplificar el sistema de ecuaciones lo máximo posible.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$Fila\ 3 + Fila\ 2, Fila\ 2 + 2 \cdot Fila\ 1, -\frac{1}{2}Fila\ 2.$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, la solución del sistema es la siguiente.

$$x_3$$
$$x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{5}{2}x_3$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 2x_2 - x_3 = 5x_3 - x_3 = 4x_3$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{4x_3} \\ \boldsymbol{\frac{5}{2}x_3} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_3} \begin{pmatrix} \boldsymbol{4} \\ \boldsymbol{\frac{5}{2}} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{8} \\ \boldsymbol{5} \\ \boldsymbol{2} \end{pmatrix}$$

La multiplicidad geométrica de este autovalor es 1 ya que la base está formada por una columna.

$\boldsymbol{\lambda_3 = -1}$

$$(A + I_n)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2+1 & 2 & 3 \\ 1 & 2+1 & 1 \\ 2 & -2 & 1+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, intercambiamos las filas 1 y 2, para tener un 1 en la posición a_{11} de la matriz, y a continuación, utilizaremos operaciones con filas para simplificar el sistema de ecuaciones lo máximo posible.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$Fila\ 2 - 3 \cdot Fila\ 1, Fila\ 3 - 2 \cdot Fila\ 1, -\frac{1}{7} Fila\ 2, Fila\ 3 + 8 \cdot Fila\ 2.$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, la solución del sistema es la siguiente.

$$x_3$$
$$x_2 = 0$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -3x_2 - x_3 = -x_3$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{-x_3} \\ \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_3}\begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

La multiplicidad geométrica de este autovalor es 1 ya que la base está formada por una columna.

Luego, en este caso, A es diagonalizable ya que para cada uno de los autovalores anteriores las multiplicidades algebraica y geométrica coinciden. Por tanto,

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -1 \\ -3 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente,

$$P^T = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 8 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|P| = \begin{vmatrix} -2 & 8 & -1 \\ -3 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -10 + 6 + 10 + 24 = 30$$

$$P^{-1} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 5 & -10 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \\ -16 & 20 & 14 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5/30 & -10/30 & 5/30 \\ 3/30 & 0 & 3/30 \\ -16/30 & 20/30 & 14/30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/3 & 1/6 \\ 1/10 & 0 & 1/10 \\ -8/15 & 2/3 & 7/15 \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -1 \\ -3 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/6 & -1/3 & 1/6 \\ 1/10 & 0 & 1/10 \\ -8/15 & 2/3 & 7/15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 32 & 1 \\ -6 & 20 & 0 \\ 4 & 8 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/6 & -1/3 & 1/6 \\ 1/10 & 0 & 1/10 \\ -8/15 & 2/3 & 7/15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{4}{6}+\frac{32}{10}-\frac{8}{15} & \frac{4}{3}+\frac{2}{3} & -\frac{4}{6}+\frac{32}{10}+\frac{7}{15} \\ -1+2 & 2 & -1+2 \\ \frac{4}{6}+\frac{8}{10}+\frac{8}{15} & -\frac{4}{3}-\frac{2}{3} & \frac{4}{6}+\frac{8}{10}-\frac{7}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Propiedades de las matrices similares:

- Si dos matrices son similares, entonces tienen el mismo polinomio característico.
  Ejemplo: Por el ejemplo 3 anterior sabemos que las siguientes matrices son similares.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{1})^{\mathbf{2}}(\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{2})$$

$$|D - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-2-\lambda)(-1-\lambda)$$

$$(-1-\lambda)(-2-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} (-1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \mathbf{-1} \\ (-2-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \mathbf{-2} \\ (-1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \mathbf{-1} \end{cases}$$

Por tanto,

$$|D - \lambda I| = (\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{1})^{\mathbf{2}}(\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{2})$$

- Las matrices similares tienen la misma traza y el mismo determinante.
  Ejemplo: Sabemos que las matrices siguientes son similares.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{-2}$$

$$traza(A) = -1 - 2 - 1 = -4$$

$$|D| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-1)(-2) = \mathbf{-2}$$

$$traza(D) = -1 - 1 - 2 = -4$$

- Si A y D son similares, entonces, A^n y D^n también lo son.
- Si A y D son similares, entonces A^n se puede expresar fácilmente en función de D^n. En efecto, si tenemos que $A = PDP^{-1}$, entonces $A^n = PD^nP^{-1}$. Esta es una de las aplicaciones de la Diagonalización de matrices.

Ejemplo: Calcule $\boldsymbol{A^n}$, $\boldsymbol{A^3}$ y $\boldsymbol{A^2}$.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}$$

<u>Solución</u>

Por el ejemplo 3 anterior sabemos que

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

y

$$D=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

Por consiguiente,

$$A^n=PD^nP^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^n & 0 & 0\\ 0 & (-1)^n & 0\\ 0 & 0 & (-2)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(-1)^n & 0 & (-2)^n\\ 0 & (-1)^n & (-2)^n\\ 0 & (-1)^n & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{(-1)^n} & \boldsymbol{-(-1)^n+(-2)^n} & \boldsymbol{(-1)^n-(-2)^n}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{(-2)^n} & \boldsymbol{(-1)^n-(-2)^n}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{(-1)^n}\end{pmatrix}$$

$$A^3=PD^3P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^3 & 0 & 0\\ 0 & (-1)^3 & 0\\ 0 & 0 & (-2)^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -8\\ 0 & -1 & -8\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1-8 & -1+8\\ 0 & -8 & -1+8\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{-7} & \mathbf{7}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-8} & \mathbf{7}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}$$

Otra forma de calcular A^3:

Ya sabemos que $A^n=\begin{pmatrix}(-1)^n & -(-1)^n+(-2)^n & (-1)^n-(-2)^n\\ 0 & (-2)^n & (-1)^n-(-2)^n\\ 0 & 0 & (-1)^n\end{pmatrix}$. Por tanto,

$$A^3 = \begin{pmatrix} (-1)^3 & -(-1)^3+(-2)^3 & (-1)^3-(-2)^3 \\ 0 & (-2)^3 & (-1)^3-(-2)^3 \\ 0 & 0 & (-1)^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1-8 & -1+8 \\ 0 & -8 & -1+8 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{-7} & \mathbf{7} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-8} & \mathbf{7} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} (-1)^2 & -(-1)^2+(-2)^2 & (-1)^2-(-2)^2 \\ 0 & (-2)^2 & (-1)^2-(-2)^2 \\ 0 & 0 & (-1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1+4 & 1-4 \\ 0 & 4 & 1-4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Ahora vamos a comprobar que efectivamente, los resultados obtenidos parar A^2 y A^3 son correctos.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{-7} & \mathbf{7} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-8} & \mathbf{7} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

<u>Ejemplo 2:</u> Calcule $\boldsymbol{A^n}$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

<u>Solución</u>

Por el ejemplo 4 anterior sabemos que

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -1 \\ -3 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/3 & 1/6 \\ 1/10 & 0 & 1/10 \\ -8/15 & 2/3 & 7/15 \end{pmatrix}$$

y

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente,

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -1 \\ -3 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & -1/3 & 1/6 \\ 1/10 & 0 & 1/10 \\ -8/15 & 2/3 & 7/15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2^{n+1} & 8\cdot 4^n & (-1)(-1)^n \\ -3\cdot 2^n & 5\cdot 4^n & 0 \\ 2^{n+1} & 2\cdot 4^n & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & -1/3 & 1/6 \\ 1/10 & 0 & 1/10 \\ -8/15 & 2/3 & 7/15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2^{n+1} & 2\cdot 4^{n+1} & (-1)^{n+1} \\ -3\cdot 2^n & 5\cdot 4^n & 0 \\ 2^{n+1} & 2\cdot 2^{2n} & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & -1/3 & 1/6 \\ 1/10 & 0 & 1/10 \\ -8/15 & 2/3 & 7/15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2^{n+1} & 2^{2n+3} & (-1)^{n+1} \\ -3\cdot 2^n & 5\cdot 4^n & 0 \\ 2^{n+1} & 2^{2n+1} & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & -1/3 & 1/6 \\ 1/10 & 0 & 1/10 \\ -8/15 & 2/3 & 7/15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{2^{n+1}}{6} + \frac{2^{2n+3}}{10} - \frac{8\cdot(-1)^{n+1}}{15} & \frac{2^{n+1}}{3} + \frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{3} & -\frac{2^{n+1}}{6} + \frac{2^{2n+3}}{10} + \frac{7\cdot(-1)^{n+1}}{15} \\ -\frac{3\cdot 2^n}{6} + \frac{5\cdot 4^n}{10} & \frac{3\cdot 2^n}{3} & -\frac{3\cdot 2^n}{6} + \frac{5\cdot 4^n}{10} \\ \frac{2^{n+1}}{6} + \frac{2^{2n+1}}{10} - \frac{8\cdot(-1)^n}{15} & -\frac{2^{n+1}}{3} + \frac{2\cdot(-1)^n}{3} & \frac{2^{n+1}}{6} + \frac{2^{2n+1}}{10} + \frac{7\cdot(-1)^n}{15} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{2^n}{3} + \frac{2^{2n+2}}{5} - \frac{8(-1)^{n+1}}{15} & \frac{2^{n+1} + 2(-1)^{n+1}}{3} & -\frac{2^n}{3} + \frac{2^{2n+2}}{5} + \frac{7(-1)^{n+1}}{15} \\ -2^{n-1} + 2^{2n-1} & 2^n & -2^{n-1} + 2^{2n-1} \\ \frac{2^n}{3} + \frac{2^{2n}}{5} - \frac{8(-1)^n}{15} & -\frac{2^{n+1} + 2(-1)^n}{3} & \frac{2^n}{3} + \frac{2^{2n}}{5} + \frac{7(-1)^n}{15} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{-5\cdot 2^n + 3\cdot 2^{2n+2} - 8(-1)^{n+1}}{15}} & \boldsymbol{\frac{2^{n+1} + 2(-1)^{n+1}}{3}} & \boldsymbol{\frac{-5\cdot 2^n + 3\cdot 2^{2n+2} + 7(-1)^{n+1}}{15}} \\ \boldsymbol{-2^{n-1} + 2^{2n-1}} & \boldsymbol{2^n} & \boldsymbol{-2^{n-1} + 2^{2n-1}} \\ \boldsymbol{\frac{5\cdot 2^n + 3\cdot 2^{2n} - 8(-1)^n}{15}} & \boldsymbol{\frac{-2^{n+1} + 2(-1)^n}{3}} & \boldsymbol{\frac{5\cdot 2^n + 3\cdot 2^{2n} + 7(-1)^n}{15}} \end{pmatrix}$$

1.8 SIGNO DE UNA FORMA CUADRÁTICA

Definición (FORMA CUADRÁTICA). Sea A una matriz simétrica ($A = A^T$) de orden n y sea x un vector. Entonces, diremos que

$$Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x^T} A \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots$$

es una forma cuadrática.

Ejemplo: Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

y el vector x. $Q(\boldsymbol{x})$ viene dada por

$$Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}} A \boldsymbol{x} = (x_1 \;\; x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1 + 2x_2 \quad 2x_1 + x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$$

Ejemplo 2: escriba en forma polinómica la siguiente forma cuadrática:

$$\boldsymbol{Q(x) = x^T A x = (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}$$

Solución

$$Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}} A \boldsymbol{x} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1 + 3x_2 - 2x_3 \quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 \quad -2x_1 + x_2 - x_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1^2 + 3x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_1x_2 + 2x_2^2 + x_2x_3 - 2x_1x_3 + x_2x_3 - x_3^2 =$$

$$= x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3$$

Nótese que los coeficientes de los términos cuadráticos son los elementos de la diagonal principal de la matriz: $1, 2, -1$. Además, los coeficientes de los términos no cuadráticos son el doble de los elementos que está fuera de la diagonal principal: 6, $-4, 2$. De modo que a partir de ahora, en lugar de hacer el producto de matrices anterior, pasaremos a forma polinómica directamente siguiendo esta regla.

Ejemplo 3: Exprese la siguiente forma polinómica en forma matricial:

$$\boldsymbol{Q(x) = x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_1x_3 - 2x_2x_3}$$

Recuerde que los elementos de la diagonal principal son los coeficientes de los términos cuadráticos: $1, -2, 0$. Para calcular el resto de los elementos de la matriz tenemos que dividir por 2 los coeficientes de los términos no cuadráticos: $0, \frac{3}{2}, -1$. Por tanto,

$$Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}} A \boldsymbol{x} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 3/2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Clasificación de las formas cuadráticas $\boldsymbol{Q(x) = x^T A x}$.

Diremos que una forma cuadrática es:

- DEFINIDA NEGATIVA: si para todo $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow Q(\boldsymbol{x}) < 0$.
- SEMIDEFINIDA NEGATIVA: si para todo $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow Q(\boldsymbol{x}) \leq 0$.
- DEFINIDA POSITIVA: si para todo $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow Q(\boldsymbol{x}) > 0$.
- SEMIDEFINIDA POSITIVA: si para todo $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow\ Q(\boldsymbol{x}) \geq 0$.
- INDEFINIDA: si para algunos $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow\ Q(\boldsymbol{x}) > 0$ y para otros $x \neq 0 \Rightarrow Q(\boldsymbol{x}) < 0$.

<u>Ejemplo:</u> Considere la matriz diagonal de orden 3 D.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

La forma cuadrática asociada a la matriz anterior es

$$Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}} A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2.$$

Nótese que para cualquier vector real $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, $Q(\boldsymbol{x})$ es positive, ya que el cuadrado de cualquier número, independientemente de su signo, siempre es positivo, y los coeficientes de los términos cuadráticos también son positivos. Luego, la suma $x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2$ es siempre positiva.

<u>Ejemplo 2:</u> Considere la siguiente matriz.

$$E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

La forma cuadrática asociada a E es

$$Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}} A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2$$

Nótese que para cualquier vector $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, $Q(\boldsymbol{x})$ es claramente negativa, ya que el cuadrado de cualquier número es siempre positivo, y los coeficientes de los términos cuadráticos son negativos, por lo que $-2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2$ es siempre negativo.

De modo que ya podemos dar una primera regla para calcular el signo de una forma cuadrática. Para calcular el signo de una forma cuadrática asociada a una matriz diagonal, únicamente tenemos que fijarnos en el signo de los elementos de la diagonal principal. Así,

- si todos los elementos de la diagonal principal son positivos, entonces la forma cuadrática es DEFINIDA POSITIVA. **<u>Ejemplo:</u>**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- si todos los elementos de la diagonal principal son positivos ó 0, entonces la forma cuadrática es SEMIDEFINIDA POSITIVA. **Ejemplo:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- si todos los elementos de la diagonal principal son negativos, entonces la forma cuadrática es DEFINIDA NEGATIVA. **Ejemplo:**

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

- si todos los elementos de la diagonal principal son negativos ó 0, entonces la forma cuadrática es SEMIDEFINIDA NEGATIVA. **Ejemplo:**

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

- si en la diagonal principal encontramos elementos positivos y negativos, o positivos, negativos y cero, entonces la forma cuadrática es INDEFINIDA. **Ejemplo:**

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1er Método: Cálculo de los autovalores.

Teorema. Sea A una matriz simétrica de orden n. Entonces, diremos que la forma cuadrática $Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x^T} A\boldsymbol{x}$

- es DEFINIDA POSITIVA si todos los autovalores de A son positivos.
- es SEMIDEFINIDA POSITIVA si todos los autovalores de A son positivos ó 0.
- es DEFINIDA NEGATIVA si todos los autovalores de A son negativos.
- es SEMIDEFINIDA NEGATIVA si todos los autovalores de A son negativos ó 0.
- es INDEFINIDA si A tiene autovalores positivos y negativos, o positivos, negativos y 0.

Ejemplo:

$$Q(\boldsymbol{x}) = -x_1^2 + 2x_2x_3 - x_3^2 = (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, calculamos los autovalores de la matriz.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-\lambda)(-1-\lambda) - (-1-\lambda) =$$

$$= \lambda^2 + \lambda - 1 + \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda = \lambda^3 + 2\lambda^2 - 1$$

Utilizamos Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & & -1 & -1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\lambda_1 = -1 < 0$$

$$= (\lambda + 1)(\lambda^2 + \lambda - 1) = 0$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \begin{cases} \lambda_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0{,}618033989 > 0 \\ \lambda_3 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} = -1{,}61803399 < 0 \end{cases}$$

En este caso, dos autovalores de A son negativos, y uno positivo. Por tanto, la forma cuadrática asociada a dicha matriz es **INDEFINIDA**.

<u>2º Método:</u> Cálculo de los Menores Principales.
Dada una matriz cuadrada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

sus menores principales son

$$\begin{Vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

$$|A_1| = |a_{11}|$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Teorema. Sea A una matriz simétrica de orden n. Entonces, la forma cuadrática asociada a A, $Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}} A\boldsymbol{x}$

- es DEFINIDA POSITIVA si y sólo si todos sus menores principales ordenados de menor a mayor son positivos. Esto es, $|A_1| > 0$, $|A_2| > 0$, $|A_3| > 0, \dots, |A| > 0$.
- es SEMIDEFINIDA POSITIVA si y sólo si todos sus menores principales ordenados de menor a mayor son positivos, menos el último que es 0. Es decir, $|A_1| > 0$, $|A_2| > 0$, $|A_3| > 0, \dots, |A| = 0$.
- es DEFINIDA NEGATIVA si y sólo si todos sus menores principales ordenados de menor a mayor alternan en signo, empezando por negativo. Esto es, $|A_1| < 0$, $|A_2| > 0$, $|A_3| < 0, \dots$
- es SEMIDEFINIDA NEGATIVA si y sólo si todos sus menores principales ordenados de menor a mayor alternan en signo, empezando por negativo, menos el último que es 0. Es decir, $|A_1| < 0$, $|A_2| > 0$, $|A_3| < 0, \dots, |A| = 0$.
- es INDEFINIDA si el ultimo menor principal es distinto de 0, y no es ni DEFINIDA POSITVA, ni DEFINIDA NEGATIVA. Esto es, $|A| \neq 0$ y $Q(\boldsymbol{x})$ no es DEFINIDA.
- es INDEFINIDA si todos los menores principales son distintos de 0 menos el último, y no es ni DSEMIDEFINIDA POSITIVA, ni SEMIDEFINIDA NEGATIVA. Es decir, $|A_i| \neq 0, |A| = 0$ y $Q(\boldsymbol{x})$ no es SEMIDEFINIDA.
- En cualquier otro caso, este criterio no decide.

<u>Ejemplo 1:</u> **Considere la siguiente matriz.**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{9} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

$$Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}} A\boldsymbol{x} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 4x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2$$

$$|A_1| = |4| = 4 > 0$$

A continuación, calculamos el siguiente menor principal de orden 2.

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 36 - 4 = 32 > 0$$

Por último, calculamos el determinante de toda la matriz.

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 9 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64 > 0$$

En este caso, todos los menores principales de A son positivos. Luego, $Q(\boldsymbol{x})$ es **DEFINIDA POSITIVA**.

<u>Ejemplo 2:</u> Considere la siguiente matriz.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \end{pmatrix}$$

$$Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x^T} A \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$$

$$|A_1| = |2| = 2 > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 48 - 16 - 32 = 0$$

$Q(\boldsymbol{x})$ es, por tanto, **SEMIDEFINIDA POSITIVA**.

<u>Ejemplo 3:</u> Considere la siguiente matriz.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

$$Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x^T} A \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2$$

$$|A_1| = |1| = 1 > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

En este caso, todos los menores principales de A son positivos, menos el último que es 0. Por consiguiente, $Q(\boldsymbol{x})$ es **SEMIDEFINIDA POSITIVA**.

<u>Ejemplo 4:</u> Considere la siguiente matriz.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{-4} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

$$Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x^T} A \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= -4x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

$$|A_1| = |-4| = -4 < 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 16 - 4 = 12 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

En este ejemplo, los menores principales de A alternan en signo empezando por negativo, menos el último, que es 0. So, $Q(\boldsymbol{x})$ es **SEMIDEFINIDA NEGATIVA**.

<u>Ejercicio:</u> Estudie el signo de las siguientes formas cuadráticas utilizando el método de los menores principales.

a) $\boldsymbol{Q(x) = x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1x_2}$

b) $\boldsymbol{Q(x) = -x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1x_2 - x_3^2 - 2x_2x_3}$

c) $\boldsymbol{Q(x) = -2x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_3 - x_2x_3}$

<u>Solución</u>

a)

$$Q(\boldsymbol{x}) = x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1x_2 = (x_1 \;\; x_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$|A_1| = |1| = 1 > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 4 = -6 < 0$$

En este caso, $|A| \neq 0$, y $Q(\boldsymbol{x})$ no es DEFINIDA, por lo que $Q(\boldsymbol{x})$ es **INDEFINIDA**.

b)

$$Q(\boldsymbol{x}) = -x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1x_2 - x_3^2 - 2x_2x_3 = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$|A_1| = |-1| = -1 < 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 1 + 1 = -1 < 0$$

En este caso, los menores principales de A alternan en signo empezando por negativo. Por tanto, $Q(\boldsymbol{x})$ es **DEFINIDA NEGATIVA**.

c)

$$Q(\boldsymbol{x}) = -2x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_3 - x_2x_3 = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$|A_1| = |0| = 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + 1 = 1 > 0$$

En este caso, $|A| \neq 0$ y $Q(\boldsymbol{x})$ no es DEFINIDA, luego es **INDEFINIDA**.

EJERCICIOS:

1. **Exprese la siguiente forma cuadrática en forma polinómica y estudie su signo.**

$$\boldsymbol{Q(x) = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}$$

<u>Solución</u>

$$Q(\boldsymbol{x}) = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

<u>Utilizando el método de los menores principales se tiene:</u>

$$|A_1| = |0| = 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 > 0$$

En este caso, $|A| \neq 0$ y $Q(\boldsymbol{x})$ no es DEFINIDA. Por tanto, es **INDEFINIDA**.

<u>Utilizando el método de los autovalores se tiene:</u>

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(-\lambda)(-\lambda) + 1 + 1 + \lambda + \lambda + \lambda = -\lambda^3 + 3\lambda + 2$$

$$-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$$

Utilizamos Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ & & 1 & -1 & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \hline -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\lambda_1 = -1 < 0$$

$$-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(-\lambda^2 + \lambda + 2) = 0$$

$$-\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{-2} = \begin{cases} \lambda_2 = \dfrac{-1+3}{-2} = -1 < 0 \\ \lambda_3 = \dfrac{-1-3}{-2} = 2 > 0 \end{cases}$$

En este caso, se obtiene un autovalor negativo, que se repite dos veces, y otro positivo. Por tanto, $Q(\boldsymbol{x})$ es **INDEFINIDA**. Obviamente, se obtiene el mismo resultado utilizando ambos métodos.

2. Exprese las siguientes formas cuadráticas en forma matricial y estudie su signo.

a) $\boldsymbol{Q(x) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2}$**.**

b) $\boldsymbol{Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + x_3^2}$**.**

c) $\boldsymbol{Q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4 + x_1x_3}$**.**

Solución

a)

$$Q(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 2 & -3/2 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Utilizando el método de los menores principales se tiene:

$$|A_1| = |2| = 2 > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & -3/2 \\ -3/2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 < 0$$

En este caso, $|A| \neq 0$ y $Q(\boldsymbol{x})$ no es DEFINIDA. Por tanto, es **INDEFINIDA**.

Utilizando el método de los autovalores se tiene:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3/2 \\ -3/2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 3 = 2 - 2\lambda - \lambda + \lambda^2 - 3 = \lambda^2 - 3\lambda - 1$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{3 + \sqrt{13}}{2} = 3{,}30277564 > 0 \\ \lambda_2 = \dfrac{3 - \sqrt{13}}{2} = -0{,}30277564 < 0 \end{cases}$$

En este caso, obtenemos un autovalor positivo y otro negativo. Por consiguiente la forma cuadrática anterior es **INDEFINIDA**.

b)

$$Q(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + x_3^2 = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Utilizando el método de los menores principales se tiene:

$$|A_1| = |1| = 1 > 0$$
$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

En este caso, $|A_1| > 0$, $|A_2| > 0$, $|A_3| = |A| = 0$. Por tanto, es **SEMIDEFINIDA POSITIVA**.

Utilizando el método de los autovalores se tiene:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda) - (1-\lambda) =$$

$$= (1 - 2\lambda + \lambda^2)(1-\lambda) - (1-\lambda) = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - \lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 - 1 + \lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow (-\lambda^2 + 3\lambda - 2)\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ -\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 \end{cases}$$

$$-\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2)}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = \dfrac{-2}{-2} = 1 > 0 \\ \lambda_3 = \dfrac{-4}{-2} = 2 > 0 \end{cases}$$

En este caso, obtenemos dos autovalores positivos y uno igual a 0, por lo que $Q(\boldsymbol{x})$ es **SEMIDEFINIDA POSITIVA**.

c)

$$Q(\boldsymbol{x}) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4 + x_1x_3 =$$

$$= (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4)\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

<u>Utilizando el método de los menores principales se tiene:</u>

$$|A_1| = |0| = 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} < 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} > 0$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{vmatrix}$$

$Fila\ 3 - Fila\ 2$, $Fila\ 4 - Fila\ 2$, $2 \cdot Fila\ 2$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{8} < 0$$

En este caso, $|A| \neq 0$ y $Q(\boldsymbol{x})$ no es DEFINIDA. Por tanto, es **INDEFINIDA**.

3. Calcule el valor de a para que la siguiente forma cuadrática sea positiva.

$$\boldsymbol{Q(x) = 5x_1^2 + x_2^2 + ax_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3.}$$

<u>Solución</u>

$$Q(\boldsymbol{x}) = 5x_1^2 + x_2^2 + ax_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 =$$

$$= (x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$|A_1| = |5| = 5 > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = 5a - 2 - 2 - 1 - 5 - 4a > 0$$

$$5a - 2 - 2 - 1 - 5 - 4a > 0$$

$$a - 10 > 0$$

$$a > -10$$

Por tanto, $Q(\boldsymbol{x})$ es DEFINIDA POSITIVA cuando $\boldsymbol{a > -10}$.

FORMAS CUADRÁTICAS RESTRINGIDAS:

Es frecuente plantearse el estudio del signo de una forma cuadrática “no libre” sino restringida a un subespacio. Las formas cuadráticas restringidas han de satisfacer ciertas condiciones.

Si la forma cuadrática es Definida Positiva, Definida Negativa en todo el espacio, es lógico que lo sea en una parte del mismo. Pero si la forma cuadrática es Semidefinida Positiva, Semidefinida Negativa o Indefinida, se ha de proceder al estudio del signo de la restringida. Es decir:

- Si $\forall \boldsymbol{x}\ (x \neq 0), Q(\boldsymbol{x}) > 0 \rightarrow A$ es DEFINIDA POSITIVA en todo el espacio.
- Si $\forall \boldsymbol{x}\ (x \neq 0), Q(\boldsymbol{x}) < 0 \rightarrow A$ es DEFINIDA NEGATIVA en todo el espacio.
- En cualquier otro caso, tendríamos que calcular el signo de la forma cuadrática restringida al subespacio correspondiente.

Cuando una forma cuadrática está restringida a un subespacio la restricción viene dada por un sistema de ecuaciones lineal homogéneo. (Recuerde que en un sistema homogéneo los términos independientes son cero). Es decir,

$$Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}} A\boldsymbol{x}$$
$$s.a.\ BX = 0$$

Procedimiento de reducción de la Forma Cuadrática:
Supongamos que este sistema posee m ecuaciones. En este sistema existen menos ecuaciones que incógnitas ($m < n$). Por lo que al resolver el sistema, la solución va a quedar en función de $m - n$ variables.

Una vez que hemos obtenido la solución del sistema, se substituye en la forma cuadrática $Q(x)$ y se tiene:

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = Q(x_{m+1}, \dots, x_n) = x^{T^*}A'x^*,$$

donde $Dim(A') < Dim(A)$.

La forma cuadrática obtenida, $Q(x_{m+1}, \dots, x_n)$ es libre, y podemos estudiar su signo normalmente.

Ejemplo 1: **Sea**

$$\boldsymbol{Q(x) = (x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$$
$$\boldsymbol{s.a. \;\; 2x_1 + x_2 = 0}$$

Calcule el signo de $\boldsymbol{Q(x)}$.
Solución

En primer lugar, tenemos que obtener el signo de la forma cuadrática sin restringir. Para ello, vamos a utilizar el método de los menores principales.

$$|A_1| = |1| = 1 > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

Como el primero el positivo y el determinante de toda la matriz es 0, la forma cuadrática anterior sin considerar la restricción es Semidefinida Positiva. Por tanto, tenemos que continuar.

Teniendo en cuenta la restricción:

$$2x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2x_1$$

Por lo que

$$Q(\boldsymbol{x}) = (x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2$$

$$Q(\boldsymbol{x}^*) = x_1^2 + 4(-2x_1)^2 - 4x_1(-2x_1) = 25x_1^2 > 0$$

Luego $Q(\boldsymbol{x})$ restringida al subespacio dado por $2x_1 + x_2 = 0$ es **DEFINIDA POSITIVA.**

Ejemplo 2: **Sea**

$$\boldsymbol{Q(x) = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}$$
$$\boldsymbol{s.a. \;\; x_1 - x_2 + x_3 = 0}$$

Calcule el signo de $\boldsymbol{Q(x)}$.

Solución

Al igual que en el ejemplo anterior, lo primero que tenemos que hacer es obtener el signo de la forma cuadrática sin restringir. Para ello, vamos a utilizar el método de los menores principales.

$$|A_1| = |-4| = -4 < 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 16 - 4 = 12 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Como los menores principales alternan en signo empezando por negativo y el último (determinante de toda la matriz) es 0, la forma cuadrática anterior sin considerar la restricción es Semidefinida Negativa. Por tanto, tenemos que continuar.

Teniendo en cuenta la restricción:

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = x_1 + x_3$$

Por lo que

$$\begin{aligned} Q(\boldsymbol{x}) &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= -4x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(\boldsymbol{x}^*) = {} & -4x_1^2 - 4(x_1 + x_3)^2 - x_3^2 - 4x_1(x_1 + x_3) + 2x_1x_3 + 4(x_1 + x_3)x_3 \\ & = -4x_1^2 - 4x_1^2 - 4x_3^2 - 8x_1x_3 - x_3^2 - 4x_1^2 - 4x_1x_3 + 2x_1x_3 + 4x_1x_3 \\ & + 4x_3^2 = -12x_1^2 - x_3^2 - 6x_1x_3 = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A' = \begin{pmatrix} -12 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |A'_1| = |-12| = -12 < 0 \\ |A'_2| = \begin{vmatrix} -12 & -3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 12 - 9 = 3 > 0 \end{cases}$$

Luego $Q(\boldsymbol{x})$ restringida al subespacio dado por $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ es **DEFINIDA NEGATIVA** (ya que los menores principales alternan en signo empezando por negativo).

<u>Ejemplo 3:</u> Sea

$$\boldsymbol{Q(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{s.a.} \ \begin{cases} \boldsymbol{x_1 - x_2 = 0} \\ \boldsymbol{x_1 + x_2 + x_3 = 0} \end{cases}$$

Calcule el signo de $\boldsymbol{Q(x)}$.

<u>Solución</u>

Al igual que en los ejemplos anteriores, lo primero que tenemos que hacer es obtener el signo de la forma cuadrática sin restringir. Para ello, vamos a utilizar el método de los menores principales.

$$|A_1| = |2| = 2 > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 1 = 9 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Como los menores principales son todos positivos menos el último (determinante de toda la matriz) que es 0, la forma cuadrática anterior sin considerar la restricción es Semidefinida Positiva. Por tanto, tenemos que continuar.

Teniendo en cuenta las restricciones:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} x_1 = x_2 \\ x_2 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = -2x_2 \end{array}$$

Por lo que

$$Q(\boldsymbol{x}) = (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

$$Q(\boldsymbol{x}^*) = 2(x_2)^2 + 5x_2^2 + (-2x_2)^2 + 2x_2x_2 + 2x_2(-2x_2) + 4x_2(-2x_2) = x_2^2 > 0$$

Luego $Q(\boldsymbol{x})$ restringida al subespacio dado por $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ es **DEFINIDA POSITIVA**.

<u>Ejemplo 4:</u> Sea

$$\boldsymbol{Q(x) = (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}$$
$$\boldsymbol{s.a. \;\; x_1 - x_2 - x_3 = 0}$$

Calcule el signo de $\boldsymbol{Q(x)}$.

<u>Solución</u>

Primero vamos a calcular el signo de la forma cuadrática sin restringir. Para ello, vamos a utilizar el método de los menores principales.

$$|A_1| = |3| = 3 > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 1 = 8 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Como todos los menores principales son positivos menos el último (determinante de toda la matriz) que es 0, la forma cuadrática anterior sin considerar la restricción es Semidefinida Positiva. Por tanto, tenemos que continuar.

Teniendo en cuenta la restricción:

$$x_1 - x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 + x_3$$

Por lo que

$$Q(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

$$Q(\boldsymbol{x}^*) = 3(x_2 + x_3)^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2(x_2 + x_3)x_2 - 4(x_2 + x_3)x_3 + 4x_2x_3 = 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3 = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |A'_1| = |4| = 4 > 0 \\ |A'_2| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0 \end{cases}$$

Luego $Q(\boldsymbol{x})$ restringida al subespacio dado por $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ sigue siendo **SEMIDEFINIDA POSITIVA**.

<u>**Ejemplo 5:**</u> **Sea**

$$\boldsymbol{Q(x)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{-5} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-5} & \boldsymbol{-3} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{s.a.} \quad \begin{cases} \boldsymbol{2x_1 + x_3 = 0} \\ \boldsymbol{4x_1 - 2x_2 - x_3 = 0} \end{cases}$$

Calcule el signo de $\boldsymbol{Q(x)}$.

<u>Solución</u>

Primero vamos a calcular el signo de la forma cuadrática sin restringir. Para ello, vamos a utilizar el método de los menores principales.

$$|A_1| = |-5| = -5 < 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 25 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -3 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Como los menores principales alternan en signo empezando por negativo, menos el último (determinante de toda la matriz) que es 0, la forma cuadrática anterior sin considerar la restricción es Semidefinida Negativa. Por tanto, tenemos que continuar.

Teniendo en cuenta las restricciones:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} x_3 = -2x_1 \\ 4x_1 - 2x_2 - (-2x_1) = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_2 = 3x_1 \end{array}$$

Por lo que

$$Q(\boldsymbol{x}) = (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -3 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -5x_1^2 - 5x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

$$Q(\boldsymbol{x}^*) = -5x_1^2 - 5(3x_1)^2 - 2(-2x_1)^2 + 2x_1(-2x_1) - 6 \cdot 3x_1 \cdot (-2x_1) = -26x_1^2 < 0$$

Luego $Q(\boldsymbol{x})$ restringida al subespacio dado por $\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ es **DEFINIDA NEGATIVA**.

1.9 HOJAS DE EJERCICIOS

A continuación, se presentan cinco hojas de ejercicios relacionadas con los conceptos que se han tratado a lo largo de este tema, y que deberán ser resueltas por los alumnos.

HOJA 1: ESPACIOS Y SUBESPACIOS VECTORIALES Y APLICACIONES LINEALES

1. Exprese $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ como combinación lineal de $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{4}$ y $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{3}$.

a) $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{4}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{13}\boldsymbol{x} + \mathbf{18}$.

b) $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{5}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{4}\boldsymbol{x} + \mathbf{5}$.

c) $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{4}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{6}\boldsymbol{x} - \mathbf{1}$.

Solución

a) $\boldsymbol{u}(x) = 4x^2 + 13x + 18.$

$$\boldsymbol{u}(x) = \alpha \cdot \boldsymbol{v}(x) + \beta \cdot \boldsymbol{w}(x)$$

$$4x^2 + 13x + 18 = \alpha(2x^2 + 3x + 4) + \beta(x^2 - 2x - 3)$$

$$4x^2 + 13x + 18 = \alpha 2x^2 + \alpha 3x + 4\alpha + \beta x^2 - \beta 2x - 3\beta$$

$$4x^2 + 13x + 18 = (2\alpha + \beta)x^2 + (3\alpha - 2\beta)x + (4\alpha - 3\beta)$$

Identificando coeficientes obtenemos el siguiente sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 4 \\ 3\alpha - 2\beta = 13 \\ 4\alpha - 3\beta = 18 \end{cases}$$

De donde se obtiene que $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{3}$ y $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{-2}$.

$$\boldsymbol{u}(x) = 3 \cdot \boldsymbol{v}(x) - 2 \cdot \boldsymbol{w}(x)$$

b) $\boldsymbol{u}(x) = 5x^2 + 4x + 5.$

$$\boldsymbol{u}(x) = \alpha \cdot \boldsymbol{v}(x) + \beta \cdot \boldsymbol{w}(x)$$

$$5x^2 + 4x + 5 = \alpha(2x^2 + 3x + 4) + \beta(x^2 - 2x - 3)$$

$$5x^2 + 4x + 5 = \alpha 2x^2 + \alpha 3x + 4\alpha + \beta x^2 - \beta 2x - 3\beta$$

$$5x^2 + 4x + 5 = (2\alpha + \beta)x^2 + (3\alpha - 2\beta)x + (4\alpha - 3\beta)$$

Identificando coeficientes obtenemos el siguiente sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 5 \\ 3\alpha - 2\beta = 4 \\ 4\alpha - 3\beta = 5 \end{cases}$$

De donde se obtiene que $\boldsymbol{\alpha = 2}$ y $\boldsymbol{\beta = 1}$.

$$\boldsymbol{u}(x) = 2 \cdot \boldsymbol{v}(x) + \boldsymbol{w}(x)$$

c) $\boldsymbol{u}(x) = 4x^2 - 6x - 1$.

$$\boldsymbol{u}(x) = \alpha \cdot \boldsymbol{v}(x) + \beta \cdot \boldsymbol{w}(x)$$

$$4x^2 - 6x - 1 = \alpha(2x^2 + 3x + 4) + \beta(x^2 - 2x - 3)$$

$$4x^2 - 6x - 1 = \alpha 2x^2 + \alpha 3x + 4\alpha + \beta x^2 - \beta 2x - 3\beta$$

$$4x^2 - 6x - 1 = (2\alpha + \beta)x^2 + (3\alpha - 2\beta)x + (4\alpha - 3\beta)$$

Identificando coeficientes obtenemos el siguiente sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 4 \\ 3\alpha - 2\beta = -6 \Rightarrow \\ 4\alpha - 3\beta = -1 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \alpha = \dfrac{4-\beta}{2} = 2 - \dfrac{\beta}{2} \\ \left(2 - \dfrac{\beta}{2}\right)3 - 2\beta = -6 \\ 6 - \dfrac{3\beta}{2} - 2\beta = -6 \\ -\dfrac{7\beta}{2} = -12 \\ \beta = \dfrac{24}{7} \\ \alpha = 2 - \dfrac{\frac{24}{7}}{2} = 2 - \dfrac{24}{14} = \dfrac{28-24}{14} = \dfrac{4}{14} = \dfrac{2}{7} \\ 4 \cdot \dfrac{2}{7} - 3 \cdot \dfrac{24}{7} \neq -1 \\ \dfrac{8}{7} - \dfrac{72}{7} \neq -1 \\ -\dfrac{64}{7} \neq -1 \end{array}$$

En este caso, la tercera ecuación no se verifica, lo que hace que el sistema de ecuaciones anterior sea incompatible, o lo que es lo mismo, que no tenga solución. Por tanto, $\boldsymbol{u}(x)$ **no se puede escribir como combinación lineal de** $\boldsymbol{v}(x)$ **y** $\boldsymbol{w}(x)$.

2. **Determine si los siguientes conjuntos de vectores de $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes o independientes.**
   - **a)** $\boldsymbol{(1,-2,1); (2,1,-1); (7,-4,1)}$.
   - **b)** $\boldsymbol{(1,-3,7); (2,0,-6); (3,-1,-1); (2,4,-5)}$.
   - **c)** $\boldsymbol{(1,2,-3); (1,-3,2); (2,-1,5)}$.
   - **d)** $\boldsymbol{(2,-3,7); (0,0,0); (3,-1,-4)}$.
   - **e)** $\boldsymbol{(1,1,1); (1,-1,5)}$.

f) $(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1});(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3});(\mathbf{2},-\mathbf{1},\mathbf{1})$.
g) $(\mathbf{2},\mathbf{2},-\mathbf{1});(\mathbf{4},\mathbf{2},-\mathbf{2})$.

Solución

Para que un conjunto de vectores sea LINEALMENTE INDEPENDIENTE la ecuación vectorial $k_1\cdot\boldsymbol{v_1}+k_2\cdot\boldsymbol{v_2}+k_3\cdot\boldsymbol{v_3}+\cdots+k_n\cdot\boldsymbol{v_n}=\mathbf{0}$ únicamente puede tener una solución, la trivial, en la que todos los $k_i=0$. En caso contrario, el conjunto de vectores será LINEALMENTE DEPENDIENTE.

a) $(1,-2,1);(2,1,-1);(7,-4,1)$

$$\alpha(1,-2,1)+\beta(2,1,-1)+\gamma(7,-4,1)=(0,0,0)$$

$$\begin{cases}\alpha+2\beta+7\gamma=0\\-2\alpha+\beta-4\gamma=0\\\alpha-\beta+\gamma=0\end{cases}\Rightarrow\begin{array}{c}\alpha=\beta-\gamma\\\beta-\gamma+2\beta+7\gamma=0\\3\beta+6\gamma=0\\\beta=-2\gamma\\\alpha=\beta-\gamma=-2\gamma-\gamma=-3\gamma\\-2(-3\gamma)-2\gamma-4\gamma=0\\0=0\end{array}\Rightarrow\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\beta}\\\boldsymbol{\gamma}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\mathbf{3}\boldsymbol{\gamma}\\-\mathbf{2}\boldsymbol{\gamma}\\\boldsymbol{\gamma}\end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones anterior tiene infinitas soluciones (por cada valor que demos a γ, habrá un valor para α y para β), por lo que el conjunto de vectores que estamos estudiando es **linealmente dependiente**.

b) $(1,-3,7);(2,0,-6);(3,-1,-1);(2,4,-5)$

Este conjunto de vectores es **linealmente dependiente** ya que el número de vectores del conjunto (4) es mayor que la dimensión del espacio (3, porque los vectores tienes 3 componentes y por tanto, trabajamos en $\mathbb{R}^3$).

c) $(1,2,-3);(1,-3,2);(2,-1,5)$

$$\alpha(1,2,-3)+\beta(1,-3,2)+\gamma(2,-1,5)=(0,0,0)$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta+2\gamma=0\\2\alpha-3\beta-\gamma=0\\-3\alpha+2\beta+5\gamma=0\end{cases}\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}\Rightarrow\textbf{Solución trivial (única)}$$

Como la solución del sistema de ecuaciones es única, el conjunto de vectores anterior es **linealmente independiente**.

d) $(2,-3,7);(0,0,0);(3,-1,-4)$

Este conjunto de vectores es **linealmente dependiente** ya que contiene al vector nulo $(0,0,0)$.

e) $(1,1,1);(1,-1,5)$.

$$\alpha(1,1,1)+\beta(1,-1,5)=(0,0,0)$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha-\beta=0\\ \alpha+5\beta=0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}\alpha=-\beta\\ -\beta-\beta=0\\ -2\beta=0\\ \beta=0\\ \alpha=-\beta=0\\ 0+5\cdot 0=0\\ 0=0\end{matrix} \Rightarrow \alpha=\beta=0 \Rightarrow \textbf{Solución trivial (única)}$$

Como la solución del sistema de ecuaciones es única, el conjunto de vectores anterior es **linealmente independiente**.

f) $(1,1,1);(1,2,3);(2,-1,1)$

$$\alpha(1,1,1)+\beta(1,2,3)+\gamma(2,-1,1)=(0,0,0)$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta+2\gamma=0\\ \alpha+2\beta-\gamma=0\\ \alpha+3\beta+\gamma=0\end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha=\beta=\gamma=0} \Rightarrow \textbf{Solución trivial (única)}$$

Como la solución del sistema de ecuaciones es única, el conjunto de vectores anterior es **linealmente independiente**.

g) $(2,2,-1);(4,2,-2)$

$$\begin{cases}2\alpha+4\beta=0\\ 2\alpha+2\beta=0\\ -\alpha-2\beta=0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}\alpha=-2\beta\\ 2(-2\beta)+2\beta=0\\ -2\beta=0\\ \beta=0\\ \alpha=-\beta=0\\ -0-2\cdot 0=0\\ 0=0\end{matrix} \Rightarrow \alpha=\beta=0 \Rightarrow \textbf{Solución trivial (única)}$$

Como la solución del sistema de ecuaciones es única, el conjunto de vectores anterior es **linealmente independiente**.

3. **Compruebe si S es un subespacio vectorial de V y, en caso afirmativo, calcule su dimensión y una base.**
   a) $\boldsymbol{S=\{(a,b,0)/a,b\in\mathbb{R}\}\ y\ V=\mathbb{R}^3}$**.**
   b) $\boldsymbol{S=\{(a,b,c)/a+b+c=0\}\ y\ V=\mathbb{R}^3}$**.**
   c) $\boldsymbol{S=\{ax^2+c/a,c\in\mathbb{R}\}\ y\ V=}$ **Polinomios de grado** $\boldsymbol{\leq 2}$**.**

Solución

Para que los subconjuntos anteriores sean subespacios se tienen que dar dos condiciones, que la suma sea interna, es decir, $\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} \in V$, donde $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \in V$ y que el producto de un vector del subconjunto por un escalar sea otro vector del subconjunto, es decir, $\alpha \cdot \boldsymbol{v} \in V$, donde $\boldsymbol{v} \in V$.

a) $S = \{(a, b, 0)/a, b \in \mathbb{R}\}\ y\ V = \mathbb{R}^3$

Vamos a comenzar comprobando que se cumple que $\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} \in V$, donde $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \in V$.

$$(a, b, 0) + (a', b', 0) = (a + a', b + b', 0)$$

Se cumple la primera condición, ya que en el vector resultante sus dos primeros componentes son números reales, y el tercero es 0, de modo que tiene la misma forma que cualquier vector del conjunto S.

Comprobamos ahora que $\alpha \cdot \boldsymbol{v} \in V$, donde $\boldsymbol{v} \in V$.

$$\alpha(a, b, 0) = (\alpha a, \alpha b, 0), \text{ donde } \alpha \in \mathbb{R}$$

Por la misma razón que antes, se cumple la segunda condición. Por tanto, al cumplirse ambas condiciones, **el conjunto anterior es un subespacio de $\boldsymbol{V}$**.

A continuación, vamos a calcular su dimensión y una base del mismo.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De donde

$$\boldsymbol{B_S} = \{(\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}); (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0})\}$$

Como la base anterior está compuesta por 2 vectores, **la dimensión de este subespacio de $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}^3$ es 2**.

b) $S = \{(a, b, c)/a + b + c = 0\}\ y\ V = \mathbb{R}^3$

Comenzamos comprobando que se cumple que $\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} \in V$, donde $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \in V$.

$$(a, b, c) + (a', b', c') = (a + a', b + b', c + c')$$

Como (a, b, c) y (a', b', c') son vectores del conjunto S, cumplen $a + b + c = 0$ y $a' + b' + c' = 0$. A continuación comprobamos si el vector que resulta de sumar los dos anteriores cumple esa misma condición.

$$a + a' + b + b' + c + c' = (a + b + c) + (a' + b' + c') = 0 + 0 = 0$$

Comprobamos ahora que $\alpha \cdot \boldsymbol{v} \in V$, donde $\boldsymbol{v} \in V$.

$$\alpha(a,b,c) = (\alpha a, \alpha b, \alpha c)$$

$$\alpha a + \alpha b + \alpha c = \alpha(a+b+c) = \alpha \cdot 0 = 0$$

Al cumplirse ambas condiciones, **el conjunto anterior es un subespacio de $\boldsymbol{V}$**.

A continuación, vamos a calcular su dimensión y una base del mismo. Por el enunciado, sabemos que

$$a+b+c=0 \Rightarrow a=-b-c$$

Por lo que la solución del sistema anterior es

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b-c \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De donde

$$\boldsymbol{B_S} = \{(\boldsymbol{-1}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{0}); (\boldsymbol{-1}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1})\}$$

Como la base anterior está compuesta por 2 vectores, **la dimensión de este subespacio de $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}^{\boldsymbol{3}}$ es 2**.

c) $S = \{ax^2 + c/a, c \in \mathbb{R}\}$ y $V =$ Polinomios de grado ≤ 2

Comenzamos comprobando que se cumple que $\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} \in V$, donde $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \in V$.

$$(ax^2 + c) + (a'x^2 + c') = (a+a')x^2 + (c+c')$$

Luego, la primera condición se cumple.

Comprobamos ahora que $\alpha \cdot \boldsymbol{v} \in V$, donde $\boldsymbol{v} \in V$.

$$\alpha(ax^2 + c) = (\alpha a)x^2 + (\alpha c)$$

La segunda condición también se cumple. Por tanto, **el conjunto anterior es un subespacio de $\boldsymbol{V}$**.

A continuación, vamos a calcular su dimensión y una base del mismo. Por el enunciado, sabemos que

$$ax^2 + c/a, c \in \mathbb{R}$$

De donde

$$a \cdot x^2 + 0 \cdot x + c \cdot 1$$

Por lo que una base de S será

$$\boldsymbol{B_S = \{x^2; 1\}}$$

De lo anterior se deduce que **la dimensión de este subespacio de V es 2**.

4. Sea $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/x_1 - x_4 = 0; 2x_2 + x_3 = 0\}$.

a) Demuestre que S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

b) Calcule la dimensión y una base de S.

c) Calcúlense las coordenadas de $v = (1, 1, -2, 1)$ en dicha base.

<u>Solución</u>

Para que los subconjuntos anteriores sean subespacios se tienen que dar dos condiciones, que la suma sea interna, es decir, $\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} \in V$, donde $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \in V$ y que el producto de un vector del subconjunto por un escalar sea otro vector del subconjunto, es decir, $\alpha \cdot \boldsymbol{v} \in V$, donde $\boldsymbol{v} \in V$.

a) Demuestre que S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

Comenzamos comprobando que se cumple que $\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} \in V$, donde $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \in V$.

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) + (x_1', x_2', x_3', x_4') = (x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3', x_4 + x_4')$$

Como (x_1, x_2, x_3, x_4) y (x_1', x_2', x_3', x_4') son vectores del conjunto S, cumplen $x_1 - x_4 = 0$, $2x_2 + x_3 = 0$ y $x_1' - x_4' = 0$, $2x_2' + x_3' = 0$, respectivamente.

A continuación comprobamos si el vector que resulta de sumar los dos anteriores cumple esa misma condición.

$$x_1 + x_1' - x_4 + x_4' = (x_1 - x_4) + (x_1' - x_4') = 0 + 0 = 0$$

$$2x_2 + x_2' + x_3 + x_3' = (2x_2 + x_3) + (2x_2' + x_3') = 0 + 0 = 0$$

Por tanto, el vector resultante cumple la primera condición, ya que las dos ecuaciones anteriores son iguales a 0.

Comprobamos ahora que $\alpha \cdot \boldsymbol{v} \in V$, donde $\boldsymbol{v} \in V$.

$$\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4)$$

$$\alpha x_1 - \alpha x_4 = \alpha(x_1 - x_4) = \alpha \cdot 0 = 0;\ \alpha 2x_2 + \alpha x_3 = \alpha(2x_2 + x_3) = \alpha \cdot 0 = 0$$

La segunda condición también se cumple. Por tanto, al cumplirse ambas condiciones, **el conjunto anterior es un subespacio de $\mathbb{R}^4$**.

b) Calcule la dimensión y una base de S.

A continuación, vamos a calcular su dimensión y una base del mismo. Por el enunciado, sabemos que

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = x_4 \\ x_2 = \dfrac{-x_3}{2} \end{matrix}$$

Por lo que la solución del sistema anterior es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ \dfrac{-x_3}{2} \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{-x_3}{2} \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_4 \\ 0 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{-1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De donde

$$\boldsymbol{B_S = \left\{\left(0, \frac{-1}{2}, 1, 0\right); (1, 0, 0, 1)\right\}}$$

Como la base anterior está compuesta por 2 vectores, **la dimensión de este subespacio de $\mathbb{R}^4$ es 2**.

c) Calcúlense las coordenadas de $\boldsymbol{v} = (1,1,-2,1)$ en dicha base.

$$(1,1,-2,1) = \alpha \left(0, \frac{-1}{2}, 1,0\right) + \beta(1,0,0,1)$$

$$\begin{cases} \beta = 1 \\ \dfrac{-\alpha}{2} = 1 \\ \alpha = -2 \\ \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \boldsymbol{\beta = 1} \\ \boldsymbol{\alpha = -2} \end{matrix}$$

Por lo que

$$\boldsymbol{v = 2\left(0, \frac{-1}{2}, 1, 0\right) + (1, 0, 0, 1)}$$

5. Verifique cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales y cuáles no.

a) $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ **dada por** $\boldsymbol{f(x, y, z) = 2x - 3y + 4z}$

b) $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **dada por** $\boldsymbol{f(x, y) = x \cdot y}$

c) $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ **dada por** $\boldsymbol{f(x, y, z) = (|x|, 0)}$

d) $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ **dada por** $\boldsymbol{f(x, y) = (2x, 2y, x + y)}$

e) $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ **dada por** $\boldsymbol{f(x, y) = (x^2, y^2)}$

f) $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ **dada por** $\boldsymbol{f(x, y) = (2x - y, x)}$

g) $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ **dada por** $\boldsymbol{f(x, y) = (ax + by, cx + dy)}$

h) $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ **dada por** $\boldsymbol{f(x, y, z) = (z, x + y)}$

i) $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ **dada por** $\boldsymbol{f(x, y, z) = (x + 1, y + z)}$

j) $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ **dada por** $\boldsymbol{f(x) = (2x, 3x)}$

k) $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ **dada por** $\boldsymbol{f(x) = (x, 1)}$
l) $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ **dada por** $\boldsymbol{f(x, y) = |x - y|}$

<u>Solución</u>

Para que las aplicaciones siguientes sean aplicaciones lineales, tienen que cumplir las dos propiedades siguientes: $f(\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}) = f(\boldsymbol{v_1}) + f(\boldsymbol{v_2})$ y $f(k\boldsymbol{v}) = k \cdot f(\boldsymbol{v})$.

a) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = 2x - 3y + 4z$

Comprobamos si se cumple la primera propiedad.

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$

$$f(x + x', y + y', z + z') = f(x, y, z) + f(x', y', z')$$

$$2(x + x') - 3(y + y') + 4(z + z') = (2x - 3y + 4z) + (2x' - 3y' + 4z')$$

$$(\boldsymbol{2x + 2x' - 3y - 3y' + 4z + 4z'}) = (\boldsymbol{2x + 2x' - 3y - 3y' + 4z + 4z'})$$

La primera propiedad sí se cumple. A continuación comprobamos si se cumple la 2ª.

$$f\big(k(x, y, z)\big) = k \cdot f(x, y, z)$$

$$f(kx, ky, kz) = k \cdot (2x - 3y + 4z)$$

$$(\boldsymbol{2kx - 3ky + 4kz}) = (\boldsymbol{k2x - k3y + k4z})$$

También cumple la 2ª propiedad. Luego, **se trata de una aplicación lineal**.

b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x \cdot y$

Comprobamos si se cumple la primera propiedad.

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$f(x + x', y + y') \neq f(x, y) + f(x', y')$$

$$((x + x') \cdot (y + y')) \neq (x \cdot y) + (x' \cdot y')$$

$$(\boldsymbol{xy + xy' + x'y + x'y'}) \neq (\boldsymbol{xy + x'y'})$$

La primera propiedad no se cumple. Por lo que **la aplicación anterior no es lineal**. De todos modos, a continuación comprobamos si cumple la segunda.

$$f\big(k(x, y)\big) \neq k \cdot f(x, y)$$

$$f(kx, ky) \neq k \cdot (x \cdot y)$$

$$(kx \cdot ky) \neq (k \cdot x \cdot y)$$

$$(\boldsymbol{k^2xy}) \neq (\boldsymbol{kxy})$$

Tampoco cumple la 2ª propiedad. Luego, **no se trata de una aplicación lineal**.

c) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y, z) = (|x|, 0)$

Comprobamos si se cumple la primera propiedad.

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$f(x + x', y + y') \neq f(x, y) + f(x', y')$$

$$(|x + x'|, 0) \neq (|x|, 0) + (|x'|, 0)$$

$$(|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}'|, \boldsymbol{0}) \neq (|\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{x}'|, \boldsymbol{0})$$

La primera propiedad no se cumple. Por lo que la aplicación anterior no es lineal. De todas, formas, vamos a comprobar si cumple la 2ª.

$$f\big(k(x, y)\big) \neq k \cdot f(x, y)$$

$$f(kx, ky) \neq k \cdot (|x|, 0)$$

$$(|\boldsymbol{kx}|, \boldsymbol{0}) \neq (\boldsymbol{k}|\boldsymbol{x}|, \boldsymbol{0})$$

Tampoco cumple la 2ª propiedad. A continuación ponemos un ejemplo concreto para verlo más claramente.

$$\boldsymbol{u} = (1,2), k = -2$$

$$f\big(-2(1,2)\big) \neq -2 \cdot f(1,2)$$

$$f(-2, -4) \neq -2 \cdot (|1|, 0)$$

$$(|-2|, 0) \neq (-2 \cdot 1,0)$$

$$(\boldsymbol{2}, \boldsymbol{0}) \neq (-\boldsymbol{2}, \boldsymbol{0})$$

Al no cumplir ninguna de las dos propiedades, podemos decir que **no se trata de una aplicación lineal**.

d) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y) = (2x, 2y, x + y)$

Comprobamos si se cumple la primera propiedad.

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$$

$$f(x+x',y+y')=f(x,y)+f(x',y')$$

$$(2(x+x'),2(y+y'),x+x'+y+y')=(2x,2y,x+y)+(2x',2y',x'+y')$$

$$(2(x+x'),2(y+y'),x+x'+y+y')=(2x+2x',2y+2y',x+y+x'+y')$$

$$(\boldsymbol{2x+2x',2y+2y',x+y+y+y'})=(\boldsymbol{2x+2x',2y+2y',x+y+x'+y'})$$

La primera propiedad sí se cumple. A continuación comprobamos si se cumple la 2ª.

$$f\big(k(x,y)\big)=k\cdot f(x,y)$$

$$f(kx,ky)=k\cdot(2x,2y,x+y)$$

$$(\boldsymbol{2kx,2ky,kx+ky})=(\boldsymbol{k2x,k2y,kx+ky})$$

También cumple la 2ª propiedad. Luego, **se trata de una aplicación lineal**.

e) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y)=(x^2,y^2)$

Comprobamos si se cumple la primera propiedad.

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$$

$$f(x+x',y+y')\neq f(x,y)+f(x',y')$$

$$((x+x')^2,(y+y')^2)\neq(x^2,y^2)+((x')^2,(y')^2)$$

$$((\boldsymbol{x+x'})^{\boldsymbol{2}},(\boldsymbol{y+y'})^{\boldsymbol{2}})\neq(\boldsymbol{x^2+(x')^2,y^2+(y')^2})$$

La primera propiedad no se cumple. Por lo que **la aplicación anterior no es lineal**. De todas formas, vamos a comprobar si cumple la 2ª, aunque no haría falta, ya que en el momento en el que al menos una de las dos propiedades no se cumpla, ya no es aplicación lineal.

$$f\big(k(x,y)\big)\neq k\cdot f(x,y)$$

$$f(kx,ky)\neq k\cdot(x^2,y^2)$$

$$((\boldsymbol{kx})^{\boldsymbol{2}},(\boldsymbol{ky})^{\boldsymbol{2}})\neq(\boldsymbol{kx^2,ky^2})$$

Tampoco cumple la 2ª propiedad. Luego, **no se trata de una aplicación lineal**. A continuación ponemos un ejemplo concreto para verlo más claramente.

$$\boldsymbol{u}=(-2,3),k=3$$

$$f\big(3(-2{,}3)\big) \neq 3 \cdot f(-2{,}3)$$

$$f(-6{,}9) \neq 3 \cdot ((-2)^2, 3^2)$$

$$((-6)^2, 9^2) \neq (3 \cdot 4{,}3 \cdot 9)$$

$$\mathbf{(36, 81) \neq (12, 27)}$$

f) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (2x - y, x)$

Comprobamos si se cumple la primera propiedad.

$$(x,y) + (x',y') = (x + x', y + y')$$

$$f(x + x', y + y') = f(x,y) + f(x',y')$$

$$(2(x + x') - (y + y'), x + x') = (2x - y, x) + (2x' - y', x')$$

$$(2x + 2x' - y - y', x + x') = (2x - y + 2x' - y', x + x')$$

$$\boldsymbol{(2x + 2x' - y - y', x + x') = (2x + 2x' - y - y', x + x')}$$

La primera propiedad sí se cumple. A continuación comprobamos si se cumple la 2ª.

$$f\big(k(x,y)\big) = k \cdot f(x,y)$$

$$f(kx, ky) = k \cdot (2x - y, x)$$

$$\boldsymbol{(2kx - ky, kx) = (k2x - ky, kx)}$$

También cumple la 2ª propiedad. Luego, **se trata de una aplicación lineal**.

g) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (ax + by, cx + dy)$

Comprobamos si se cumple la primera propiedad.

$$(x,y) + (x',y') = (x + x', y + y')$$

$$f(x + x', y + y') = f(x,y) + f(x',y')$$

$$(a(x + x') + b(y + y'), c(x + x') + d(y + y')) = (ax + by, cx + dy) + (ax' + by', cx' + dy')$$

$$(ax + ax' + by + by', cx + cx' + dy + dy') = (ax + by + ax' + by', cx + dy + cx' + dy')$$

$$\boldsymbol{(ax + ax' + by + by', cx + cx' + dy + dy') = (ax + ax' + by + by', cx + cx' + dy + dy')}$$

La primera propiedad sí se cumple. A continuación comprobamos si se cumple la 2ª.

$$f\big(k(x,y)\big) = k \cdot f(x,y)$$

$$f(kx,ky) = k \cdot (ax+by, cx+dy)$$

$$(akx+bky, ckx+dky) = (kax+kby, kcx+kdy)$$

$$(\boldsymbol{akx}+\boldsymbol{bky}, \boldsymbol{ckx}+\boldsymbol{dky}) = (\boldsymbol{akx}+\boldsymbol{bky}, \boldsymbol{ckx}+\boldsymbol{dky})$$

También cumple la 2ª propiedad. Luego, **se trata de una aplicación lineal**.

h) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y,z) = (z, x+y)$

Comprobamos si se cumple la primera propiedad.

$$(x,y,z) + (x',y',z') = (x+x', y+y', z+z')$$

$$f(x+x', y+y', z+z') = f(x,y,z) + f(x',y',z')$$

$$(z+z', x+x'+y+y') = (z, x+y) + (z', x'+y')$$

$$(z+z', x+x'+y+y') = (z+z', x+y+x'+y')$$

$$(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{z'}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{x'}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y'}) = (\boldsymbol{z}+\boldsymbol{z'}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{x'}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y'})$$

La primera propiedad sí se cumple. A continuación comprobamos si se cumple la 2ª.

$$f\big(k(x,y,z)\big) = k \cdot f(x,y,z)$$

$$f(kx,ky,kz) = k \cdot (z, x+y)$$

$$(\boldsymbol{kz}, \boldsymbol{kx}+\boldsymbol{ky}) = (\boldsymbol{kz}, \boldsymbol{kx}+\boldsymbol{ky})$$

También cumple la 2ª propiedad. Luego, **se trata de una aplicación lineal**.

i) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y,z) = (x+1, y+z)$

Comprobamos si se cumple la primera propiedad.

$$(x,y,z) + (x',y',z') = (x+x', y+y', z+z')$$

$$f(x+x', y+y', z+z') \neq f(x,y,z) + f(x',y',z')$$

$$(x+x'+1, y+y'+z+z') \neq (x+1, y+z) + (x'+1, y'+z')$$

$$(x+x'+1, y+y'+z+z') \neq (x+1+x'+1, y+z+y'+z')$$

$$(x+x'+1, y+y'+z+z') \neq (x+x'+2, y+y'+z+z')$$

La primera propiedad no se cumple. Por lo tanto, $\boldsymbol{f(x,y,z)=(x+1,y+z)}$ **no es aplicación lineal.**

j) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ dada por $f(x)=(2x,3x)$

Comprobamos si se cumple la primera propiedad.

$$x+x'$$

$$f(x+x')=f(x)+f(x')$$

$$\big(2(x+x'),3(x+x')\big)=(2x,3x)+(2x',3x')$$

$$(\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{2}\boldsymbol{x}',\mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{3}\boldsymbol{x}')=(\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{2}\boldsymbol{x}',\mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{3}\boldsymbol{x}')$$

La primera propiedad sí se cumple. A continuación comprobamos si se cumple la 2ª.

$$f\big(k(x)\big)=k\cdot f(x)$$

$$f(kx)=k\cdot(2x,3x)$$

$$(2kx,3kx)=k\cdot(2x,3x)$$

$$\boldsymbol{k}\cdot(\mathbf{2}\boldsymbol{x},\mathbf{3}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{k}\cdot(\mathbf{2}\boldsymbol{x},\mathbf{3}\boldsymbol{x})$$

También cumple la 2ª propiedad. Luego, **se trata de una aplicación lineal**.

k) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ dada por $f(x)=(x,1)$

Comprobamos si se cumple la primera propiedad.

$$x+x'$$

$$f(x+x')\neq f(x)+f(x')$$

$$(x+x',1)\neq(x,1)+(x',1)$$

$$(x+x',1)\neq(x+x',2)$$

La primera propiedad no se cumple. Por tanto, $\boldsymbol{f(x)=(x,1)}$, **no es aplicación lineal**.

l) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=|x-y|$

Comprobamos si se cumple la primera propiedad.

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$$

$$f(x+x',y+y') \neq f(x,y)+f(x',y')$$

$$|x+x'-(y+y')| \neq |x-y|+|x'-y'|$$

$$|x-y+x'-y'| \neq |x-y|+|x'-y'|$$

Teniendo en cuenta una de las propiedades de la función valor absoluto, $|x+y| \leq |x|+|y|$, tenemos

$$|(x-y)+(x'-y')| \leq |x-y|+|x'-y'|$$

$$|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}')| \neq |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|+|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|$$

La primera propiedad no se cumple. Por tanto, $\boldsymbol{f(x,y)=|x-y|}$, **no es aplicación lineal**.

6. **Se consideran las aplicaciones de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$.**
   i. $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\boldsymbol{f(x_1,x_2)=(x_1+x_2,0)}$.
   ii. $\boldsymbol{g}:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2/\boldsymbol{g(x)=(2x,x+1)}$.
   iii. $\boldsymbol{h}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3/\boldsymbol{h(x_1,x_2)=(x_1,x_2,x_1+x_2)}$.
   a) **Compruebe que $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{h}$, son aplicaciones lineales y $\boldsymbol{g}$ no es lineal.**
   b) **Encuentre los vectores $(\boldsymbol{x_1,x_2})$ que en la aplicación $\boldsymbol{h}$ se transforman en $\boldsymbol{0}$ (núcleo de $\boldsymbol{h}$).**
   c) **Compruebe que el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$ que en la aplicación $\boldsymbol{f}$ se transforman en $\boldsymbol{0}$ (núcleo de $\boldsymbol{f}$) forman un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.**
   d) **Calcule una base de dicho subespacio**.

<u>Solución</u>

a) Compruebe que f y h, son aplicaciones lineales y g no es lineal.

Para que las aplicaciones anteriores sean aplicaciones lineales, tienen que cumplir las dos propiedades siguientes: $f(\boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{v_2})=f(\boldsymbol{v_1})+f(\boldsymbol{v_2})$ y $f(k\boldsymbol{v})=k\cdot f(\boldsymbol{v})$.

iv. $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/f(x_1,x_2)=(x_1+x_2,0)$

$$(x_1,x_2)+(x_1',x_2')=(x_1+x_1',x_2+x_2')$$

$$f(x_1+x_1',x_2+x_2')=f(x_1,x_2)+f(x_1',x_2')$$

$$(x_1+x_1'+x_2+x_2',0)=(x_1+x_2,0)+(x_1'+x_2',0)$$

$$(x_1+x_1'+x_2+x_2',0)=(x_1+x_2+x_1'+x_2',0)$$

$$(\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_1'}+\boldsymbol{x_2}+\boldsymbol{x_2'},\boldsymbol{0})=(\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_1'}+\boldsymbol{x_2}+\boldsymbol{x_2'},\boldsymbol{0})$$

$$f\left(k \cdot (x_1, x_2)\right) = k \cdot f(x_1, x_2)$$

$$f(kx_1, kx_2) = k \cdot (x_1 + x_2, 0)$$

$$(\boldsymbol{kx_1} + \boldsymbol{kx_2}, \mathbf{0}) = (\boldsymbol{kx_1} + \boldsymbol{kx_2}, \mathbf{0})$$

Luego, al cumplirse ambas propiedades, **la aplicación anterior es lineal**.

v. $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 / g(x) = (2x, x + 1)$

$$x + x'$$

$$g(x + x') \neq g(x) + g(x')$$

$$(2(x + x'), x + x' + 1) \neq (2x, x + 1) + (2x', x' + 1)$$

$$(2x + 2x', x + x' + 1) \neq (2x + 2x', x + x' + 2)$$

La primera propiedad no se cumple. Luego, **la aplicación anterior no es lineal**.

vi. $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 / h(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1 + x_2)$

$$(x_1, x_2) + (x_1', x_2') = (x_1 + x_1', x_2 + x_2')$$

$$f(x_1 + x_1', x_2 + x_2') = f(x_1, x_2) + f(x_1', x_2')$$

$$(x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_1 + x_1' + x_2 + x_2') = (x_1, x_2, x_1 + x_2) + (x_1', x_2', x_1' + x_2')$$

$$(\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_1'}, \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_2'}, \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_1'} + \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_2'}) = (\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_1'}, \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_2'}, \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_1'} + \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_2'})$$

La primera propiedad se cumple.

A continuación comprobamos que también se cumple la 2ª.

$$f\left(k(x_1, x_2)\right) = k \cdot f(x_1, x_2)$$

$$f(kx_1, kx_2) = k \cdot f(x_1, x_2)$$

$$(kx_1, kx_2, kx_1 + kx_2) = k \cdot (x_1, x_2, x_1 + x_2)$$

$$(\boldsymbol{kx_1}, \boldsymbol{kx_2}, \boldsymbol{kx_1} + \boldsymbol{kx_2}) = (\boldsymbol{kx_1}, \boldsymbol{kx_2}, \boldsymbol{kx_1} + \boldsymbol{kx_2})$$

Al cumplirse las dos propiedades podemos decir que $\boldsymbol{h(x_1, x_2)}$ **es una aplicación lineal.**

b) Encuentre los vectores (x_1, x_2) que en la aplicación h se transforman en 0 (núcleo de h).

$$S_h = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / (x_1, x_2, x_1 + x_2) = (0,0,0)\}$$

c) Compruebe que el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$ que en la aplicación f se transforman en 0 (núcleo de f) forman un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

$$S_f = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / (x_1 + x_2, 0) = (0,0)\}$$

Para que S_f sea un subespacio de $\mathbb{R}^2$ se tienen que dar dos condiciones, que la suma sea interna, es decir, $\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} \in V$, donde $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \in V$ y que el producto de un vector del subconjunto por un escalar sea otro vector del subconjunto, es decir, $\alpha \cdot \boldsymbol{v} \in V$, donde $\boldsymbol{v} \in V$.

Vamos a comenzar comprobando que se cumple que $\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} \in V$, donde $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \in V$.

$$(x_1, x_2) + (x_1{}', x_2{}') = (x_1 + x_1', x_2 + x_2{}')$$

$$f(x_1 + x_1', x_2 + x_2{}') = (x_1 + x_1' + x_2 + x_2', 0)$$

Como (x_1, x_2) y $(x_1{}', x_2{}')$ pertenecen a S_f cumplen $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 0) = (0,0)$ y $f(x_1{}', x_2{}') = (x_1' + x_2', 0) = (0,0)$, respectivamente. Por tanto,

$$(x_1 + x_1' + x_2 + x_2', 0) = (x_1 + x_2, 0) + (x_1' + x_2', 0) = (0,0) + (0,0) = (0,0)$$

La primera condición sí se cumple.

Comprobamos ahora que $\alpha \cdot \boldsymbol{v} \in V$, donde $\boldsymbol{v} \in V$.

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$$

$$f(\alpha x_1, \alpha x_2) = (\alpha x_1 + \alpha x_2, 0) = \alpha(x_1 + x_2, 0) = \alpha \cdot (0,0) = (0,0)$$

También se cumple la segunda condición. Por tanto, **el conjunto anterior es un subespacio de $\mathbb{R}^2$**.

d) Calcule una base de dicho subespacio.

$$x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$$

De donde se obtiene que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que

$$\boldsymbol{B_{S_f}} = \{(\boldsymbol{-1}, \boldsymbol{1})\}$$

La dimensión de S_f es, por tanto, 1, ya que la base anterior únicamente está formada por un vector.

HOJA 2: MATRICES Y DETERMINANTES

1. Sean A, B y C las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Calcule:

a) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2$
b) $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2$
c) $(\boldsymbol{B})^3$
d) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}^2\cdot\boldsymbol{C}$

Solución

a)

$$A+B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^2=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{24} & \mathbf{-14} & \mathbf{42} \\ \mathbf{19} & \mathbf{-6} & \mathbf{35} \\ \mathbf{34} & \mathbf{-15} & \mathbf{73} \end{pmatrix}$$

b)

$$A-B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-B)^2=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{16} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{9} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-16} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

c)

$$(B)^3=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 13 & -6 & 14 \\ 12 & -5 & 14 \\ -3 & -4 & 14 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{34} & \mathbf{-27} & \mathbf{70} \\ \mathbf{33} & \mathbf{-26} & \mathbf{70} \\ \mathbf{-24} & \mathbf{-11} & \mathbf{42} \end{pmatrix}$$

d)

$$A\cdot B^2\cdot C=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 13 & -6 & 14 \\ 12 & -5 & 14 \\ -3 & -4 & 14 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -18 & -3 & 14 \\ -4 & -3 & 14 \\ 27 & -34 & 98 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{62} & \mathbf{10} & \mathbf{23} \\ \mathbf{62} & \mathbf{24} & \mathbf{9} \\ \mathbf{460} & \mathbf{223} & \mathbf{-31} \end{pmatrix}$$

2. Sean A, B y C las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

a) Calcule $(\boldsymbol{A^T} \cdot \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C}$.

b) Calcule $(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C^T}) \cdot \boldsymbol{A^T}$.

c) Determine las dimensiones que debería tener la matriz $\boldsymbol{M}$, para que el producto $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{C}$ pudiera calcularse.

d) Determine qué dimensiones debería tener la matriz $\boldsymbol{M}$ para que el producto $\boldsymbol{C^T} \cdot \boldsymbol{M}$ dé como resultado una matriz cuadrada.

<u>Solución</u>

a)

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ -1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & -1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 & 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$(A^T \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}_{3\times2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}_{3\times2}$ ⇒Este último producto **no se puede calcular**, ya que el número de columnas de of $A^T \cdot B$ (2) es diferente del número de filas de C (3).

b)

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}(B \cdot C^T) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(B \cdot C^T) \cdot A^T &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) - 4 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) \\ -1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 & -1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{8} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

c)

$$A_{2\times 3}\cdot \boldsymbol{M}_{\mathbf{3\times 3}}\cdot C_{3\times 2}$$

d)

$$C^{T}{}_{2\times 3}\cdot \boldsymbol{M}_{\mathbf{3\times 2}}$$

La matriz resultante será una matriz cuadrada de orden 2 (2×2).

3. Compruebe que $\boldsymbol{A^2 - A - 2I = 0}$, $\boldsymbol{A}$ siendo

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

<u>Solución</u>

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

4. Sea $\boldsymbol{A}$ la siguiente matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Calcule $\boldsymbol{A^n}$.

<u>Solución</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \boldsymbol{n} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

5. Calcule los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 10 & 6 \\ 6 & 4 & 7 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 9 & 7 & 6 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & y & y & y \\ x & y & z & z \\ x & y & z & t \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$

<u>Solución</u>

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 4 + 4 - 12 = \mathbf{-7}$$

b)

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -4 + 8 + 6 - 10 = \mathbf{0}$$

c)

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 10 & 6 \\ 6 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 10 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 4 + 5 \cdot 6 \cdot 6 - 3 \cdot 10 \cdot 6 - 2 \cdot 6 \cdot 4 - 5 \cdot 4 \cdot 7$$
$$= \mathbf{0}$$

También os podríais haber dado cuenta de que la fila 2 es el doble de la fila 1, de modo que el determinante es 0.

d) $Col. 4 + Col. 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \\ -3 & 4 & 5 & 6 \\ -4 & -5 & 6 & -3 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ -5 & 6 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot 5\cdot(-3) + 9\cdot 4\cdot 6 + 4\cdot 6\cdot(-5) - 9\cdot 5\cdot(-5) - 3\cdot 6\cdot 6 - 4\cdot 4\cdot(-3) = \mathbf{216}$$

e) $Fila\ 1 - Fila\ 4$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 7 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(4\cdot 2\cdot 1 + 3\cdot 7\cdot(-3) - (-2)\cdot 7\cdot 1 - 3\cdot 2\cdot 2) = 2\cdot(-53) = \mathbf{-106}$$

f)

$$\begin{vmatrix} 9 & 7 & 6 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 5(-1)^{1+5}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 5\cdot 1(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 5\cdot 24 = \mathbf{120}$$

g)

$$\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & y & y & y \\ x & y & z & z \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & y & y & y \\ 1 & y & z & z \\ 1 & y & z & t \end{vmatrix}$$

$Fila\ 2 - Fila\ 1$, $Fila\ 3 - Fila\ 1$, $Fila\ 4 - Fila\ 1$.

$$x\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & y & y & y \\ 1 & y & z & z \\ 1 & y & z & t \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & y-x & y-x & y-x \\ 1 & y & z & z \\ 1 & y & z & t \end{vmatrix} =$$

$$= x\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & y-x & y-x & y-x \\ 0 & y-x & z-x & z-x \\ 1 & y & z & t \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & y-x & y-x & y-x \\ 0 & y-x & z-x & z-x \\ 0 & y-x & z-x & t-x \end{vmatrix} =$$

$$x\cdot 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} y-x & y-x & y-x \\ y-x & z-x & z-x \\ y-x & z-x & t-x \end{vmatrix} = x(y-x)\begin{vmatrix} 1 & y-x & y-x \\ 1 & z-x & z-x \\ 1 & z-x & t-x \end{vmatrix}$$

$Fila\ 2 - Fila\ 1$, $Fila\ 3 - Fila\ 1$.

$$x(y-x)\begin{vmatrix} 1 & y-x & y-x \\ 1 & z-x & z-x \\ 1 & z-x & t-x \end{vmatrix} = x(y-x)\begin{vmatrix} 1 & y-x & y-x \\ 0 & z-x-y+x & z-x-y+x \\ 1 & z-x & t-x \end{vmatrix} =$$

$$x(y-x)\begin{vmatrix}1 & y-x & y-x\\ 0 & z-y & z-y\\ 0 & z-x-y+x & t-x-y+x\end{vmatrix} = x(y-x)\begin{vmatrix}1 & y-x & y-x\\ 0 & z-y & z-y\\ 0 & z-y & t-y\end{vmatrix} =$$

$$x(y-x)\cdot 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}z-y & z-y\\ z-y & t-y\end{vmatrix} = x(y-x)(z-y)\begin{vmatrix}1 & z-y\\ 1 & t-y\end{vmatrix} =$$

$$x(y-x)(z-y)[(t-y)-(z-y)] = x(y-x)(z-y)(t-y-z+y) =$$

$$= \boldsymbol{x(y-x)(z-y)(t-z)}$$

<u>Otra forma:</u>

$Fila\ 4 - Fila\ 3$, $Fila\ 3 - Fila\ 2$, $Fila\ 2 - Fila\ 1$. Después de llevar a cabo las operaciones con filas anteriores se obtiene una matriz triangular superior, por lo que podemos calcular el determinante como el producto de los elementos de su diagonal principal.

$$\begin{vmatrix}x & x & x & x\\ x & y & y & y\\ x & y & z & z\\ x & y & z & t\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}x & x & x & x\\ x & y & y & y\\ x & y & z & z\\ 0 & 0 & 0 & t-z\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix}x & x & x & x\\ x & y & y & y\\ 0 & 0 & z-y & z-y\\ 0 & 0 & 0 & t-z\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}x & x & x & x\\ 0 & y-x & y-x & y-x\\ 0 & 0 & z-y & z-y\\ 0 & 0 & 0 & t-z\end{vmatrix} = \boldsymbol{x(y-x)(z-y)(t-z)}$$

h) $Fila\ 2 + Fila 3$.

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ b+c & c+a & a+b\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a+b+c & b+c+a & c+a+b\\ b+c & c+a & a+b\end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ b+c & c+a & a+b\end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

Como las dos primeras filas son iguales, el determinante es 0.

<u>Otra forma:</u>

$Col.2 - Col.1$, $Col.3 - Col.1$.

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ b+c & c+a & a+b\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ a & b-a & c\\ b+c & c+a-b-c & a+b\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ a & b-a & c-a\\ b+c & a-b & a+b-b-c\end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}b-a & c-a\\ a-b & a-c\end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(a-c) - (c-a)(a-b) =$$

$$= ba - bc - a^2 + ac - (ca - cb - a^2 - ab) =$$

$$= ba - bc - a^2 + ac - ca + cb + a^2 + ab = \mathbf{0}$$

Otra forma: También lo podríais resolver utilizando la Regla de Sarrus.

6. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3, tales que $|\boldsymbol{A}| = \mathbf{2}$ and $|\boldsymbol{B}| = -\mathbf{3}$. Calcule:

a) $|3\boldsymbol{A}|$
b) $|2\boldsymbol{A} \cdot 3\boldsymbol{B}|$
c) $|\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}|$

Solución

a) $|3A| = 3^3|A| = 3^3 \cdot 2 = 27 \cdot 2 = \mathbf{54}$
b) $|2A \cdot 3B| = |2A| \cdot |3B| = 2^3|A| \cdot 3^3|B| = 2^3 \cdot 2 \cdot 3^3 \cdot (-3) = \mathbf{-1.296}$
c) $|B \cdot A \cdot B| = |B| \cdot |A| \cdot |B| = (-3) \cdot 2 \cdot (-3) = \mathbf{18}$

7. Calcule la inversa de las siguientes matrices:

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

b) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

c) $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

Solución

a) Vamos a calcular la inversa de la matriz A aplicando el método del adjunto.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3+2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3/5} & \mathbf{1/5} \\ \mathbf{-2/5} & \mathbf{1/5} \end{pmatrix}$$

b) De nuevo, utilizaremos el método del adjunto para el cálculo de la inversa de la matriz B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

c) En este caso, vamos a aplicar método de eliminación de Gauss-Jordan para el cálculo de la inversa de C.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(C|I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\frac{1}{3} Fila\ 4$, $Fila\ 3 - Fila\ 4$, $\frac{1}{2} Fila\ 3$, $Fila\ 2 - 2 \cdot Fila\ 4$, $Fila\ 1 - Fila\ 2$, $Fila\ 1 - Fila\ 3$, $Fila\ 1 - Fila\ 4$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -5/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1/2 & 5/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -5/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -5/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -5/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2/3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1/2} & \mathbf{-5/6} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1/2} & \mathbf{-1/6} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1/3} \end{pmatrix}$$

8. Despeje la matriz X en cada una de las expresiones siguientes:

a) $\boldsymbol{A^{-1} \cdot X = B}$
b) $\boldsymbol{X^{-1} \cdot A = B}$
c) $\boldsymbol{A \cdot X + B \cdot X = B}$
d) $\boldsymbol{X^T \cdot A = B^T}$
e) $\boldsymbol{A \cdot X^{-1} \cdot B^{-1} = B}$
f) $\boldsymbol{A \cdot X \cdot B = A}$

Solución

a) $A^{-1} \cdot X = B \Rightarrow AA^{-1}X = AB \Rightarrow IX = AB \Rightarrow \boldsymbol{X = AB}$
b) $X^{-1} \cdot A = B \Rightarrow XX^{-1}A = XB \Rightarrow IA = XB \Rightarrow A = XB \Rightarrow AB^{-1} = XBB^{-1} \Rightarrow AB^{-1} = XI \Rightarrow \boldsymbol{AB^{-1} = X}$
c) $A \cdot X + B \cdot X = B \Rightarrow (A+B)X = B \Rightarrow (A+B)^{-1}(A+B)X = (A+B)^{-1}B \Rightarrow IX = (A+B)^{-1}B \Rightarrow X = \boldsymbol{(A+B)^{-1}B}$
d) $X^T \cdot A = B^T \Rightarrow X^TAA^{-1} = B^TA^{-1} \Rightarrow X^TI = B^TA^{-1} \Rightarrow X^T = B^TA^{-1} \Rightarrow (X^T)^T = (B^TA^{-1})^T \Rightarrow X = (A^{-1})^T(B^T)^T \Rightarrow \boldsymbol{X = (A^{-1})^TB}$
e) $A \cdot X^{-1} \cdot B^{-1} = B \Rightarrow A^{-1}AX^{-1}B^{-1} = A^{-1}B \Rightarrow IX^{-1}B^{-1} = A^{-1}B \Rightarrow X^{-1}B^{-1} = A^{-1}B \Rightarrow XX^{-1}B^{-1} = XA^{-1}B \Rightarrow IB^{-1} = XA^{-1}B \Rightarrow B^{-1} = XA^{-1}B \Rightarrow B^{-1}B^{-1} = XA^{-1}BB^{-1} \Rightarrow (B^{-1})^2 = XA^{-1}I \Rightarrow (B^{-1})^2 = XA^{-1} \Rightarrow (B^{-1})^2A = XA^{-1}A \Rightarrow (B^{-1})^2A = XI \Rightarrow \boldsymbol{(B^{-1})^2A = X}$
f) $A \cdot X \cdot B = A \Rightarrow A^{-1}A \cdot X \cdot B = A^{-1}A \Rightarrow IXB = I \Rightarrow XB = I \Rightarrow XBB^{-1} = IB^{-1} \Rightarrow XI = B^{-1} \Rightarrow \boldsymbol{X = B^{-1}}$

9. Simplifique las siguientes expresiones:

a) $\boldsymbol{(A+B)^2 - (A-B)^2 - 2A(A+B)}$
b) $\boldsymbol{(A \cdot B^{-1})^2(B \cdot A^{-1})^2}$
c) $\boldsymbol{(A \cdot B^{-1})^{-1}(B \cdot A^{-1})^{-1}}$
d) $\boldsymbol{(A+B)^{-1}(AB + B^2)(A^{-1} \cdot B)^{-1}}$

Solución

a) $(A+B)^2 - (A-B)^2 - 2A(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 - (A^2 - AB - BA + B^2) - 2AA - 2AB = A^2 + AB + BA + B^2 - A^2 + AB + BA - B^2 - 2A^2 - 2AB = \boldsymbol{2BA - 2A^2}$
b) $(A \cdot B^{-1})^2(B \cdot A^{-1})^2 = A \cdot B^{-1} \cdot A \cdot (B^{-1} \cdot B) \cdot A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1} = A \cdot B^{-1} \cdot A \cdot I \cdot A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1} = A \cdot B^{-1} \cdot (A \cdot A^{-1}) \cdot B \cdot A^{-1} = A \cdot B^{-1} \cdot I \cdot B \cdot A^{-1} = A \cdot (B^{-1} \cdot B) \cdot A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = \boldsymbol{I}$
c) $(A \cdot B^{-1})^{-1}(B \cdot A^{-1})^{-1} = (B^{-1})^{-1} \cdot A^{-1} \cdot (A^{-1})^{-1} \cdot B^{-1} = B \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B^{-1} = B \cdot I \cdot B^{-1} = B \cdot B^{-1} = \boldsymbol{I}$
d) $(A+B)^{-1}(AB + B^2)(A^{-1} \cdot B)^{-1} = (A+B)^{-1}(AB + B^2)(B^{-1} \cdot (A^{-1})^{-1}) = (A+B)^{-1}(AB + B^2)(B^{-1} \cdot A) = (A+B)^{-1}(ABB^{-1}A + B^2B^{-1}A) =$

$(A+B)^{-1}(AIA+BBB^{-1}A) = (A+B)^{-1}(AA+BA) = (A+B)^{-1}(A+B)A = IA = \boldsymbol{A}$

10. Sean A, B y C las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

Calcule el valor de la matriz X en cada una de las siguientes expresiones:

a) $\boldsymbol{XA = B + I}$

b) $\boldsymbol{AX + B = C}$

c) $\boldsymbol{XA + B = 2C}$

d) $\boldsymbol{AX + BX = C}$

e) $\boldsymbol{XAB - XC = 2C}$

<u>Solución</u>

a) $XA = B + I \Rightarrow XAA^{-1} = (B+I)A^{-1} \Rightarrow XI = (B+I)A^{-1} \Rightarrow X = (B+I)A^{-1}$

$$(B+I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4-3}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = (B+I)A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 4 + 1\cdot(-3) & 3\cdot(-1) + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 4 + 2\cdot(-3) & 1\cdot(-1) + 2\cdot 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

b) $AX + B = C \Rightarrow AX = C - B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(C-B) \Rightarrow IX = A^{-1}(C-B) \Rightarrow X = A^{-1}(C-B)$

$$(C-B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(C-B) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4\cdot(-1) - 1\cdot 0 & 4\cdot 1 - 1\cdot 2 \\ -3\cdot(-1) + 1\cdot 0 & -3\cdot 1 + 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

c) $XA + B = 2C \Rightarrow XA = 2C - B \Rightarrow XAA^{-1} = (2C - B)A^{-1} \Rightarrow XI = (2C - B)A^{-1} \Rightarrow X = (2C - B)A^{-1}$

$$2C = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(2C - B) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X=(2C-B)A^{-1}=\begin{pmatrix}0&3\\1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-1\\-3&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0\cdot 4+3\cdot(-3) & 0\cdot(-1)+3\cdot 1\\ 1\cdot 4+5\cdot(-3) & 1\cdot(-1)+5\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-9}&\mathbf{3}\\ \mathbf{-11}&\mathbf{4}\end{pmatrix}$$

d) $AX+BX=C\Rightarrow (A+B)X=C\Rightarrow (A+B)^{-1}(A+B)X=(A+B)^{-1}C\Rightarrow IX=(A+B)^{-1}C\Rightarrow X=(A+B)^{-1}C$

$$(A+B)=\begin{pmatrix}1&1\\3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\4&5\end{pmatrix}$$

$$(A+B)^{-1}=\frac{1}{|A+B|}\begin{pmatrix}5&-2\\-4&3\end{pmatrix}=\frac{1}{15-8}\begin{pmatrix}5&-2\\-4&3\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}5&-2\\-4&3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}5/7&-2/7\\-4/7&3/7\end{pmatrix}$$

$$X=(A+B)^{-1}C=\begin{pmatrix}\frac{5}{7}&-\frac{2}{7}\\-\frac{4}{7}&\frac{3}{7}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{5}{7}\cdot 1-\frac{2}{7}\cdot 1 & \frac{5}{7}\cdot 2-\frac{2}{7}\cdot 3\\ -\frac{4}{7}\cdot 1+\frac{3}{7}\cdot 1 & -\frac{4}{7}\cdot 2+\frac{3}{7}\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{\frac{3}{7}}&\mathbf{\frac{4}{7}}\\ -\mathbf{\frac{1}{7}}&\mathbf{\frac{1}{7}}\end{pmatrix}$$

e) $XAB-XC=2C\Rightarrow X(AB-C)=2C\Rightarrow X(AB-C)=2C\Rightarrow X(AB-C)(AB-C)^{-1}=2C(AB-C)^{-1}\Rightarrow XI=2C(AB-C)^{-1}\Rightarrow X=2C(AB-C)^{-1}$

$$AB=\begin{pmatrix}1&1\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\10&7\end{pmatrix}$$

$$(AB-C)=\begin{pmatrix}3&2\\10&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\9&4\end{pmatrix}$$

$$(AB-C)^{-1}=\frac{1}{|AB-C|}\begin{pmatrix}4&0\\-9&2\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}4&0\\-9&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2&0\\-9/8&1/4\end{pmatrix}$$

$$X=2C(AB-C)^{-1}=\begin{pmatrix}2&4\\2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\-\frac{9}{8}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\left(-\frac{9}{8}\right) & 2\cdot 0+4\cdot\frac{1}{4}\\ 2\cdot\frac{1}{2}+6\cdot\left(-\frac{9}{8}\right) & 2\cdot 0+6\cdot\frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{28}{8}&1\\-\frac{46}{8}&\frac{6}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\mathbf{\frac{7}{2}}&\mathbf{1}\\-\mathbf{\frac{23}{4}}&\mathbf{\frac{3}{2}}\end{pmatrix}$$

11. Calcule el rango de las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{-3}\\ \mathbf{-6} & \mathbf{9}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{6}\\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2}\\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{4}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{7}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3}\\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{7} & \mathbf{7}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{-2} & \mathbf{6} & \mathbf{-4}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{5} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

Solución

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -6 & 9\end{pmatrix}$$

$$|2|=2\neq 0$$

$$\begin{vmatrix}2 & -3\\ -6 & 9\end{vmatrix}=2\cdot 9-(-3)\cdot(-6)=18-18=0$$

$$r(A)=\mathbf{1}$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 6\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$|1|=1\neq 0$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

$$r(B)=\mathbf{2}$$

$$C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$|1|=1\neq 0$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=1+6-2-4=1\neq 0$$

$$r(C)=\mathbf{3}$$

$$D=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 7\\ 1 & 0 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 7 & 7\end{pmatrix}$$

$$|2|=2\neq 0$$

$$\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=2+1=3\neq 0$$

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 7\end{vmatrix}=-3+7-4=0$$

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & 7\\ 1 & 0 & 3\\ 3 & 2 & 7\end{vmatrix}=-9+14-12+7=0$$

$$\begin{vmatrix}2 & 0 & 7\\ 1 & 1 & 3\\ 3 & 7 & 7\end{vmatrix}=14+49-21-42=0$$

$$\begin{vmatrix}-1 & 0 & 7\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & 7 & 7\end{vmatrix}=-7-14+21=0$$

$$r(D)=\mathbf{2}$$

$$E=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3 & -2\\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 4 & -2 & 6 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 5 & 4 & -1 & 5 & 0\end{pmatrix}$$

Podemos eliminar la fila 4 ya que todos sus elementos son iguales a 0.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3 & -2\\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 4 & -2 & 6 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 5 & 4 & -1 & 5 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3 & -2\\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 4 & -2 & 6 & -4\\ 5 & 4 & -1 & 5 & 0\end{pmatrix}$$

Además, también podemos eliminar la fila 3 por ser ésta el doble de la fila 1.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3 & -2\\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 4 & -2 & 6 & -4\\ 5 & 4 & -1 & 5 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3 & -2\\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 5 & 4 & -1 & 5 & 0\end{pmatrix}$$

Finalmente, eliminamos la fila 3 (fila 5 en la matriz original), ya que se puede escribir como combinación lineal de las filas 1 y 2.

$$Fila\ 3=Fila\ 1+2Fila\ 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0$$

$$r(E) = \mathbf{2}$$

HOJA 3: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1. Estudie los siguientes sistemas de ecuaciones lineales utilizando el Teorema de Rouché-Fröbenius.

a) $\begin{cases} \boldsymbol{x_1 + x_2 = 1} \\ \boldsymbol{x_2 + x_3 = 5} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \boldsymbol{x_1 + x_2 = 1} \\ \boldsymbol{2x_1 + 3x_2 = 2} \\ \boldsymbol{3x_1 + 4x_2 = 9} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \boldsymbol{5x_1 - 11x_2 + 9x_3 = 4} \\ \boldsymbol{3x_1 - 7x_2 + 7x_3 = k} \\ \boldsymbol{x_1 - x_2 - 3x_3 = -1} \end{cases}$ **, teniendo en cuenta los posibles valores de $\boldsymbol{k}$.**

d) $\begin{cases} \boldsymbol{cx_1 + x_2 + x_3 = 1} \\ \boldsymbol{x_1 + cx_2 + x_3 = c} \\ \boldsymbol{x_1 + x_2 + cx_3 = 2c} \end{cases}$ **, teniendo en cuenta los posibles valores de $\boldsymbol{c}$.**

<u>Solución</u>

a)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

$$r(A) = 1$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$|1| = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 1 = 4 \neq 0$$

$$r(A|b) = 2$$

Como el $r(A) = 1 \neq r(A|b) = 2$, el sistema es **INCOMPATIBLE**, y, por tanto, no tiene solución.

b)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 = 9 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$$

$$r(A) = 2$$

$$(A|b)=\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 4 & 9\end{array}\right)$$

$$|1| = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 4 & 9\end{vmatrix} = 27 + 8 + 6 - 9 - 8 - 18 = 6 \neq 0$$

$$r(A|b) = 3$$

Como el $r(A) = 2 \neq r(A|b) = 3$, el sistema es **INCOMPATIBLE**, y, por tanto, no tiene solución.

c)

$$\begin{cases}5x_1 - 11x_2 + 9x_3 = 4\\ 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 = k\\ x_1 - x_2 - 3x_3 = -1\end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix}5 & -11 & 9\\ 3 & -7 & 7\\ 1 & -1 & -3\end{pmatrix}$$

$$|5| = 5 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix}5 & -11\\ 3 & -7\end{vmatrix} = -35 + 33 = -2 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix}5 & -11 & 9\\ 3 & -7 & 7\\ 1 & -1 & -3\end{vmatrix} = 105 - 27 - 77 + 63 + 35 - 99 = 0$$

$$r(A) = 2$$

$$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c}5 & -11 & 9 & 4\\ 3 & -7 & 7 & k\\ 1 & -1 & -3 & -1\end{array}\right)$$

$$|5| = 5 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -11 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -35 + 33 = -2 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -11 & 4 \\ 3 & -7 & k \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 35 - 12 - 11k + 28 + 5k - 33 = 18 - 6k$$

$$18 - 6k = 0 \Rightarrow k = \frac{-18}{-6} = 3$$

Por tanto, si $k = 3$, entonces el determinante de $(A|b)$ es igual a 0 y el $r(A|b) = 2 = r(A) < 3 = \text{número de variables } (x_i)$. Por consiguiente, el sistema es **COMPATIBLE INDETERMINADO**, con $3 - 2 = 1$ grado de libertad, lo que indica que tiene infinitas soluciones.

Por el contrario, si $k \neq 3$, entonces el determinante de $(A|b)$ es diferente de 0 y el $r(A) = 2 \neq r(A|b) = 3$. Por lo que, en ese caso, el sistema será **INCOMPATIBLE**, lo que significa que no tiene solución.

d)

$$\begin{cases} cx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + cx_2 + x_3 = c \\ x_1 + x_2 + cx_3 = 2c \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} c & 1 & 1 \\ 1 & c & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} c & 1 & 1 \\ 1 & c & 1 \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix} = c^3 + 1 + 1 - c - c - c = c^3 - 3c + 2$$

$$c^3 - 3c + 2 = 0$$

Como hemos obtenido una ecuación de tercer grado tenemos que utilizar Ruffini para calcular sus raíces. Siempre que obtengamos una ecuación de grado mayor que 2 tendremos que utilizar este procedimiento.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & & -2 & 4 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$c^3 - 3c + 2 = (c + 2)(c^2 - 2c + 1)$$

$$c^2 - 2c + 1 = 0$$

$$c = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = 1$$

$$c^3 - 3c + 2 = (c+2)(c-1)(c-1)$$

De modo que si $c \neq -2$ y $c \neq 1$ entonces el determinante de A es diferente de 0 y $r(A) = 3 = r(A|b) = 3 = \text{número de variables } (x_i)$. El sistema es, por tanto, **COMPATIBLE DETERMINADO**, y tiene una única solución.

A continuación, vamos a ver qué pasa cuando $c = -2$.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|-2| = -2 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$$

Sabemos que cuando $c = -2$, entonces el $|A| = 0$, así que no necesitamos calcular este determinante otra vez.

$$r(A) = 2$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

$$|-2| = -2 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -16 + 1 - 2 + 2 - 4 + 4 = -15 \neq 0$$

$$r(A|b) = 3$$

Por consiguiente, cuando $c = -2$, $r(A) = 2 \neq r(A|b) = 3$. Y el sistema es **INCOMPATIBLE**, lo que significa que no tiene solución.

Finalmente, tenemos que estudiar qué pasa cuando $c = 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Todos los menores de orden 2 que podemos encontrar dentro de A son iguales a 0, así que el $r(A) = 1$.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$|1| = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 + 1 - 1 - 1 - 2 = 0$$

$$r(A|b) = 2$$

Cuando $c = 1$, $r(A) = 1 \neq r(A|b) = 2$, y el sistema es **INCOMPATIBLE**, por lo que no tiene solución.

2. Sean

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{8} & \mathbf{8} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Primero, escriba los siguientes sistemas de ecuaciones $\boldsymbol{Ax = b}$ y $\boldsymbol{Ax = 0}$. Después, utilizando operaciones con filas (método de eliminación de Gauss) explique por qué el primer sistema no tiene solución y el segundo tiene infinitas soluciones.

<u>Solución</u>

<u>$Ax = b$</u>

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 1 \\ 4x_1 + 8x_2 + 8x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Primero vamos a intercambiar las filas 1 y 3 para obtener un 1 en la primera posición de la primera fila de la matriz. Y después, utilizaremos sencillas operaciones con filas para reducirla.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$Fila\ 2 - 4Fila\ 1, Fila\ 3 - 2Fila\ 1,$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Una vez que hemos reducido la matriz ampliada, escribimos el sistema resultante.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 0 \neq -2 \\ 0 \neq -1 \end{cases}$$

Las filas 2 y 3 son falsas, de modo que el sistema es **INCOMPATIBLE**, lo que significa que no tiene solución.

<u>$Ax = 0$: SISTEMA HOMOGÉNEO</u>

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 + 8x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Del mismo modo que en el primer sistema que hemos resuelto, vamos a intercambiar las filas 1 y 3 para obtener un 1 en la primera posición de la matriz. Y después utilizaremos operaciones con filas para reducirla.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 8 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$Fila\ 2 - 4Fila\ 1, Fila\ 3 - 2Fila\ 1,$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 8 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Una vez que hemos reducido la matriz por Gauss, escribimos el sistema resultante.

$$\{x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$$

El sistema anterior es **COMPATIBLE INDETERMINADO**, con 3 (variables x_i) − 1 (ecuaciones linealmente independientes) = 2 grados de libertad. Por tanto, este sistema tiene infinitas soluciones. Recordad que los sistemas homogéneos siempre son compatibles.

A continuación, obtenemos la solución del sistema.

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = \boldsymbol{-2x_2 - 2x_3}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-2x_2 - 2x_3} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix}$$

3. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando la Regla de Cramer.

a) $\begin{cases} \boldsymbol{2x_1 + x_2 + x_3 = 7} \\ \boldsymbol{x_1 + 2x_3 = 7} \\ \boldsymbol{2x_1 + 2x_2 - x_3 = 4} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \boldsymbol{4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3} \\ \boldsymbol{2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2} \\ \boldsymbol{3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \boldsymbol{x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7} \\ \boldsymbol{4x_1 + 5x_2 + x_3 = 11} \\ \boldsymbol{7x_1 - 4x_2 - x_3 = 1} \end{cases}$

<u>Solución</u>

a)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_3 = 7 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Primero, tenemos que comprobar que, efectivamente, podemos utilizar la Regla de Cramer para resolver el sistema. Para ello, calcularemos el determinante de la matriz A, y si es diferente de 0 podremos seguir con el ejercicio.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 4 - 8 + 1 = -1 \neq 0$$

Una vez que hemos comprobado que podemos utilizar este método, pasamos a resolver el sistema.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{14 + 8 - 28 + 7}{-1} = \boldsymbol{-1}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-14+4+28-14-16+7}{-1} = \mathbf{5}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{14+14-28-4}{-1} = \mathbf{4}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Al igual que en el caso anterior, comprobamos que podemos utilizar la Regla de Cramer.

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 24+24+24-27-64-8 = -27 \neq 0$$

A continuación, calculamos las soluciones del sistema.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{18+24+8-9-48-8}{-27} = \frac{-15}{-27} = \mathbf{\frac{5}{9}}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{16+6+36-18-16-12}{-27} = \frac{12}{-27} = -\mathbf{\frac{4}{9}}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{12 + 24 + 12 - 27 - 32 - 4}{-27} = \frac{-15}{-27} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}} \\ -\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}} \\ \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}} \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 11 \\ 7x_1 - 4x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

As in the two systems above, we check that it is possible to use Cramer's rule.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 32 + 14 - 70 + 4 + 8 = -81 \neq 0$$

Now, we compute the solution of the system.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 11 & 5 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & -4 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-35 - 88 + 2 - 10 + 22 + 28}{-81} = \frac{-81}{-81} = \mathbf{1}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 4 & 11 & 1 \\ 7 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & -4 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-11 + 8 + 49 - 154 - 1 + 28}{-81} = \frac{-81}{-81} = \mathbf{1}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 4 & 5 & 11 \\ 7 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & -4 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{5 - 112 + 154 - 245 + 44 - 8}{-81} = \frac{-162}{-81} = \mathbf{2}$$

$$x = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

4. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales realizando operaciones con filas (método de eliminación de Gauss) sobre la matriz ampliada de cada uno de ellos.

a) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 = 80 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 25 \\ 5x_1 + 9x_3 = 185 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 7 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 5 \\ 6x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 38 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 17 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 10 \\ x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 14x_4 = 14 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 8 \\ x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 13x_4 = 12 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ ax_1 - x_2 - 5x_3 = -3 \end{cases}$ **, teniendo en cuenta los posibles valores de a.**

<u>Solución</u>

a)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 = 80 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 25 \\ 5x_1 + 9x_3 = 185 \end{cases}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 80 \\ 3 & 2 & -1 & 25 \\ 5 & 0 & 9 & 185 \end{array}\right)$$

$Fila\ 2 - 3Fila\ 1, Fila\ 3 - 5Fila\ 1, Fila\ 3 - Fila\ 2, \frac{1}{5}Fila\ 2.$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 80 \\ 3 & 2 & -1 & 25 \\ 5 & 0 & 9 & 185 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 80 \\ 0 & 5 & -16 & -215 \\ 5 & 0 & 9 & 185 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 80 \\ 0 & 5 & -16 & -215 \\ 0 & 5 & -16 & -215 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 80 \\ 0 & 5 & -16 & -215 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 80 \\ 0 & 1 & -16/5 & -43 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

A continuación, escribimos el sistema resultante y calculamos su solución. Como hemos obtenido una fila de ceros, eso significa que tendremos que dejar una variable libre para escribir la solución. O lo que es lo mismo, el sistema será **COMPATIBLE INDETERMINADO**, con un grado de libertad.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 = 80 \\ x_2 - \dfrac{16}{5}x_3 = -43 \end{cases}$$

Dejamos libre x_3. Y despejamos el valor de las demás variables en función de ésta.

$$x_2 - \frac{16}{5}x_3 = -43 \Rightarrow x_2 = \mathbf{-43 + \frac{16}{5}}\boldsymbol{x_3}$$

$$x_1 - x_2 + 5x_3 = 80 \Rightarrow x_1 = 80 + x_2 - 5x_3 = 80 - 43 + \frac{16}{5}x_3 - 5x_3 = \mathbf{37 - \frac{9}{5}}\boldsymbol{x_3}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{37 - \frac{9}{5}}\boldsymbol{x_3} \\ \mathbf{-43 + \frac{16}{5}}\boldsymbol{x_3} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 7 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 5 \\ 6x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 38 \end{cases}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & -1 & 5 \\ 6 & 2 & 6 & 38 \end{array}\right)$$

En primer lugar, intercambiamos las filas 1 y 2 para tener un 0 en la primera posición de la segunda fila de la matriz. Y después, continuamos simplificando la matriz mediante operaciones con filas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & -1 & 5 \\ 6 & 2 & 6 & 38 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 6 & 2 & 6 & 38 \end{array}\right)$$

$\frac{1}{3}Fila\ 1, Fila\ 3 - 6Fila\ 1, Fila\ 3 - 4Fila\ 2,\ \frac{1}{5}Fila\ 2.$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 6 & 2 & 6 & 38 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & -1/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 6 & 2 & 6 & 38 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & -1/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 8 & 28 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & -1/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Escribimos el sistema equivalente y lo resolvemos, dejando libre la variable x_3.

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = \frac{5}{3} \\ x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x_3}$$

$$x_2 + 2x_3 = 7 \Rightarrow x_2 = \mathbf{7 - 2}\boldsymbol{x_3}$$

$$x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = \frac{5}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}(7 - 2x_3) + \frac{1}{3}x_3 = \mathbf{4} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{x_3}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{x_3} \\ \mathbf{7 - 2}\boldsymbol{x_3} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 17 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 10 \\ x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 17 \\ 1 & 5 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

En primer lugar, vamos a intercambiar las filas 1 y 3 para tener un 1 en la primera posición de la primera fila de la matriz. Y después, continuaremos simplificando la matriz mediante operaciones con filas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 17 \\ 1 & 5 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 4 & 10 \\ 2 & 3 & -1 & 17 \\ -1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

$Fila\ 2 - 2Fila\ 1$, $Fila\ 3 + Fila\ 1$, $Fila\ 3 + Fila\ 2$, $-\frac{1}{7}Fila\ 2$, $Fila\ 4 - Fila\ 2$, $-\frac{7}{16}Fila\ 4$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 4 & 10 \\ 2 & 3 & -1 & 17 \\ -1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 4 & 10 \\ 0 & -7 & -9 & -3 \\ -1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 4 & 10 \\ 0 & -7 & -9 & -3 \\ 0 & 7 & 9 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 4 & 10 \\ 0 & -7 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 9/7 & 3/7 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&5&4&10\\0&1&9/7&3/7\\0&0&0&10\\0&0&-16/7&32/7\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&5&4&10\\0&1&9/7&3/7\\0&0&0&10\\0&0&1&-2\end{array}\right)$$

A continuación, escribimos el sistema equivalente.

$$\begin{cases}x_1+5x_2+4x_3=10\\ x_2+\frac{9}{7}x_3=\frac{3}{7}\\ 0=10\\ x_3=-2\end{cases}$$

En la 3ª fila encontramos una contradicción ya que $0\neq 10$, y, por tanto, el sistema es **INCOMPATIBLE**, lo que significa que no tiene solución.

d)

$$\begin{cases}2x_1+10x_2+9x_3+14x_4=14\\ x_1+3x_2-2x_3+x_4=1\\ x_1+5x_2+3x_3+7x_4=8\\ x_1+7x_2+5x_3+13x_4=12\end{cases}$$

$$(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c}2&10&9&14&14\\1&3&-2&1&1\\1&5&3&7&8\\1&7&5&13&12\end{array}\right)$$

Primero, intercambiamos las filas 1 y 2 para tener un 1 en la primera posición de la primera fila de la matriz ampliada. A continuación, seguiremos reduciendo la matriz por medio del método de eliminación de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}2&10&9&14&14\\1&3&-2&1&1\\1&5&3&7&8\\1&7&5&13&12\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-2&1&1\\2&10&9&14&14\\1&5&3&7&8\\1&7&5&13&12\end{array}\right)$$

$Fila\ 2-2Fila\ 1, Fila\ 3-Fila\ 1$, $Fila\ 4-Fila\ 1$, $Fila\ 4-Fila\ 2$, $\frac{1}{4}Fila\ 2$, $Fila\ 3-2Fila\ 2$, $-\frac{2}{3}Fila\ 3$, $Fila\ 4+6Fila\ 3$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-2&1&1\\2&10&9&14&14\\1&5&3&7&8\\1&7&5&13&12\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-2&1&1\\0&4&13&12&12\\1&5&3&7&8\\1&7&5&13&12\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-2&1&1\\0&4&13&12&12\\0&2&5&6&7\\1&7&5&13&12\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-2&1&1\\0&4&13&12&12\\0&2&5&6&7\\0&4&7&12&11\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-2&1&1\\0&4&13&12&12\\0&2&5&6&7\\0&0&-6&0&-1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-2&1&1\\0&1&13/4&3&3\\0&2&5&6&7\\0&0&-6&0&-1\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-2&1&1\\0&1&13/4&3&3\\0&0&-3/2&0&1\\0&0&-6&0&-1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-2&1&1\\0&1&13/4&3&3\\0&0&1&0&-2/3\\0&0&-6&0&-1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&-2&1&1\\0&1&13/4&3&3\\0&0&1&0&-2/3\\0&0&0&0&-5\end{array}\right)$$

$$\begin{cases}x_1+3x_2-2x_3+x_4=1\\ x_2+\dfrac{13}{4}x_3+3x_4=3\\ x_3=-\dfrac{2}{3}\\ 0=-5\end{cases}$$

En este caso, la 4ª fila es falsa, ya que $0\neq -5$. Por consiguiente, el sistema es **INCOMPATIBLE** y no tiene solución.

e)

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=a\\ 2x_1+x_2+2x_3=1\\ ax_1-x_2-5x_3=-3\end{cases}$$

$$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\2&1&2&1\\a&-1&-5&-3\end{array}\right)$$

$Fila\ 2-2Fila\ 1$, $Fila\ 3-aFila\ 1$, $-Fila\ 2$, $Fila\ 3-(-1-a)Fila\ 2$, $\frac{1}{-5-a}Fila\ 3$, $Fila\ 1-Fila\ 3$, $Fila\ 1-Fila\ 2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\2&1&2&1\\a&-1&-5&-3\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\0&-1&0&1-2a\\a&-1&-5&-3\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\0&-1&0&1-2a\\0&-1-a&-5-a&-3-a^2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\0&1&0&2a-1\\0&-1-a&-5-a&-3-a^2\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\0&1&0&2a-1\\0&0&-5-a&a^2+a-4\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\0&1&0&2a-1\\0&0&1&\dfrac{a^2+a-4}{-5-a}\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&\dfrac{-2a^2-6a+4}{-5-a}\\0&1&0&2a-1\\0&0&1&\dfrac{a^2+a-4}{-5-a}\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\dfrac{3a-1}{-5-a}\\0&1&0&2a-1\\0&0&1&\dfrac{a^2+a-4}{-5-a}\end{array}\right)$$

La solución del sistema es la siguiente.

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3a-1}{-5-a} \\ x_2 = 2a-1 \\ x_3 = \dfrac{a^2+a-4}{-5-a} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathbf{3}\boldsymbol{a}-\mathbf{1}}{-\mathbf{5}-\boldsymbol{a}} \\ \mathbf{2}\boldsymbol{a}-\mathbf{1} \\ \dfrac{\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{a}-\mathbf{4}}{-\mathbf{5}-\boldsymbol{a}} \end{pmatrix}$$

5. En el siguiente sistema

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 + x_2 - x_3 = 2} \\ \boldsymbol{x_1 + 2x_2 + x_3 = 3} \\ \boldsymbol{x_1 + x_2 + (a^2-5)x_3 = a} \end{cases},$$

Calcule el valor del parámetro $\boldsymbol{a}$ para que el sistema sea

d) compatible determinado, y calcule la solución del sistema.

e) compatible indeterminado, y calcule todas las soluciones del sistema.

f) incompatible.

<u>Solución</u>

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + (a^2-5)x_3 = a \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & (a^2-5) \end{pmatrix}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & (a^2-5) & a \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & (a^2-5) \end{vmatrix} = 2(a^2-5) - 1 + 1 + 2 - 1 - (a^2-5) =$$

$$= (a^2-5) + 1 = a^2 - 4$$

$$a^2 - 4 = 0$$

$$a = \pm\sqrt{4} = \begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases}$$

$$a^2 - 4 = (a-2)(a+2)$$

d) Si $a \neq 2$ y $a \neq -2$, entonces el determinante de A es diferente de 0 y $r(A) = 3 = r(A|b) = 3 =$ nº de variables (x_i). Por tanto, el sistema es **COMPATIBLE DETERMINADO**.

Ahora, vamos a calcular la solución del sistema utilizando la regla de Cramer.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 1 & (a^2-5) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & (a^2-5) \end{vmatrix}} = \frac{4(a^2-5) - 3 + a + 2a - 2 - 3(a^2-5)}{(a-2)(a+2)} =$$

$$= \frac{(a^2-5) + 3a - 5}{(a-2)(a+2)} = \frac{a^2+3a-10}{(a-2)(a+2)}$$

$$a^2 + 3a - 10 = 0$$

$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} = \begin{cases} \dfrac{4}{2} = 2 \\ \dfrac{-3-7}{2} = -5 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{a^2+3a-10}{(a-2)(a+2)} = \frac{(a-2)(a+10)}{(a-2)(a+2)} = \boldsymbol{\frac{(a+10)}{(a+2)}}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & a & (a^2-5) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & (a^2-5) \end{vmatrix}} = \frac{3(a^2-5) - a + 2 + 3 - a - 2(a^2-5)}{(a-2)(a+2)} =$$

$$= \frac{(a^2-5) - 2a + 5}{(a-2)(a+2)} = \frac{a^2-2a}{(a-2)(a+2)} = \frac{a(a-2)}{(a-2)(a+2)} = \boldsymbol{\frac{a}{(a+2)}}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & (a^2-5) \end{vmatrix}} = \frac{2a + 2 + 3 - 4 - 3 - a}{(a-2)(a+2)} = \frac{a-2}{(a-2)(a+2)} = \boldsymbol{\frac{1}{(a+2)}}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\dfrac{(a+10)}{(a+2)}} \\ \boldsymbol{\dfrac{a}{(a+2)}} \\ \boldsymbol{\dfrac{1}{(a+2)}} \end{pmatrix}$$

Ahora, vamos a ver qué pasa cuando $a = 2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

Ya sabemos que cuando $a = 2$, el $|A| = 0$, así que no hace falta volver a calcularlo.

$$r(A) = 2$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$|1| = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 2 + 3 - 4 - 3 - 2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 - 3 - 2 + 3 + 2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 4 - 3 - 2 + 3 + 4 = 0$$

Todos los determinantes de tercer orden de $(A|b)$ son iguales a 0. Luego, $r(A|b) = 2$.

e) Así, cuando $a = 2$, $r(A) = 2 = r(A|b) < 3$ (número de variables x_i). Luego, el sistema es **COMPATIBLE INDETERMINADO, con 3 - 2 = 1 grado de libertad**.

El siguiente paso consiste en calcular las infinitas soluciones del sistema. Como $|A| = 0$, en este caso, no podemos aplicar la Regla de Cramer, por tanto, utilizaremos el método de eliminación de Gauss para resolverlo.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$Fila\ 2 - Fila\ 1,\ Fila\ 3 - Fila\ 1.$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 1 & 2 & 1 & | & 3 \\ 1 & 1 & -1 & | & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 1 & 1 & -1 & | & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Una vez reducida la matriz ampliada, escribimos el sistema equivalente y lo resolvemos. Al haber obtenido una fila entera de ceros, tendremos que dejar una variable libre para calcular su solución. Eso quiere decir que, en este caso, el sistema es **COMPATIBLE INDETERMINADO**, con 3 – 2 = 1 grado de libertad.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ \quad x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x_3}$$
$$x_2 + 2x_3 = 3 \Rightarrow x_2 = \boldsymbol{3 - 2x_3}$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 + x_3 = -(3 - 2x_3) + x_3 = \boldsymbol{3x_3 - 3}$$

La solución del sistema es la siguiente.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{3x_3 - 3} \\ \boldsymbol{3 - 2x_3} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix}$$

Finalmente, tenemos que estudiar qué pasa cuando $a = -2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

Anteriormente, vimos como cuando $a = -2$ el $|A| = 0$, de modo que no hace falta volver a calcular su determinante.

$$r(A) = 2$$

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 1 & 2 & 1 & | & 3 \\ 1 & 1 & -1 & | & -2 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 2 + 3 - 4 - 3 + 2 = -4 \neq 0$$

$$r(A|b) = 3$$

f) Luego, cuando $a = -2, r(A) = 2 \neq r(A|b) = 3$. Por consiguiente, el sistema es **INCOMPATIBLE** y no tiene solución**.**

6. Resuelva los siguientes sistemas homogéneos:

a) $\begin{cases} \boldsymbol{2x_1 + x_2 + x_3 = 0} \\ \boldsymbol{x_1 + 2x_2 + x_3 = 0} \\ \boldsymbol{x_1 + x_2 + 2x_3 = 0} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \boldsymbol{ax_1 + x_2 + x_3 = 0} \\ \boldsymbol{x_1 + ax_2 + x_3 = 0} \\ \boldsymbol{x_1 + x_2 + ax_3 = 0} \end{cases}$**, teniendo en cuenta los posibles valores de $\boldsymbol{a}$.**

Solución

a)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

En primer lugar, como en casos anteriores, vamos a intercambiar las filas 1 y 2, para tener un 1 en la primera posición de la primera fila de la matriz. Y después, continuaremos simplificando la matriz mediante operaciones sencillas con filas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$Fila\ 2 - 2Fila\ 1, Fila\ 3 - Fila\ 1, -\frac{1}{3}Fila\ 2, Fila\ 3 + Fila\ 2, \frac{3}{4}Fila\ 3.$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

A continuación, escribiremos el sistema equivalente y lo resolveremos. Recordad que un sistema homogéneo siempre tiene solución, por tanto, siempre será COMPATIBLE. Si tiene solución única, es decir, la trivial, en la que todas las variables son iguales a 0, será COMPATIBLE DETERMINADO. Y si, además de la trivial, tiene infinitas soluciones, será COMPATIBLE INDETERMINADO.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ \quad x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ \quad\quad x_3 = 0 \end{cases}$$

$$x_3 = \mathbf{0}$$

$$x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{3}x_3 = \mathbf{0}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 - x_3 = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

En este caso, el sistema homogéneo es **COMPATIBLE DETERMINADO**, ya que la única solución posible es la trivial.

También, podríais haber resuelto el sistema utilizando la Regla de Cramer, o el método de la inversa, y habríais obtenido la misma solución.

b)

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 + 1 + 1 - a - a - a = a^3 - 3a + 2$$

$$a^3 - 3a + 2 = 0$$

Como hemos obtenido una ecuación de tercer grado, a continuación utilizamos Ruffini para calcular sus raíces.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & & -2 & 4 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$a^3 - 3a + 2 = (a + 2)(a^2 - 2a + 1)$$

$$a^2 - 2a + 1 = 0$$

$$a = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = 1$$

$$a^3 - 3a + 2 = (a + 2)(a - 1)(a - 1)$$

Luego, si $a \neq -2$ y $a \neq 1$, entonces el determinante de A es diferente de 0 y $r(A) = 3 = r(A|b) = 3 = \text{nº de variables } (x_i)$. Es decir, el sistema es **COMPATIBLE DETERMINADO**.

El siguiente paso es, por tanto, calcular la solución del mismo. Para ello, vamos a utilizar la Regla de Cramer. Aunque al tratarse de un sistema homogéneo compatible determinado, sabemos de antemano, que la única solución posible de este sistema será la trivial, el decir, aquella en la que todas las variables son iguales a 0.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}} = \frac{0}{a^3 - 3a + 2} = \mathbf{0}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}} = \frac{0}{a^3 - 3a + 2} = \mathbf{0}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}} = \frac{0}{a^3 - 3a + 2} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Ahora, vamos a ver qué pasa cuando $a = -2$.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|-2| = -2 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$$

Ya sabemos que cuando $c = -2$, el $|A| = 0$, así que no necesitamos volver a calcularlo.

$$r(A) = 2$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$|-2| = -2 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Todos los determinantes de tercer orden de $(A|b)$ son iguales a 0. Luego, $r(A|b) = 2$.

Luego, cuando $c = -2$, $r(A) = 2 = r(A|b) < 3$ ($\text{nº de variables } x_i$). Por tanto, el sistema es **COMPATIBLE INDETERMINADO, con 3 - 2 = 1 grado de libertad**.

A continuación, vamos a calcular la solución del sistema. En este caso, el $|A| = 0$, y por eso sólo podemos utilizar el método de reducción por filas (eliminación de Gauss).

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Vamos a comenzar intercambiando las filas 1 y 2 para conseguir un 1 en la primera posición de la primera fila de la matriz. Después, utilizaremos el método de eliminación de Gauss para simplificarla.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$Fila\ 2 + 2Fila\ 1, Fila\ 3 - Fila\ 1, Fila\ 3 + Fila\ 2, -\frac{1}{3}Fila\ 2.$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

A continuación, escribimos el sistema equivalente y lo resolvemos. Al haber obtenido una fila entera de ceros, tendremos que dejar una variable libre para poder calcular su solución. Luego, en este caso, el sistema es **COMPATIBLE INDETERMINADO**, con 1 grado de libertad.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \quad x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x_3}$$
$$x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \boldsymbol{x_3}$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 2x_2 - x_3 = \boldsymbol{x_3}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_3} \\ \boldsymbol{x_3} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix}$$

Finalmente, tenemos que estudiar qué pasa cuando $a = 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Todos los determinantes de 2º orden de A son iguales a 0. Luego, $r(A) = 1$.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$|1| = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Todos los determinantes de segundo orden de $(A|b)$ son iguales a 0, así que el $r(A|b) = 1$.

Luego, cuando $a = 1$, $r(A) = 1 = r(A|b) < 3(\text{nº de variables } x_i)$. Por consiguiente, el sistema es **COMPATIBLE INDETERMINADO con 3 – 1 = 2 grados de libertad**.

A continuación, tenemos que calcular la solución del sistema. Al igual que en el caso anterior, solo podemos utilizar el método de Gauss para resolverlo, ya que el $|A| = 0$.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$Fila\ 2 - Fila\ 1, Fila\ 3 - Fila\ 1.$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ahora, escribimos el sistema equivalente. En este caso, hay dos filas de ceros, luego, como veíamos anteriormente, el sistema será COMPATIBLE INDETERMINADO con 2 grados de libertad. Y, por tanto, tendremos que dejar 2 variables libres para calcular su solución.

$$\{x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$\boldsymbol{x_2}$$
$$\boldsymbol{x_3}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_3}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_3} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix}$$

HOJA 4: AUTOVALORES, AUTOVECTORES Y DIAGONALIZACIÓN

1. Calcule los autovalores y autovectores de las siguientes matrices:

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

Solución

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, tenemos que escribir el polinomio característico.

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 2 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)(-\lambda) - 2(-1-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda+\lambda^2) + 2 + 2\lambda = \lambda - \lambda^2 + \lambda^2 - \lambda^3 + 2 + 2\lambda = -\lambda^3 + 3\lambda + 2$$

$$-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$$

Utilizamos Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & & -2 & -4 & -2 \\ \hline & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\lambda_1 = \mathbf{2}$$

$$-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(-\lambda^2 - 2\lambda - 1)$$

$$-\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot(-1)\cdot(-1)}}{-2} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{2 \pm 0}{-2} = \mathbf{-1}$$

Ya podemos factorizar el polinomio característico anterior.

$$-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2$$

Como se puede observar, $\lambda_1 = 2$ tiene multiplicidad algebraica igual a 1. Sin embargo, $\lambda_2 = -1$ tiene multiplicidad algebraica igual a 2.
A continuación, calculamos los autovectores.

$\boldsymbol{\lambda_1 = 2}$

$$(A - 2I_n)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 0 & 2 \\ 2 & -1-2 & 1 \\ 1 & 0 & 0-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, intercambiamos las filas 1 y 3, para tener un 1 en la primera posición de la matriz. Después, continuamos simplificando el sistema utilizando operaciones con filas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$Fila\ 3 + Fila\ 1, Fila\ 2 - 2 \cdot Fila\ 1, -\frac{1}{3} Fila\ 2.$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1/3 & -5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por consiguiente, la solución del sistema es

$$\boldsymbol{x_3}$$
$$\frac{1}{3}x_2 - \frac{5}{3}x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \boldsymbol{5x_3}$$
$$x_1 - 2x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = \boldsymbol{2x_3}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{2x_3} \\ \boldsymbol{5x_3} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_3} \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Este autovalor tiene multiplicidad geométrica igual a 1 (la base está formada por un único autovector).

$\boldsymbol{\lambda_2 = -1}$

$$(A + I_n)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1+1 & 0 & 2 \\ 2 & -1+1 & 1 \\ 1 & 0 & 0+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, intercambiamos las filas 1 y 3, para tener un 1 en la primera posición de la matriz. Después, continuamos simplificando el sistema utilizando operaciones con filas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$Fila\ 2 - 2 \cdot Fila\ 1$, $Fila\ 3 - 2 \cdot Fila\ 1$, $-Fila\ 2$. Después intercambiamos las filas 2 y 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Por consiguiente, la solución del sistema es

$$x_3 = \mathbf{0}$$
$$\boldsymbol{x_2}$$
$$x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_3 = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_2}\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Como se puede observar, $\lambda_2 = 1$ tiene multiplicidad algebraica igual a 2 y geométrica igual a 1, ya que la base que acabamos de obtener está compuesta por un único autovector. Por tanto, A no es diagonalizable.

b)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, tenemos que escribir el polinomio característico.

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) - (2-\lambda) =$$

$$= (-2-\lambda+\lambda^2)(-1-\lambda)-2+\lambda = 2+\lambda-\lambda^2+2\lambda+\lambda^2-\lambda^3-2+\lambda =$$

$$= -\lambda^3+4\lambda$$

$$-\lambda^3+4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(-\lambda^2+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \mathbf{0} \\ -\lambda^2+4=0 \Rightarrow \lambda^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = \mathbf{2} \\ \lambda_3 = \mathbf{-2} \end{cases} \end{cases}$$

Ya podemos factorizar el polinomio característico anterior

$$-\lambda^3+4\lambda = \lambda(\lambda-2)(\lambda+2)$$

Como podemos observar, los 3 autovalores, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = -2$, tienen multiplicidad algebraica igual a 1.

A continuación, calculamos los autovectores.

$\boldsymbol{\lambda_1 = 0}$

$$(A-0I_n)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, intercambiamos las filas 1 y 3, para tener un 1 en la primera posición de la matriz. Después, continuamos simplificando el sistema utilizando operaciones con filas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$Fila\ 3 + Fila\ 1, Fila\ 3 - 2 \cdot Fila\ 2, \frac{1}{2} Fila\ 2.$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$\boldsymbol{x_3}$$
$$x_2 = \mathbf{0}$$
$$x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -4x_2 + x_3 = 0 + x_3 = \boldsymbol{x_3}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_3} \\ \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_3}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Este autovalor tiene multiplicidad geométrica igual a 1 (la base está formada por un único autovector).

$\boldsymbol{\lambda_2 = 2}$

$$(A - 2I_n)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1-2 & 0 & 1 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 1 & 4 & -1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, intercambiamos las filas 1 y 3, para tener un 1 en la primera posición de la matriz. Después, continuamos simplificando el sistema mediante operaciones con filas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$Fila\ 3 + 3 \cdot Fila\ 1, \frac{1}{12} Fila\ 2.$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -8 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$\boldsymbol{x_3}$$
$$x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \boldsymbol{\frac{2}{3}x_3}$$
$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -4x_2 + 3x_3 = -\frac{8}{3}x_3 + 3x_3 = \boldsymbol{\frac{1}{3}x_3}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{1}{3}x_3} \\ \boldsymbol{\frac{2}{3}x_3} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_3}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{1}{3}} \\ \boldsymbol{\frac{2}{3}} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

Este autovalor tiene multiplicidad geométrica igual a 1 (la base está formada por un único autovector).

$\boldsymbol{\lambda_2 = -2}$

$$(A + 2I_n)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1+2 & 0 & 1 \\ 0 & 2+2 & 0 \\ 1 & 4 & -1+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$Fila\ 3 - Fila\ 1, Fila\ 3 - Fila\ 2, \frac{1}{4} \cdot Fila\ 2.$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$\boldsymbol{x_3}$$
$$x_2 = \mathbf{0}$$
$$x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -\boldsymbol{x_3}$$

$$\begin{pmatrix} -\boldsymbol{x_3} \\ \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_3}\begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Este autovalor tiene multiplicidad geométrica igual a 1 (la base está formada por un único autovector).

Luego, en este caso, A es diagonalizable ya que para todos los autovalores, la multiplicidad algebraica (1) coincide con la geométrica (1).

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Considere las matrices que se muestran a continuación:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

a) Razone si cada una de estas matrices es diagonalizable.

b) Si lo es, escriba A de la forma $A = PDP^{-1}$.

<u>Solución</u>

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

En primer lugar, tenemos que escribir el polinomio característico.

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 35 = 0$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-35)}}{2} = \frac{2 \pm 12}{2} = \begin{cases} 1 - \lambda \Rightarrow \lambda_1 = \mathbf{1} \\ -1 - \lambda \Rightarrow \lambda_2 = \mathbf{-1} \end{cases}$$

Ya podemos factorizar el polinomio característico anterior.

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

Como se puede observar, $\lambda_1 = 1$ tiene multiplicidad algebraica igual a 1, al igual que $\lambda_2 = -1$.

A continuación, calculamos los autovectores.

$\boldsymbol{\lambda_1 = 1}$

$$(A - I_n)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-1 & -1 \\ 0 & -1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-Fila\ 1, Fila\ 2 + 2 \cdot Fila\ 1.$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$\boldsymbol{x_1}$$
$$x_2 = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_1} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Este autovalor tiene multiplicidad geométrica igual a 1 (la base está formada por un único autovector).

$\boldsymbol{\lambda_2 = -1}$

$$(A + I_n)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1+1 & -1 \\ 0 & -1+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2}Fila\ 1$, $Fila\ 2 - 9 \cdot Fila\ 1$, $-\frac{1}{2}Fila\ 1$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$\boldsymbol{x_2}$$

$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}x_2}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{1}{2}x_2} \\ \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{1}{2}} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Este autovalor tiene multiplicidad geométrica igual a 1 (la base está formada por un único autovector).

Luego, en este caso, A es diagonalizable ya que para todos los autovalores, la multiplicidad algebraica (1) coincide con la geométrica (1).

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente,

$$P^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

En primer lugar, tenemos que escribir el polinomio característico.

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda) - 1 = 1 - \lambda - \lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)\lambda = 0 \begin{cases} \lambda_1 = \mathbf{0} \\ \lambda - 2 \Rightarrow \lambda_2 = \mathbf{2} \end{cases}$$

Ya podemos factorizar el polinomio característico anterior.

$$\lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2)$$

Como se puede observar, $\lambda_1 = 0$ tiene multiplicidad algebraica igual a 1, al igual que $\lambda_2 = 2$.

A continuación, calculamos los autovectores.

$\boldsymbol{\lambda_1 = 0}$

$$(A - 0I_n)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-0 & -1 \\ -1 & 1-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$Fila\ 2 + Fila\ 1, Fila\ 2 + 2 \cdot Fila\ 1.$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$\boldsymbol{x_2}$$

$$x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \boldsymbol{x_2}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_2} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Este autovalor tiene multiplicidad geométrica igual a 1 (la base está formada por un único autovector).

$\boldsymbol{\lambda_2 = 2}$

$$(A - 2I_n)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ -1 & 1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-Fila\ 1, Fila\ 2 - Fila\ 1.$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$\boldsymbol{x_2}$$

$$x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\boldsymbol{x_2}$$

$$\begin{pmatrix} -\boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_2}\begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Este autovalor tiene multiplicidad geométrica igual a 1 (la base está formada por un único autovector).

Luego, en este caso, A es diagonalizable ya que para todos los autovalores, la multiplicidad algebraica (1) coincide con la geométrica (1).

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente,

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

En primer lugar, tenemos que escribir el polinomio característico.

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) - 8(2-\lambda) =$$

$$= (2 - 3\lambda + \lambda^2)(-1-\lambda) - 16 + 8\lambda = -2 + \lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 - 16 + 8\lambda$$
$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 9\lambda - 18$$

Utilizamos Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 2 & 9 & -18 \\ 2 & & -2 & 0 & 18 \\ \hline & -1 & 0 & 9 & 0 \end{array}$$

$$\lambda_1 = \mathbf{2}$$

$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 + 9\lambda - 18 = (\lambda - 2)(-\lambda^2 + 9)$$

$$-\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 9 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{9} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = \mathbf{3} \\ \lambda_3 = \mathbf{-3} \end{cases}$$

Ya podemos factorizar el polinomio característico anterior.

$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 + 9\lambda - 18 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda + 3)$$

Como se puede observar, $\lambda_1 = 2$ tiene multiplicidad algebraica igual a 1, al igual que $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = -3$.

A continuación calculamos los autovectores.

$\boldsymbol{\lambda_1} = \mathbf{2}$

$$(A - 2I_n)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 0 & 4 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 2 & 0 & -1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-Fila\ 1, Fila\ 3 - 2 \cdot Fila\ 1, \frac{1}{5} Fila\ 3.$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 2 & 0 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 5 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$x_3 = \mathbf{0}$$
$$\boldsymbol{x_2}$$
$$x_1 - 4x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 4x_3 = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_3} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Este autovalor tiene multiplicidad geométrica igual a 1 (la base está formada por un único autovector).

$\boldsymbol{\lambda_2 = 3}$

$$(A - 3I_n)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 0 & 4 \\ 0 & 2-3 & 0 \\ 2 & 0 & -1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$Fila\ 3 + Fila\ 1, -\frac{1}{2} Fila\ 2, -Fila\ 2.$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 2 & 0 & -4 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$\boldsymbol{x_3}$$
$$x_2 = \mathbf{0}$$
$$x_1 - 2x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = \boldsymbol{2x_3}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{2x_3} \\ \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_3} \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Este autovalor tiene multiplicidad geométrica igual a 1 (la base está formada por un único autovector).

$\boldsymbol{\lambda_2 = -3}$

$$(A + 3I_n)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1+3 & 0 & 4 \\ 0 & 2+3 & 0 \\ 2 & 0 & -1+3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{4} Fila\ 1, Fila\ 3 - 2 \cdot Fila\ 1, \frac{1}{5} Fila\ 2.$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$\boldsymbol{x_3}$$
$$x_2 = \mathbf{0}$$
$$x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = \boldsymbol{-x_3}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{-x_3} \\ \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_3}\begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Este autovalor tiene multiplicidad geométrica igual a 1 (la base está formada por un único autovector).

Luego, en este caso, A es diagonalizable ya que para todos los autovalores, la multiplicidad algebraica (1) coincide con la geométrica (1).

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente,

$$P^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

En primer lugar, tenemos que escribir el polinomio característico.

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = (2-\lambda)^2(3-\lambda)$$

$$(2-\lambda)^2(3-\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(2-\lambda) = 0 \Rightarrow \left.\begin{cases} 2-\lambda = 0 \\ 2-\lambda = 0 \end{cases}\right\} \lambda_1 = \mathbf{2} \\ 3-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \mathbf{3} \end{cases}$$

Ya podemos factorizar el polinomio característico anterior.

$$(2-\lambda)^2(3-\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

Como se puede observar, $\lambda_1 = 2$ tiene multiplicidad algebraica igual a 2, y $\lambda_2 = 3$ tiene multiplicidad algebraica igual a 1.

A continuación, calculamos los autovectores.

$\boldsymbol{\lambda_1 = 2}$

$$(A - 2I_n)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 1 \\ 0 & 2-2 & -1 \\ 0 & 0 & 3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$Fila\ 2 + Fila\ 1$, $Fila\ 3 - Fila\ 1$. Después intercambiamos las filas 1 y 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$x_3 = \mathbf{0}$$
$$\boldsymbol{x_2}$$
$$\boldsymbol{x_1}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_1} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \boldsymbol{x_1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Este autovalor tiene multiplicidad geométrica igual a 2 (la base está formada por dos autovectores).

$\boldsymbol{\lambda_2 = 3}$

$$(A - 3I_n)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 0 & 1 \\ 0 & 2-3 & -1 \\ 0 & 0 & 3-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-Fila\ 1$, $-Fila\ 2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$\boldsymbol{x_3}$$
$$x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -\boldsymbol{x_3}$$
$$x_1 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = \boldsymbol{x_3}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_3} \\ -\boldsymbol{x_3} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_3} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Este autovalor tiene multiplicidad geométrica igual a 1 (la base está formada por un único autovector).

Luego, en este caso, A es diagonalizable ya que para todos los autovalores, la multiplicidad algebraica coincide con la geométrica.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente,

$$P^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

En primer lugar, tenemos que escribir el polinomio característico.

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda)$$

$$(1-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \mathbf{1} \\ -1-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \mathbf{-1} \\ 2-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_3 = \mathbf{2} \end{cases}$$

Ya podemos factorizar el polinomio característico anterior.

$$(1-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)$$

Como se puede observar, $\lambda_1 = 1$ tiene multiplicidad algebraica igual a 1, lo mismo que $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 2$.

A continuación, calculamos los autovectores.

$\boldsymbol{\lambda_1 = 1}$

$$(A - I_n)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 2 \\ 0 & -1-1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2}Fila\ 1$, $Fila\ 3 - Fila\ 1$, $-\frac{1}{2}Fila\ 2$. Después intercambiamos las filas 1 y 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$x_3 = \mathbf{0}$$
$$x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}x_3 = \mathbf{0}$$
$$\boldsymbol{x_1}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_1}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Este autovalor tiene multiplicidad geométrica igual a 1 (la base está formada por un único autovector).

$\boldsymbol{\lambda_2 = -1}$

$$(A + I_n)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1+1 & 0 & 2 \\ 0 & -1+1 & 1 \\ 0 & 0 & 2+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2}Fila\ 1$, $Fila\ 3 - 3 \cdot Fila\ 2$. Después intercambiamos las filas 2 y 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 3 & 0\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 3 & 0\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$x_3 = \mathbf{0}$$
$$\boldsymbol{x_2}$$
$$x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_3 = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \boldsymbol{x_2}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix} = \boldsymbol{x_2}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{1}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

Este autovalor tiene multiplicidad geométrica igual a 1 (la base está formada por un único autovector).

$\boldsymbol{\lambda_2} = \mathbf{2}$

$$(A - 2I_n)X = 0$$
$$\begin{pmatrix}1-2 & 0 & 2\\0 & -1-2 & 1\\0 & 0 & 2-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\0 & -3 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$-Fila\ 1$, $-\frac{1}{3}Fila\ 2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 0 & 2 & 0\\0 & -3 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -2 & 0\\0 & -3 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -2 & 0\\0 & 1 & -1/3 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$\boldsymbol{x_3}$$
$$x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{x_3}$$
$$x_1 - 2x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = \mathbf{2}\boldsymbol{x_3}$$

$$\begin{pmatrix}\mathbf{2}\boldsymbol{x_3}\\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{x_3}\\ \boldsymbol{x_3}\end{pmatrix} = \boldsymbol{x_3}\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\\ \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

Este autovalor tiene multiplicidad geométrica igual a 1 (la base está formada por un único autovector).

Luego, en este caso, A es diagonalizable ya que para todos los autovalores, la multiplicidad algebraica (1) coincide con la geométrica (1).

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente,

$$P^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1/3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1/3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1/3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

3. Calcule A^n.

a) $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}}$

b) $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}}$

c) $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}$

<u>Solución</u>

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, tenemos que escribir el polinomio característico.

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 9 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda) - 36 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 36 = \lambda^2 - 2\lambda - 35$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 35 = 0$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-35)}}{2} = \frac{2 \pm 12}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = \frac{14}{2} = \mathbf{7} \\ \lambda_2 = \frac{-10}{2} = \mathbf{-5} \end{cases}$$

Ya podemos factorizar el polinomio característico anterior.

$$\lambda^2 - 2\lambda - 35 = (\lambda - 7)(\lambda + 5)$$

Como se puede observar, $\lambda_1 = 7$ tiene multiplicidad algebraica igual a 1, al igual que $\lambda_2 = -5$.

A continuación, calculamos los autovectores.

$\boldsymbol{\lambda_1 = 7}$

$$(A - 7I_n)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-7 & 4 \\ 9 & 1-7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-\frac{1}{6} Fila\ 1,\ Fila\ 2 - 9 \cdot Fila\ 1,\ -\frac{1}{2} Fila\ 1.$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -6 & 4 & 0 \\ 9 & -6 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2/3 & 0 \\ 9 & -6 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$\boldsymbol{x_2}$$

$$x_1 - \frac{2}{3}x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \boldsymbol{\frac{2}{3} x_2}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{2}{3} x_2} \\ \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{2}{3}} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

Este autovalor tiene multiplicidad geométrica igual a 1 (la base está formada por un único autovector).

$\boldsymbol{\lambda_2 = -5}$

$$(A - 7I_n)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1+5 & 4 \\ 9 & 1+5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{6}Fila\ 1, Fila\ 2 - 9 \cdot Fila\ 1, -\frac{1}{2}Fila\ 1.$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 0 \\ 9 & 6 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2/3 & 0 \\ 9 & 6 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$\boldsymbol{x_2}$$

$$x_1 + \frac{2}{3}x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\boldsymbol{\frac{2}{3}x_2}$$

$$\begin{pmatrix} -\boldsymbol{\frac{2}{3}x_2} \\ \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_2}\begin{pmatrix} -\boldsymbol{\frac{2}{3}} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

Este autovalor tiene multiplicidad geométrica igual a 1 (la base está formada por un único autovector).

Luego, en este caso, A es diagonalizable ya que para todos los autovalores, la multiplicidad algebraica (1) coincide con la geométrica (1).

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente,

$$P^{-1} = \frac{1}{\frac{2}{3} + \frac{2}{3}}\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 \\ -3/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 14/3 & 10/3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 \\ -3/4 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{9} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7^n & 0 \\ 0 & (-5)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 \\ -3/4 & 1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2\cdot 7^n}{3} & \frac{-2\cdot(-5)^n}{3} \\ 7^n & (-5)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 \\ -3/4 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{7^n + (-5)^n}{2}} & \boldsymbol{\frac{7^n - (-5)^n}{3}} \\ \boldsymbol{\frac{3(7^n - (-5)^n)}{4}} & \boldsymbol{\frac{7^n + (-5)^n}{2}} \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, tenemos que escribir el polinomio característico.

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 0-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda)(-2-\lambda) - 3\lambda =$$

$$= (-2\lambda + \lambda^2)(-2-\lambda) - 3\lambda = 4\lambda - 2\lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda^3 - 3\lambda = -\lambda^3 + \lambda$$

$$-\lambda^3 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(-\lambda^2 + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \mathbf{0} \\ (-\lambda^2 + 1) = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = \mathbf{1} \\ \lambda_3 = \mathbf{-1} \end{cases} \end{cases}$$

Ya podemos factorizar el polinomio característico anterior.

$$-\lambda^3 + \lambda = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

Como se puede observar, $\lambda_1 = 0$ tiene multiplicidad algebraica igual a 1, al igual que $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = -1$.

A continuación, calculamos los autovectores.

$\boldsymbol{\lambda_1 = 0}$

$$(A - 0 \cdot I_n)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2-0 & 0 & 3 \\ 0 & 0-0 & 0 \\ -1 & 1 & -2-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2} Fila\ 1$, $Fila\ 3 + Fila\ 1$. Después intercambiamos las filas 2 y 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \end{array}\right)$$
$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$\boldsymbol{x_3}$$
$$x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \boldsymbol{\frac{1}{2}x_3}$$
$$x_1 + \frac{3}{2}x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = \boldsymbol{-\frac{3}{2}x_3}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{-\frac{3}{2}x_3} \\ \boldsymbol{\frac{1}{2}x_3} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_3} \begin{pmatrix} \boldsymbol{-\frac{3}{2}} \\ \boldsymbol{\frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

Este autovector tiene multiplicidad geométrica igual a 1 (la base está formada por un único autovector).

$\boldsymbol{\lambda_2 = 1}$

$$(A - I_n)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 0 & 3 \\ 0 & 0-1 & 0 \\ -1 & 1 & -2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$Fila\ 3 + Fila\ 1$, $Fila\ 3 + Fila\ 2$, $-Fila\ 2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$\boldsymbol{x_3}$$
$$x_2 = \boldsymbol{0}$$
$$x_1 + 3x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = \boldsymbol{-3x_3}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{-3x_3} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_3} \begin{pmatrix} \boldsymbol{-3} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

Este autovalor tiene multiplicidad geométrica igual a 1 (la base está formada por un único autovector).

$\boldsymbol{\lambda_2 = -1}$

$$(A + I_n)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2+1 & 0 & 3 \\ 0 & 0+1 & 0 \\ -1 & 1 & -2+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{3}Fila\ 1$, $Fila\ 3 + Fila\ 1$, $Fila\ 3 - Fila\ 2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$\boldsymbol{x_3}$$
$$x_2 = \boldsymbol{0}$$
$$x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -\boldsymbol{x_3}$$

$$\begin{pmatrix} -\boldsymbol{x_3} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_3}\begin{pmatrix} \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

Este autovalor tiene multiplicidad geométrica igual a 1 (la base está formada por un único autovector).

Luego, en este caso, A es diagonalizable ya que para todos los autovalores, la multiplicidad algebraica (1) coincide con la geométrica (1).

$$P = \begin{pmatrix} -3/2 & -3 & -1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente,

$$P^T = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}=\frac{1}{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0&1\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}-3&1\\-1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-3&0\\-1&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1/2&1\\0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-3/2&1\\-1&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}-3/2&1/2\\-1&0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1/2&1\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}-3/2&1\\-3&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-3/2&1/2\\-3&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&2&0\\-1/2&-1/2&-1/2\\1/2&-3/2&3/2\end{pmatrix}$$

$$A=PDP^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}&-3&-1\\\frac{1}{2}&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&-3&1\\0&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{0}&\mathbf{3}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{-1}&\mathbf{1}&\mathbf{-2}\end{pmatrix}$$

$$A^n=PD^nP^{-1}=\begin{pmatrix}-3/2&-3&-1\\1/2&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&(-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&0\\-1/2&-1/2&-1/2\\1/2&-3/2&3/2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&-3&-(-1)^n\\0&0&0\\0&1&(-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\frac{3-(-1)^n}{2}}&\boldsymbol{\frac{3+3(-1)^n}{2}}&\boldsymbol{\frac{3-3(-1)^n}{2}}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\boldsymbol{\frac{-1+(-1)^n}{2}}&\boldsymbol{\frac{-1-3(-1)^n}{2}}&\boldsymbol{\frac{-1+3(-1)^n}{2}}\end{pmatrix}$$

c)

$$A=\begin{pmatrix}1&4&1\\2&1&0\\-1&3&1\end{pmatrix}$$

En primer lugar, tenemos que escribir el polinomio característico.

$$|A-\lambda I|=0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda) + 6 + (1-\lambda) - 8(1-\lambda) =$$

$$= (1-2\lambda+\lambda^2)(1-\lambda) - 1 + 7\lambda = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - \lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 - 1 + 7\lambda$$
$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda$$

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(-\lambda^2 + 3\lambda + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \mathbf{0} \\ -\lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0 \end{cases}$$

$$-\lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (-1) \cdot 4}}{-2} = \begin{cases} \lambda_2 = \dfrac{2}{-2} = \mathbf{-1} \\ \lambda_3 = \dfrac{-8}{-2} = \mathbf{4} \end{cases}$$

Ya podemos factorizar el polinomio característico anterior.

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda = \lambda(\lambda+1)(\lambda-4)$$

Como se puede observar, $\lambda_1 = 0$ tiene multiplicidad algebraica igual a 1, al igual que $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 4$.

A continuación, calculamos los autovectores.

$\boldsymbol{\lambda_1 = 0}$

$$(A - 0 \cdot I_n)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-0 & 4 & 1 \\ 2 & 1-0 & 0 \\ -1 & 3 & 1-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$Fila\ 3 + Fila\ 1, Fila\ 2 - 2 \cdot Fila\ 1, Fila\ 3 + Fila\ 2, -\frac{1}{7} Fila\ 2.$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$\boldsymbol{x_3}$$
$$x_2 + \frac{2}{7}x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -\boldsymbol{\frac{2}{7}x_3}$$
$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -4x_2 - x_3 = \boldsymbol{\frac{8}{7}x_3 - x_3 = \frac{1}{7}x_3}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{1}{7}x_3} \\ \boldsymbol{-\frac{2}{7}x_3} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_3}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{1}{7}} \\ \boldsymbol{-\frac{2}{7}} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

Este autovalor tiene multiplicidad geométrica igual a 1 (la base está formada por un único autovector).

$\boldsymbol{\lambda_2 = -1}$

$$(A + I_n)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1+1 & 4 & 1 \\ 2 & 1+1 & 0 \\ -1 & 3 & 1+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2}Fila\ 1, Fila\ 3 + Fila\ 1, Fila\ 2 - 2 \cdot Fila\ 2\ , -\frac{1}{2}Fila\ 2, Fila\ 3 - 5 \cdot Fila\ 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1/2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1/2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5/2 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 5/2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 5 & 5/2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$\boldsymbol{x_3}$$
$$x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -\boldsymbol{\frac{1}{2}x_3}$$
$$x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_2 - \frac{1}{2}x_3 = x_3 - \frac{1}{2}x_3 = \boldsymbol{\frac{1}{2}x_3}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_3 \\ -\frac{1}{2}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Este autovalor tiene multiplicidad geométrica igual a 1 (la base está formada por un único autovector).

$\boldsymbol{\lambda_2 = 4}$

$$(A - 4I_n)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-4 & 4 & 1 \\ 2 & 1-4 & 0 \\ -1 & 3 & 1-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-\frac{1}{3}Fila\ 1$, $Fila\ 3 + Fila\ 1$, $Fila\ 2 - 2 \cdot Fila\ 1$, $Fila\ 3 + 5 \cdot Fila\ 1$, $-3Fila\ 1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4/3 & -1/3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4/3 & -1/3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5/3 & -10/3 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 5/3 & -10/3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$\boldsymbol{x_3}$$
$$x_2 - 2x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \boldsymbol{2x_3}$$
$$x_1 - \frac{4}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{8}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_3 = \boldsymbol{3x_3}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{3x_3} \\ \boldsymbol{2x_3} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_3} \begin{pmatrix} \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

Este autovalor tiene multiplicidad geométrica igual a 1 (la base está formada por un único autovector).

Luego, en este caso, A es diagonalizable ya que para todos los autovalores, la multiplicidad algebraica (1) coincide con la geométrica (1).

$$P = \begin{pmatrix} 1/7 & 1/2 & 3 \\ -2/7 & -1/2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente,

$$P^T = \begin{pmatrix} 1/7 & -2/7 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|P| = -\frac{1}{14} - \frac{6}{7} + 1 + \frac{3}{2} - \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{-1 - 12 + 14 + 21 - 4 + 2}{14} = \frac{20}{14} = \frac{10}{7}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\frac{10}{7}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1/2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1/2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2/7 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1/7 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1/7 & -2/7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2/7 & 1 \\ -1/2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1/7 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1/7 & -2/7 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{7}{10} \begin{pmatrix} -5/2 & 5/2 & 5/2 \\ 16/7 & -20/7 & -8/7 \\ 3/14 & 5/14 & 1/14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/4 & 7/4 & 7/4 \\ 8/5 & -2 & -4/5 \\ 3/20 & 1/4 & 1/20 \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & 1/2 & 3 \\ -2/7 & -1/2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7/4 & 7/4 & 7/4 \\ 8/5 & -2 & -4/5 \\ 3/20 & 1/4 & 1/20 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 12 \\ 0 & 1/2 & 8 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7/4 & 7/4 & 7/4 \\ 8/5 & -2 & -4/5 \\ 3/20 & 1/4 & 1/20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & 1/2 & 3 \\ -2/7 & -1/2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7/4 & 7/4 & 7/4 \\ 8/5 & -2 & -4/5 \\ 3/20 & 1/4 & 1/20 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{(-1)^n}{2} & 3 \cdot 4^n \\ 0 & \frac{-(-1)^n}{2} & 2 \cdot 4^n \\ 0 & (-1)^n & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7/4 & 7/4 & 7/4 \\ 8/5 & -2 & -4/5 \\ 3/20 & 1/4 & 1/20 \end{pmatrix} =$$

$$
= \begin{pmatrix} \dfrac{4(-1)^n + 9 \cdot 4^{n-1}}{5} & -(-1)^n + 3 \cdot 4^{n-1} & \dfrac{-2(-1)^n + 3 \cdot 4^{n-1}}{5} \\ \dfrac{-4(-1)^n + 6 \cdot 4^{n-1}}{5} & (-1)^n + 2 \cdot 4^{n-1} & \dfrac{2(-1)^n + 2 \cdot 4^{n-1}}{5} \\ \dfrac{8(-1)^n + 3 \cdot 4^{n-1}}{5} & -2(-1)^n + 4^{n-1} & \dfrac{-4(-1)^n + 4^{n-1}}{5} \end{pmatrix}
$$

HOJA 5: FORMAS CUADRÁTICAS:

1. **Clasifique las formas cuadráticas asociadas a las siguientes matrices y expréselas en forma polinómica:**

   a) $\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-4} \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

   d) $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$

   e) $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

   f) $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

   g) $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{7} \\ \mathbf{0} & \mathbf{7} & \mathbf{14} \end{pmatrix}$

   h) $\begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-5} \end{pmatrix}$

<u>Solución</u>

a) $X\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}X^T = (x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_2$

$$|A_1| = |4| = 4 > 0$$

$$|A_2| = |A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10 > 0$$

Como todos los menores principales son positivos, esta forma cuadrática es **DEFINIDA POSITIVA.**

b) $X\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}X^T = (x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -2x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_1x_2$

$$|A_1| = |-2| = -1 < 0$$

$$|A_2| = |A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7 > 0$$

Como los menores principales alternan en signo, empezando por negativo, esta forma cuadrática es **DEFINIDA NEGATIVA.**

c) $X\begin{pmatrix}5 & 4\\4 & 0\end{pmatrix}X^T = (x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix}5 & 4\\4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = 5x_1^2 + 8x_1x_2$

$$|A_1| = |5| = 5 > 0$$

$$|A_2| = |A| = \begin{vmatrix}5 & 4\\4 & 0\end{vmatrix} = 0 - 16 = -16 < 0 \neq 0$$

Como el último menor principal (determinante de toda la matriz) es distinto de 0, y la forma cuadrática no es ni definida negativa, ni definida positiva, Q es **INDEFINIDA.**

d) $X\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\1 & 4 & 5\\3 & 5 & 8\end{pmatrix}X^T = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\1 & 4 & 5\\3 & 5 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 10x_2x_3$

$$|A_1| = |2| = 2 > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 4\end{vmatrix} = 8 - 1 = 9 > 0$$

$$|A_3| = |A| = \begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\1 & 4 & 5\\3 & 5 & 8\end{vmatrix} = 0$$

Como todos los menores principales son positivos, menos el último que es 0, esta forma cuadrática es **SEMIDEFINIDA POSITIVA.**

e) $X\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\0 & 0 & 0\\2 & 0 & 1\end{pmatrix}X^T = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\0 & 0 & 0\\2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = 2x_1^2 + x_3^2 + 4x_1x_3$

$$|A_1| = |2| = 2 > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = |A| = \begin{vmatrix}2 & 0 & 2\\0 & 0 & 0\\2 & 0 & 1\end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, este criterio no decide y tenemos que utilizar el de los autovalores.

$$|A - I\lambda| = 0$$

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 2\\0 & 0-\lambda & 0\\2 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda)(-1-\lambda) - 4(-\lambda)$$
$$= (-2\lambda + \lambda^2)(-1-\lambda) + 4\lambda = 2\lambda - \lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda^3 + 4\lambda$$
$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 6\lambda = (-\lambda^2 + \lambda + 6)\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda = 0\\-\lambda^2 + \lambda + 6 = 0\end{cases}$$

$$-\lambda^2+\lambda+6=0 \Rightarrow \lambda=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot(-1)\cdot 6}}{-2}=\frac{-1\pm 5}{-2}$$
$$=\begin{cases}\dfrac{-1+5}{-2}=\dfrac{4}{-2}=-2\\ \dfrac{-1-5}{-2}=\dfrac{-6}{-2}=3\end{cases}$$

Como la matriz tiene un autovalor positivo 3, otro negativo -2, y otro igual a 0, esta forma cuadrática es **INDEFINIDA**.

f) $X\begin{pmatrix}2&2&0\\2&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}X^T=(x_1\quad x_2\quad x_3)\begin{pmatrix}2&2&0\\2&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=2x_1^2+2x_2^2-x_3^2+4x_1x_2$

$$|A_1|=2=2>0$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix}2&2\\2&2\end{vmatrix}=4-4=0$$

$$|A_3|=|A|=\begin{vmatrix}2&2&0\\2&2&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=0$$

Por tanto, este criterio no decide y tenemos que utilizar el de los autovalores.

$$|A-I\lambda|=0$$

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&2&0\\2&2-\lambda&0\\0&0&-1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)-4(-1-\lambda)$$
$$=(4-2\lambda-2\lambda+\lambda^2)(-1-\lambda)+4+4\lambda$$
$$=(4-4\lambda+\lambda^2)(-1-\lambda)+4+4\lambda$$
$$=-4+4\lambda-\lambda^2-4\lambda+4\lambda^2-\lambda^3+4+4\lambda=4\lambda+3\lambda^2-\lambda^3=0$$

Tenemos que utilizar Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & -1 & 3 & 4 & 0\\ & & 1 & -4 & 0\\ \hline & -1 & 4 & 0 & 0\end{array}$$

$$-\lambda^2+4\lambda=0 \Rightarrow (-\lambda+4)\lambda=0 \Rightarrow \lambda=\begin{cases}-\lambda+4=0\Rightarrow\lambda=4\\ \lambda=0\end{cases}$$

Como la matriz tiene un autovalor positivo 4, otro negativo -1, y otro igual a 0, esta forma cuadrática es **INDEFINIDA.**

g) $X\begin{pmatrix}1&3&0\\3&-2&7\\0&7&14\end{pmatrix}X^T=(x_1\quad x_2\quad x_3)\begin{pmatrix}1&3&0\\3&-2&7\\0&7&14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_1^2-2x_2^2+14x_3^2+6x_1x_2+146x_2x_3$

$$|A_1| = |1| = 1 > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 9 = -11 < 0$$

$$|A_3| = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 7 \\ 0 & 7 & 14 \end{vmatrix} = -203 < 0 \neq 0$$

Como el último menor principal (determinante de toda la matriz) es distinto de 0, y la forma cuadrática no es ni definida negativa, ni definida positiva, Q es **INDEFINIDA.**

h) $X \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} X^T = (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -2x_1^2 - x_2^2 - 5x_3^2$

Como se puede observar, se trata de una matriz diagonal, por tanto, los elementos de su diagonal principal son sus autovalores. En consecuencia, para saber su signo basta con mirar el signo de los elementos de su diagonal principal. Como todos ellos son negativos, esta forma cuadrática es **DEFINIDA NEGATIVA.**

2. Estudie el signo de las siguientes formas cuadráticas:

a) $\boldsymbol{Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2}$

b) $\boldsymbol{Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3}$

c) $\boldsymbol{Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = -2x_1^2 + 4x_3^2 + x_4^2 - 6x_2x_3 + 4x_3x_4}$

d) $\boldsymbol{Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3}$

e) $\boldsymbol{Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3}$

f) $\boldsymbol{Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2}$

g) $\boldsymbol{Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3}$

<u>Solución</u>

a)

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 = (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$|A_1| = |3| = 3 > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5 > 0$$

$$|A_3| = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 15 > 0$$

Como todos los menores principales son positivos, esta forma cuadrática es **DEFINIDA POSITIVA.**

b)

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$$
$$= (x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$|A_1| = |3| = 3 > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4 < 0$$

$$|A_3| = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

Como el último menor principal (determinante de toda la matriz) es distinto de 0, y la forma cuadrática no es ni definida negativa, ni definida positiva, Q es **INDEFINIDA.**

c)

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = -2x_1^2 + 4x_3^2 + x_4^2 - 6x_2x_3 + 4x_3x_4$$
$$= (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4)\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$|A_1| = |-2| = -2 < 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 18 > 0$$

$$|A_3| = |A| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$$

Como el último menor principal (determinante de toda la matriz) es distinto de 0, y la forma cuadrática no es ni definida negativa, ni definida positiva, Q es **INDEFINIDA.**

d)

$$Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$$
$$=(x_1\quad x_2\quad x_3)\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$|A_1|=|2|=2>0$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix}2&-1\\-1&2\end{vmatrix}=4-1=3>0$$

$$|A_3|=|A|=\begin{vmatrix}2&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&2\end{vmatrix}=4>0$$

Como todos los menores principales son positivos, esta forma cuadrática es **DEFINIDA POSITIVA.**

e)

$$Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3$$
$$=(x_1\quad x_2\quad x_3)\begin{pmatrix}2&1&0\\1&3&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$|A_1|=|2|=2>0$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix}=6-1=5>0$$

$$|A_3|=|A|=\begin{vmatrix}2&1&0\\1&3&1\\0&1&1\end{vmatrix}=3>0$$

Como todos los menores principales son positivos, esta forma cuadrática es **DEFINIDA POSITIVA.**

f)

$$Q(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_2^2+2x_3^2+6x_1x_2=(x_1\quad x_2\quad x_3)\begin{pmatrix}3&3&0\\3&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$|A_1|=|3|=3>0$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix}3&3\\3&3\end{vmatrix}=0$$

$$|A_3|=|A|=\begin{vmatrix}3&3&0\\3&3&0\\0&0&2\end{vmatrix}=18-18=0$$

Por tanto, este criterio no decide, y tenemos que utilizar el de los autovalores.

$$|A-I\lambda|=0$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) - 9(2-\lambda)$$
$$= (9 - 3\lambda - 3\lambda + \lambda^2)(2-\lambda) - 18 + 9\lambda$$
$$= (9 - 6\lambda + \lambda^2)(2-\lambda) - 18 + 9\lambda$$
$$= 18 - 9\lambda - 12\lambda + 6\lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda^3 - 18 + 9\lambda$$
$$= -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 12\lambda = (-\lambda^2 + 8\lambda - 12)\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 6 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

Como todos los autovalores son positivos, menos uno que es 0, esta forma cuadrática es **SEMIDEFINIDA POSITIVA.**

g)

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$|A_1| = |1| = 1 > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 < 0$$

$$|A_3| = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Como el último menor principal (determinante de toda la matriz) es distinto de 0, y la forma cuadrática no es ni definida negativa, ni definida positiva, Q es **INDEFINIDA.**

3. **Encuentre los valores del parámetro $\boldsymbol{a}$ para los que $\boldsymbol{Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2ax_1x_3}$ es Semidefinida Positiva.**

Solución

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2ax_1x_3 = X\begin{pmatrix} 3 & 1 & -a \\ 1 & 1 & 0 \\ -a & 0 & 3 \end{pmatrix}X^T$$
$$|A_1| = |3| = 3 > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 > 0$$

$$|A_3| = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -a \\ 1 & 1 & 0 \\ -a & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 - a^2 - 3 = -a^2 + 6 = 0$$

$$-a^2 + 6 = 0 \Rightarrow a^2 = 6 \Rightarrow \boldsymbol{a = \pm\sqrt{6}}$$

Cuando $a = \pm\sqrt{6}$, todos los menores principales de A son positivos, excepto el último que es 0. Por tanto, para esos valores de a, $Q(x_1, x_2, x_3)$ es Semidefinida Positiva.

4. **Calcule los valores del parámetro $\boldsymbol{a}$ para los que $\boldsymbol{Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 + ax_3^2 - 2x_1x_2 + 3x_1x_3 - 4x_2x_3}$ es Definida Positiva.**

<u>Solución</u>

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 + ax_3^2 - 2x_1x_2 + 3x_1x_3 - 4x_2x_3$$
$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3/2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3/2 & -2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$|A_1| = |3| = 3 > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 > 0$$

$$|A_3| = |A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3/2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3/2 & -2 & a \end{vmatrix} = 3a + 3 + 3 - \frac{9}{4} - a - 12 = 2a - \frac{33}{4} > 0$$

$$2a - \frac{33}{4} > 0 \Rightarrow \boldsymbol{a > \frac{33}{8}}$$

Si $a > \frac{33}{8}$, todos los menores principales de A son positivos, y, por tanto, $Q(x_1, x_2, x_3)$ es Definida Positiva.

5. **Indique el signo de la siguiente forma cuadrática restringida:**

$$\boldsymbol{Q(x, y, z) = (x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$$
$$\boldsymbol{s.a. \quad -x + y - z = 0}$$

<u>Solución:</u>

Para clasificar una forma cuadrática restringida, como es este caso, primero podemos ver el signo de la forma cuadrática sin restringir, puesto que si tenemos la suerte de que sea definida positiva o definida negativa no haría falta clasificarla restringida ya que no cambiaría su clasificación. Para estudiar el signo de la forma cuadrática sin restringir vamos a utilizar el método de los menores principales.

$$|A_1| = |1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 16 = -15$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 13 \neq 0$$

Como el último menor principal (determinante de toda la matriz) es distinto de 0, y Q no es ni definida positiva, ni definida negativa, es INDEFINIDA. Por tanto, tenemos que restringirla al subespacio dado por la ecuación $-x + y - z = 0$**.**

Para restringirla debemos obtener la forma polinómica.

$$Q(x, y, z) = (x \quad y \quad z) \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + 2y^2 - z^2 + 8xy - 2yz$$

y también debemos desarrollar la ecuación a que se restringe que es:

$$-x + y - z = 0$$

Sabemos que cuando tenemos una forma cuadrática restringida deben quedar $n - m$ variables siendo n el número de variables originales (en nuestro caso, $n = 3$) y m el número de restricciones del problema ($m = 1$), luego nos deben quedar $3 - 1 = 2$ variables. Para ello, debemos despejar en la restricción y sustituir la información obtenida en la forma cuadrática original. Como tenemos una única restricción, sólo podemos despejar una variable en función de las otras dos. Si despejamos, por ejemplo, la variable y tenemos:

$$y = x + z$$

Sustituyendo esta información en la forma cuadrática inicial tenemos:

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) &= x^2 + 2y^2 - z^2 + 8xy - 2yz \\ &= x^2 + 2(x + z)^2 - z^2 + 8x(x + z) - 2(x + z)z \\ &= 11x^2 - z^2 + 10xz = (x \quad z) \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$|A_1| = |11| = 11$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 11 & 5 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -11 - 25 = -36 \neq 0$$

Por tanto, la forma cuadrática restringida es también **INDEFINIDA**, ya que el último menor principal el distinto de 0, y Q no es ni definida positiva, ni definida negativa.

6. Clasifique la siguiente forma cuadrática restringida:

$$\boldsymbol{Q(x,y,z) = 2xy + 2xz + 2yz}$$
$$\boldsymbol{s.a.} \quad \begin{cases} \boldsymbol{2x = 0} \\ \boldsymbol{y - z = 0} \end{cases}$$

Solución:

Antes de clasificar la forma cuadrática restringida vamos a clasificarla sin restringir para ver si es definida, puesto que en ese caso no haría falta restringirla. Para ello, escribimos la forma matricial de dicha forma cuadrática:

$$Q(x,y,z) = 2xy + 2xz + 2yz = (x,y,z)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

A continuación, la clasificamos utilizando el método de los menores principales:

$$|A_1| = |0| = 0$$
$$|A_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$
$$|A_3| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Como el último menor principal (determinante de toda la matriz) es distinto de 0, y $Q(x,y,z)$ no es ni definida positiva, ni definida negativa, la forma cuadrática sin restringir es INDEFINIDA. Por tanto, al no ser definida pasamos a restringirla.

Resolviendo el sistema dado por las dos restricciones obtenemos:

$$2x = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$y - z = 0 \Rightarrow y = z$$

Sustituyendo el resultado anterior en la forma cuadrática original nos queda:

$$Q(x,y,z) = 2xy + 2xz + 2yz = 2 \cdot 0 \cdot z + 2 \cdot 0 \cdot z + 2 \cdot z \cdot z = 2z^2 > 0$$

Por tanto, la forma cuadrática restringida al subespacio dado las ecuaciones $\begin{cases} 2x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ es **DEFINIDA POSITIVA** puesto que al sustituir z por cualquier valor distinto de cero siempre saldrá un número positivo.

7. Clasifique, utilizando el método de los autovalores, la siguiente forma cuadrática:

$$\boldsymbol{Q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz.}$$

¿Cambia el signo si la clasificamos ahora restringida al subespacio dado por la ecuación $\boldsymbol{x + y = 0}$?

<u>Solución:</u>

Para poder clasificar la forma cuadrática por el signo de los autovalores tenemos que obtener los mismos. Para ello, tenemos que escribir la forma cuadrática en forma matricial, que, como ya sabemos, se obtiene colocando en la diagonal principal los coeficientes de los términos cuadráticos, mientras que cada elemento a_{ij}, con $i \neq j$, se obtiene de dividir por dos el coeficiente del término que multiplica la variable i por la j. Así tenemos:

$$Q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz = (x,y,z)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

A continuación, calculamos los autovalores de la matriz anterior.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - (-1)(-1)(1-\lambda) - (-1)(-1)(1-\lambda)$$
$$= (\lambda - 1)(\lambda - 3)\lambda = 0$$

Luego, los autovalores son:

$$\lambda_1 = 1$$
$$\lambda_2 = 3$$
$$\lambda_3 = 0$$

Con lo cual, la forma cuadrática sin restringir sería **SEMIDEFINIDA POSITIVA**, puesto que uno de los autovalores es cero y los demás positivos.

Si clasificamos la forma cuadrática sujeta a la restricción $x + y = 0$ nos desaparece una de las variables, puesto que recordemos que si tenemos una forma cuadrática con variables, (en nuestro caso $n = 3$) y la sujetamos a m restricciones (en nuestro caso $m = 1$) nos queda una forma cuadrática con $n - m$ variables (3 – 1 = 2).

Despejando en la restricción obtenemos que $x = -y$. Sustituyendo esta información en la forma cuadrática original nos queda:

$$Q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz = (-y)^2 + 2y^2 + z^2 - 2(-y)y - 2yz$$
$$= 5y^2 + z^2 - 2yz = (y \quad z)\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

$$|A_1| = |5| = 5 > 0$$
$$|A_2| = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 1 = 4 > 0$$

Como los dos menores principales son positivos, la forma cuadrática restringida al subespacio dado por la ecuación $x + y = 0$ pasa a ser **DEFINIDA POSITIVA, cambiando su clasificación anterior sin restringir que recordemos era semidefinida positiva.**

8. **Un fabricante produce tres bienes en cantidades x, y, z, respectivamente, y obtiene con ello un beneficio según la expresión:**

$$\boldsymbol{B(x,y,z) = 5x^2 + 9y^2 + z^2 - 8yz}$$

Determine si los beneficios del empresario son estrictamente positivos en cada uno de los siguientes casos:

a) **La cantidad que produce del primer bien es dos veces la que produce del segundo.**
b) **Por cada unidad producida del primer bien produce dos del tercero.**
c) **La cantidad que produce de los tres bienes es la misma.**

Solución:

a) Vamos a clasificarla primero sin restringir, para ello calculamos su matriz simétrica asociada:

$$B(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$|B_1| = |5| = 5$$
$$|B_2| = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 45$$
$$|B_3| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -35 \neq 0$$

A la vista del signo de los menores principales la forma cuadrática es INDEFINIDA, ya que el último es distinto de 0 y no es ni definida positiva, ni definida negativa. **Por tanto, presentaría beneficios y pérdidas.**

La cantidad que produce del primer bien es dos veces la que produce del segundo, esto nos lleva a restringir la función de beneficios con la siguiente restricción:

$$B(x,y,z) = 5x^2 + 9y^2 + z^2 - 8yz$$
$$s.a. \quad x = 2y$$

Por lo que la forma cuadrática restringida sería:

$$
\begin{aligned}
B(x,y,z) &= 5x^2+9y^2+z^2-8yz = 5(2y)^2+9y^2+z^2-8yz \\
&= 29y^2+z^2-8yz = (y \quad z)\begin{pmatrix} 29 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
|B_1| = |29| = 29 > 0
$$
$$
|B_2| = \begin{vmatrix} 29 & -4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 29-16 = 13 > 0
$$

Por consiguiente, al ser los dos menores estrictamente positivos la forma cuadrática restringida es **DEFINIDA POSITIVA, lo que significa que con esta combinación de producción siempre se obtienen beneficios**.

b) Por cada unidad producida del primer bien produce dos del tercero, esta combinación nos lleva a restringir la función de beneficios con la restricción:

$$
\begin{gathered}
B(x,y,z) = 5x^2+9y^2+z^2-8yz \\
s.a. \quad z = 2x
\end{gathered}
$$

Por lo que la forma cuadrática restringida sería:

$$
\begin{aligned}
B(x,y,z) &= 5x^2+9y^2+z^2-8yz = 5x^2+9y^2+(2x)^2-8y(2x) \\
&= 9x^2+9y^2-16yx = (x \quad y)\begin{pmatrix} 9 & -8 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
|B_1| = |9| = 9 > 0
$$
$$
|B_2| = \begin{vmatrix} 9 & -8 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} = 81-64 = 17 > 0
$$

Por tanto, al ser los dos menores estrictamente positivos la forma cuadrática restringida es **DEFINIDA POSITIVA, lo que significa que con esta combinación de producción también se obtienen siempre beneficios**.

c) La cantidad que produce de los tres bienes es la misma.

$$
\begin{gathered}
B(x,y,z) = 5x^2+9y^2+z^2-8yz \\
s.a. \quad \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}
\end{gathered}
$$

Por lo que la forma cuadrática restringida sería:

$$
\begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases} \Rightarrow y = z = x
$$

$$
B(x,y,z) = 5x^2+9y^2+z^2-8yz = 5x^2+9x^2+x^2-8xx = 7x^2 > 0
$$

Este resultado nos indica, que la forma cuadrática restringida siempre será positiva, lo que quiere decir que es **DEFINIDA POSITIVA. Por tanto, en este caso, también se obtienen beneficios siempre**.

9. Una panadería que pretende ampliar su cuota de mercado, está pensando en lanzar tres tipos nuevos de pan: pan de centeno multivitamínico, pan a las finas hierbas y pan de queso. Según un estudio de mercado los beneficios que obtendría con las ventas de los tres nuevos tipos de panes siguen la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{B(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6xy + 2yz},$$

donde, x, y y z representan las cantidades vendidas de los tres productos. En dicho estudio se indica también que se va a vender el cuádruple de pan de queso que el de finas hierbas. Indique si le va a resultar rentable a la panadería el lanzamiento de los nuevos productos.

Solución:

Para analizar si resulta rentable el lanzamiento de los nuevos productos (x, y, z), hemos de comprobar si los beneficios son positivos, teniendo en cuenta la relación prevista entre z (pan de queso) e y (pan a las finas hierbas). Se trata, pues, de clasificar la siguiente forma cuadrática restringida:

$$\begin{gathered} B(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6xy + 2yz \\ s.a. \quad z = 4y \end{gathered}$$

Si aplicamos el método de los menores principales a la matriz asociada a la forma cuadrática sin restringir:

$$B(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6xy + 2yz = (x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$|B_1| = |1| = 5 > 0$$

$$|B_2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 9 = -7 < 0$$

$$|B_3| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -25 \neq 0$$

Como el último menor principal es distinto de 0 y la forma cuadrática no es ni definida positiva, ni definida negativa, es INDEFINIDA, es decir, los beneficios son positivos para algunos valores de (x, y, z) y son negativos para otros (en cuyo caso, obtenemos pérdidas).

Ahora bien, teniendo en cuenta que existe una relación entre las ventas de los dos últimos productos, veamos si considerando dicha relación, los beneficios serán siempre positivos. Para ello sustituimos la restricción en la función, y aplicamos de nuevo el método de los menores principales:

$$
\begin{aligned}
B(x, y, z) &= x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6xy + 2yz \\
&= x^2 + 2y^2 + 3(4y)^2 + 6xy + 2y(4y) = x^2 + 58y^2 + 6xy \\
&= (x \quad y)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 58 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$|B_1| = |1| = 1 > 0$$

$$|B_2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 58 \end{vmatrix} = 58 - 9 = 49 > 0$$

Como todos los menores principales son positivos, la forma cuadrática es **DEFINIDA POSITIVA, por lo que, en este caso, siempre se obtienen beneficios, y, por tanto, resulta rentable el lanzamiento de los nuevos productos, bajo la relación prevista entre ellos**.

TEMA 2: CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES:

2.1 FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES. CURVAS DE NIVEL

Notación para funciones de varias variables:
En la asignatura anterior a ésta, estuvimos trabajando con funciones de una variable, $y = f(x)$ donde x es la variable independiente e y la variable dependiente. De ahora en adelante, vamos a extender esta idea, trabajando con funciones con más de una variable independiente. A continuación se muestran algunos ejemplos.

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2$$

$$g(x,y,z) = 2xe^{yz}$$

$$h(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4$$

Como se puede observar, la notación para funciones de varias variables es la misma que para funciones de una variable.

$$z = f(x,y) = 2x^2 + y^2$$

$$w = g(x,y,z) = 2xe^{yz}$$

$$h(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4$$

En la función $z = f(x,y)$ hay dos variables independientes, x e y, y una variable dependiente, z.
Por otro lado, en la función $w = g(x,y,z)$ hay tres variables independientes x, y y z y una dependiente, w.
Finalmente, la función h depende de 4 variables.

Cuando estemos calculando el valor de una función de varias variables, tendremos que sustituir cada una de las variables independientes por su valor. Por ejemplo, considerando la función f anterior, vamos a calcular $f(2,3)$, $f(4,-3)$ and $f(5,y)$.

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2$$

$$f(x,y) = 2 \cdot 2^2 + 3^2 = 2 \cdot 4 + 9 = 17$$

$$f(x, y) = 2 \cdot 4^2 + (-3)^2 = 2 \cdot 16 + 9 = 41$$

$$f(x, y) = 2 \cdot 5^2 + y^2 = 2 \cdot 25 + y^2 = 50 + y^2$$

Todas las operaciones que se pueden llevar a cabo con funciones de una variable, también pueden realizarse con funciones de variables variables. En particular, para dos funciones f y g que dependan de dos variables se tiene que:

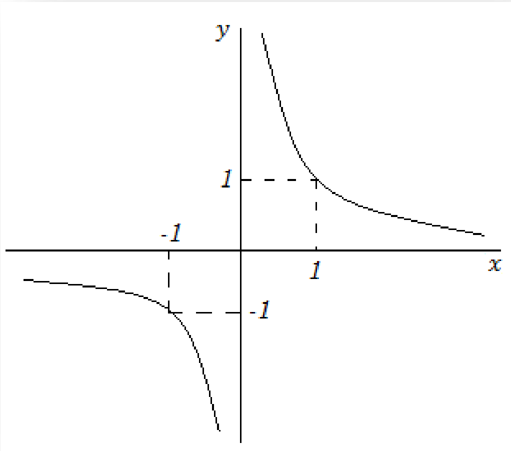
$$(f \pm g)(x, y) = f(x, y) \pm g(x, y)$$

$$(f \cdot g)(x, y) = f(x, y) \cdot g(x, y)$$

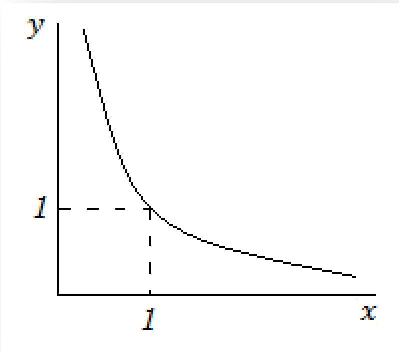
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x, y) = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}, \text{ si } g(x, y) \neq 0.$$

Curvas de nivel de funciones de varias variables:

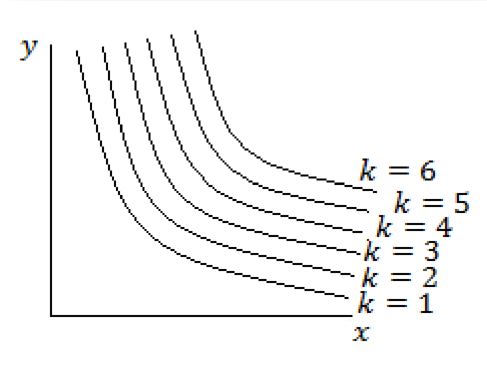
Consideremos la función $y = \frac{1}{x}$, o $xy = 1$.



En realidad, en Economía únicamente nos importa la parte positive de la función, por lo que el dibujo anterior quedaría:



Si sustituimos el número 1, en la función $xy = 1$ por cualquier otra constante k, se obtiene $xy = k$. De modo que para cada valor que demos a k tenemos una función diferente, o una curva diferente.

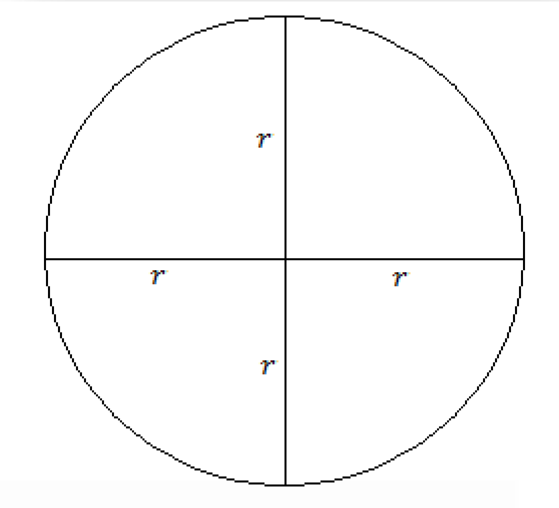


En el gráfico superior se muestran las curvas de nivel que se obtienen al dar diferentes valores a k.

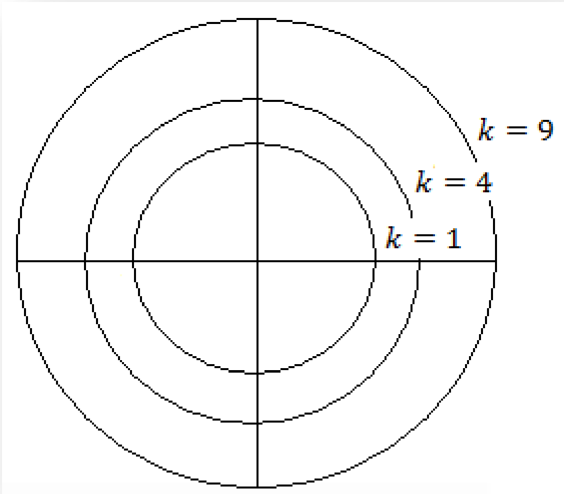
Otra función interesante es la CIRCUNFERENCIA.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

donde r representa el radio de la circunferencia. Gráficamente, se tiene que:

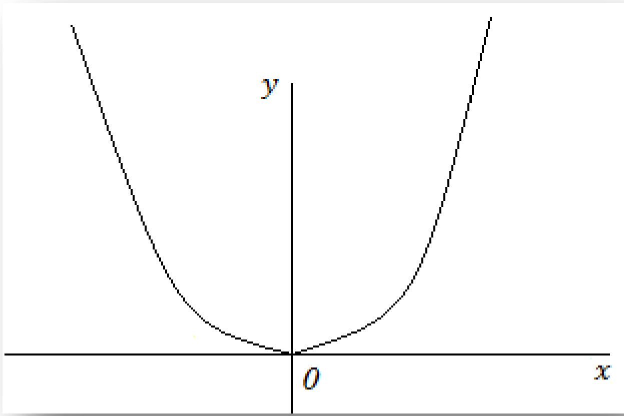


Si sustituimos r^2 por k, obtenemos $x^2 + y^2 = k$, de modo que de nuevo, dando diferentes valores a k, se obtienen diferentes funciones (circunferencias concéntricas). En este caso, el radio de estas circunferencias sería $\sqrt{k}$.

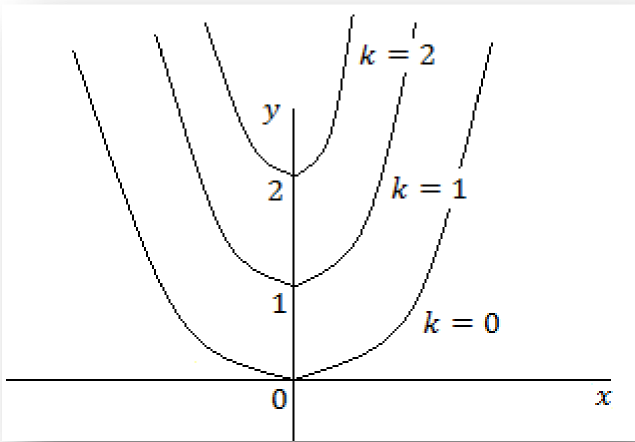


Finalmente, vamos a estudiar la PARÁBOLA:

$$y = x^2 \Rightarrow -x^2 + y = 0$$

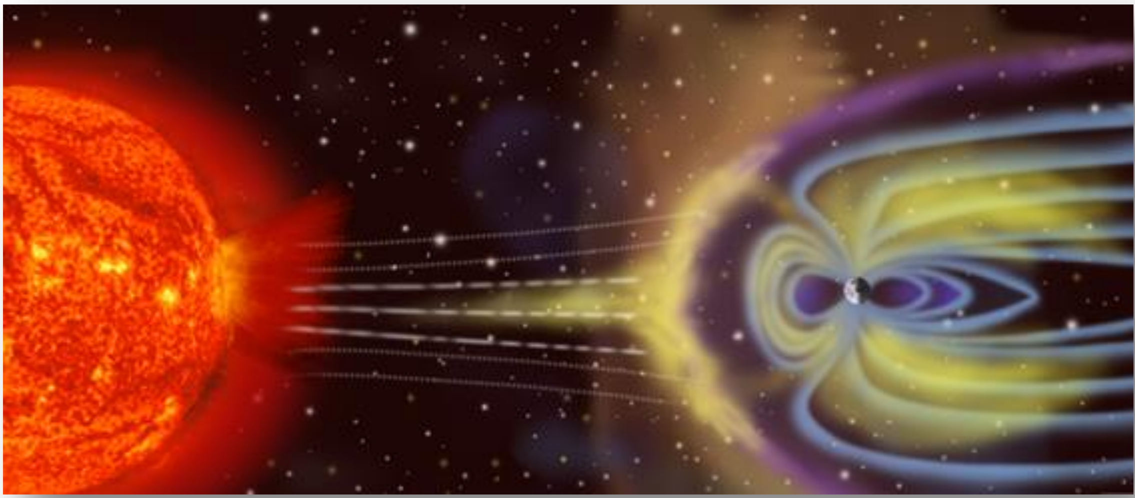


Once again, if we write k instead of 0, we would have $y = x^2 + k \Rightarrow -x^2 + y = k$, so again, for different values of k, we would have different parabolas.

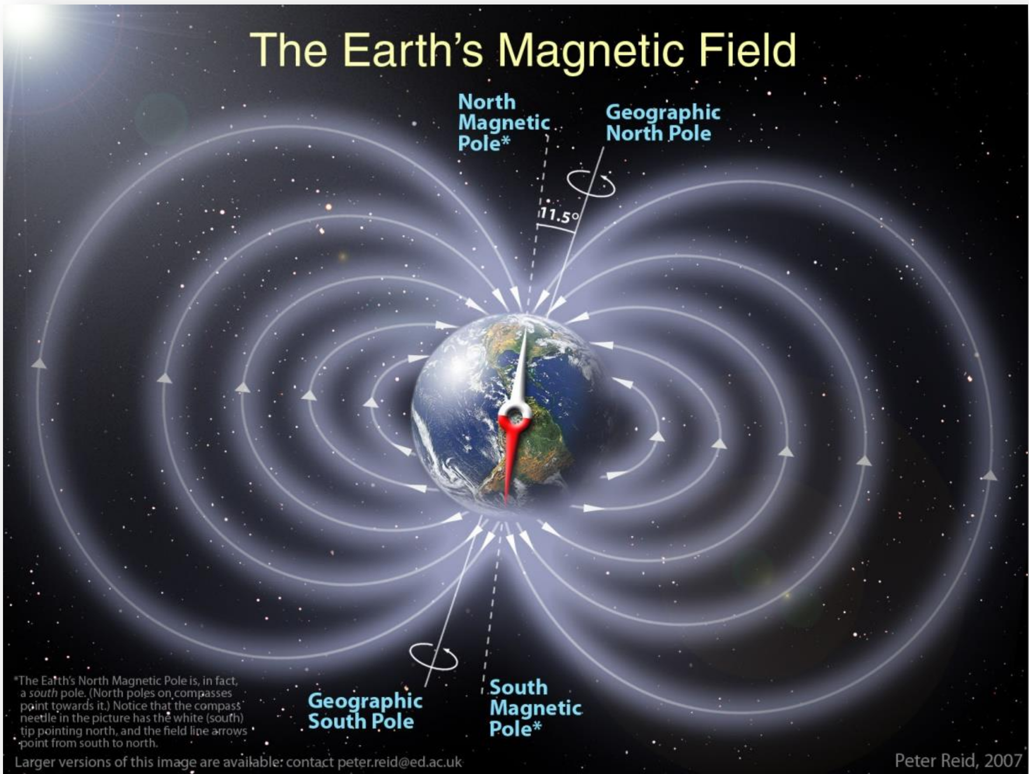


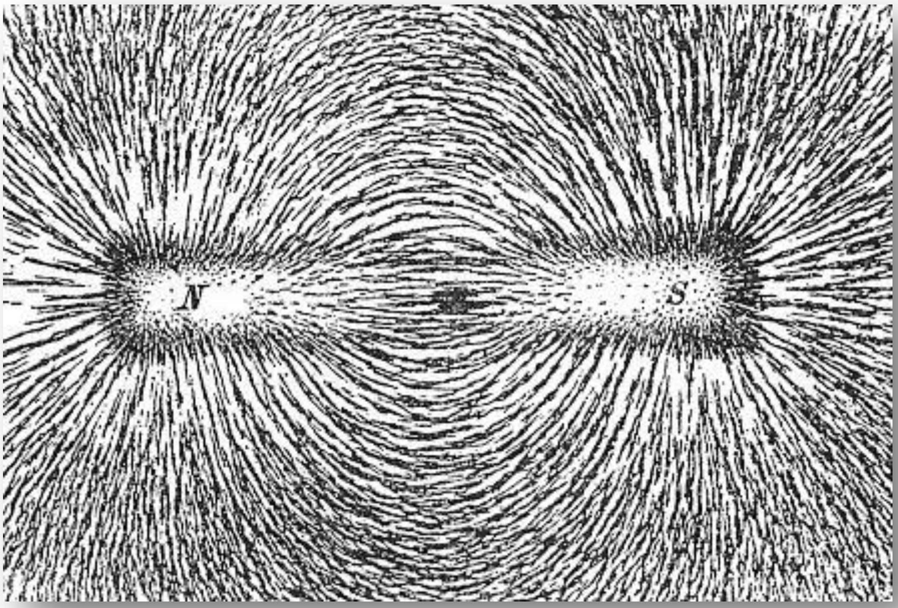
Las curvas de nivel tienen una gran relevancia, ya que se pueden encontrar en fenómenos naturales muy importantes. A continuación se presentan algunos ejemplos.

La magnetosfera:

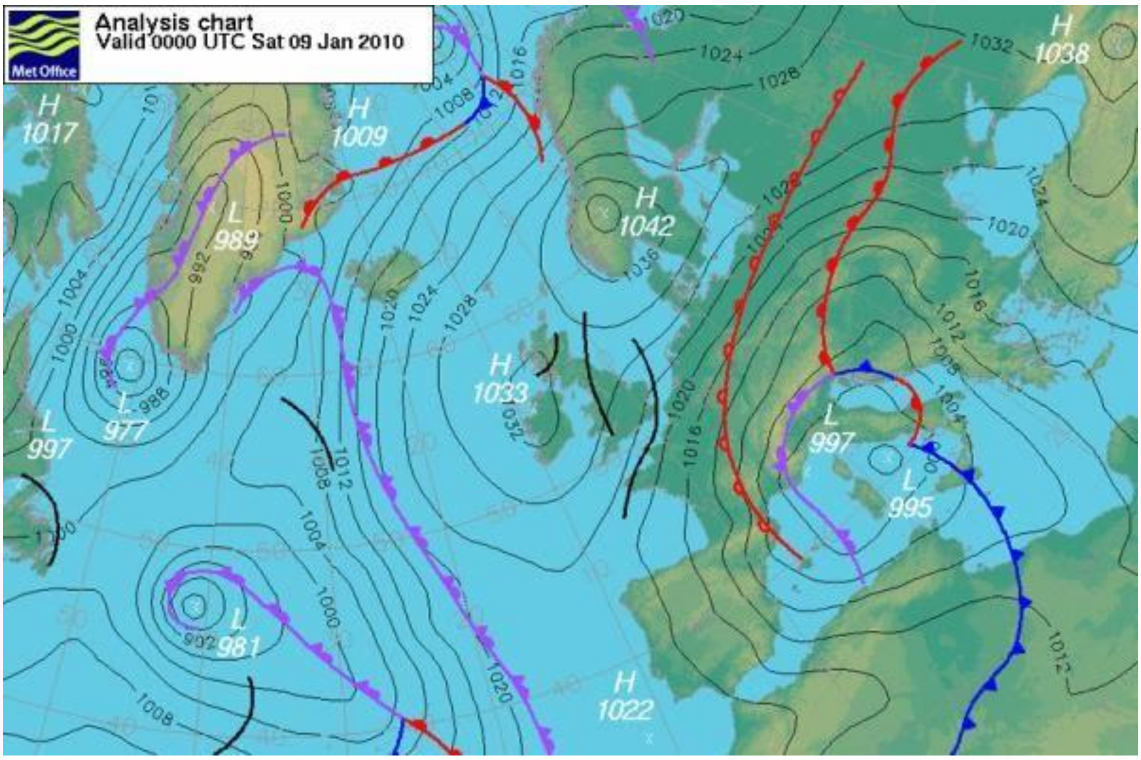


Campos magnéticos:

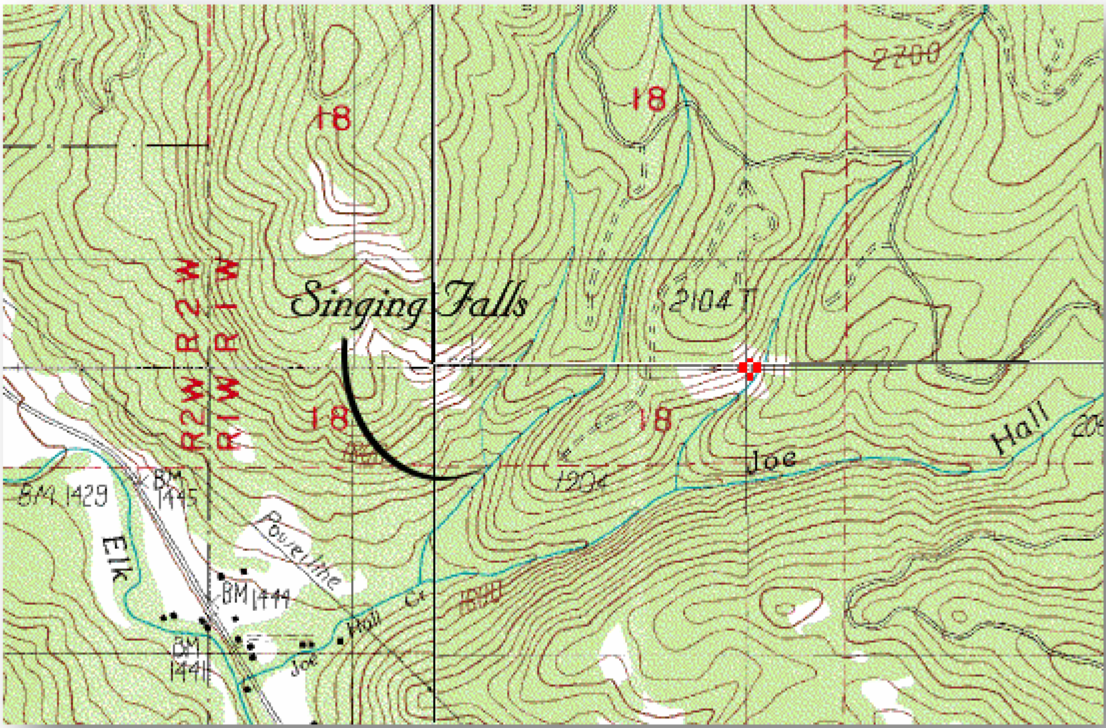




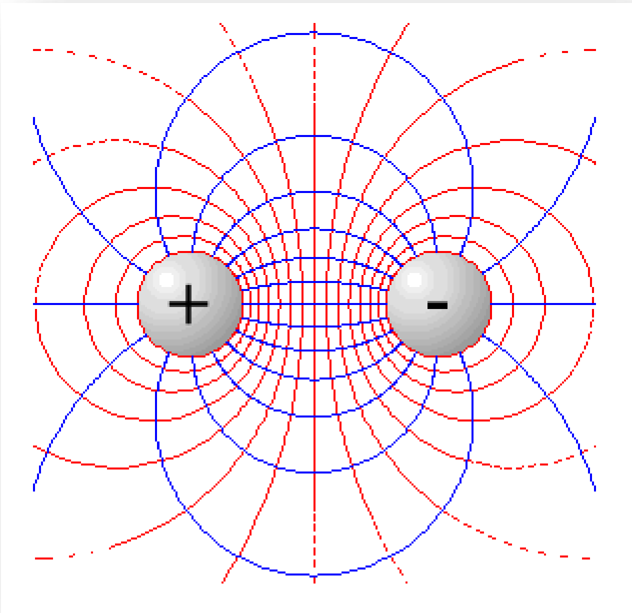
Áreas de altas y bajas presiones:



Mapas topológicos:



Campos electromagnéticos:



Además, en Economía también se utilizan las curvas de nivel. A continuación, vamos a estudiar un importante ejemplo, la función de Cobb–Douglas.

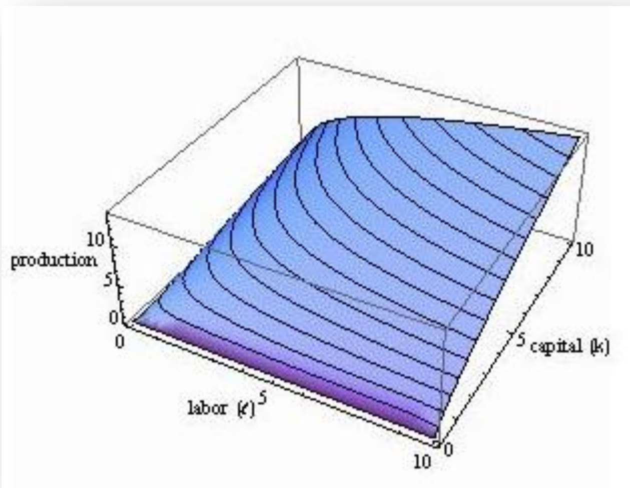
Función de Cobb–Douglas:
La función de Cobb-Douglas se utiliza muy frecuentemente en Economía para representar la relación entre los factores productivos (inputs) y el nivel de producción (output). Inicialmente, fue propuesta por Knut Wicksell (1851–1926), y más tarde, fue desarrollada por Charles Cobb y Paul Douglas. En 1928, Charles Cobb y Paul Douglas publicaron un estudio en el que modelizaban el crecimiento de la economía americana durante el periodo 1899 - 1922. En este artículo se consideraba una idea muy simplificada de la economía en la que la producción estaba determinada únicamente por dos factores, trabajo y capital. Aunque en la realidad la economía se ve afectada por una gran cantidad de factores, su modelo resultó ser bastante preciso. La función de Cobb-Douglas es de la siguiente forma:

$$Y = AL^{\alpha}K^{\beta},$$

donde:

- Y = producción total (valor monetario de todos los artículos producidos en un año).
- L = trabajo (número total de personas/horas trabajadas en un año).
- K = capital (valor monetario de toda la maquinaria, equipamiento, y edificios).
- A = factor total de productividad.
- α y β son las elasticidades de los factores de producción, trabajo y capital, respectivamente. Estos valores son constantes determinadas por la tecnología disponible.

Posteriormente, algunos autores han extendido la función de Cobb-Douglas añadiendo un tercer factor de producción, la tecnología, representada por T. En este caso, $Y = AL^{\alpha}K^{\beta}T^{\gamma}$. Pero nosotros no vamos a considerar esta extensión.



Las elasticidades de los factores de producción miden la sensibilidad de la producción ante cambios en los niveles de trabajo o capital utilizados, *ceteris paribus*. Por ejemplo, si α = 0,15, eso quiere decir que un incremento del 1% en el factor trabajo se traduciría, aproximadamente, en un incremento del 0,15% en la producción. Además,

- Si $\alpha + \beta = 1 \Rightarrow$ diremos que la función de producción tiene RENDIMIENTOS A ESCALA CONSTANTES. Es decir, si incrementamos L y K en un 20% cada uno, Y crecerá también un 20%. En decir, si la producción crece en la misma proporción que los factores, entonces hay rendimientos a escala constantes.
- Si $\alpha + \beta < 1 \Rightarrow$ diremos que la función de producción tiene RENDIMIENTOS A ESCALA DECRECIENTES. Si la producción crece en menor proporción que los factores, entonces hay rendimientos a escala decrecientes.
- Si $\alpha + \beta > 1 \Rightarrow$ diremos que la función de producción tiene RENDIMIENTOS A ESCALA CRECIENTES. Si la producción crece en mayor proporción que los factores, entonces hay rendimientos a escala crecientes.

2.1 DERIVADAS PARCIALES: VECTOR GRADIENTE Y MATRIZ HESSIANA.

TABLA DE DERIVADAS:

Funciones Algebraicas

Funciones	Derivadas
$y = k$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = f \pm g$	$y' = f' \pm g'$
$y = k \cdot f$	$y = k \cdot f'$
$y = \dfrac{k}{f}$	$y = \dfrac{-k \cdot f'}{f^2}$
$y = \dfrac{f}{k}$	$y = \dfrac{f'}{k}$
$y = f \cdot g$	$y = f' \cdot g + f \cdot g'$
$y = \dfrac{f}{g}$	$y = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Funciones Potenciales y Exponenciales

Funciones	Derivadas
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$
$y = f^n$	$y' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$
$y = f^{1/n} = \sqrt[n]{f}$	$y' = \dfrac{f'}{n \cdot \sqrt[n]{n \cdot f^{n-1}}}$
$y = a^f$	$y' = a^f \cdot f' \cdot \ln a$
$y = f^g$	$y' = g \cdot f^{g-1} \cdot f' + f^g \cdot g' \cdot \ln f$
$y = e^f$	$y' = e^f \cdot f'$

Funciones logarítmicas

Funciones	Derivadas
$y = \log_a f$	$y' = \frac{f'}{f} \log_a e$
$y = \ln f$	$y' = \frac{f'}{f}$

Funciones Trigonométricas

Funciones	Derivadas
$y = \sin f$	$y = f' \cdot \cos f$
$y = \cos f$	$y = -f' \cdot \sin f$
$y = \operatorname{tg} f = \tan f$	$y' = \frac{f'}{\cos^2 f} = f' \cdot \sec^2 f$
$y = \arcsin f$	$y' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$y = \arccos f$	$y' = -\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$y = \operatorname{arctg} f$	$y' = \frac{f'}{1+f^2}$

Regla de la cadena:

$$(fog)'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

DERIVADAS PARCIALES:

<u>Definición:</u> Sea $f: X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, X un conjunto abierto, $\vec{e_i} = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ el i-ésimo vector de la base canónica, y $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in X$. Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) = f_{x_i}(\vec{a}) = f'_{x_i}(\vec{a}) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{e_i}) - f(\vec{a})}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{h}\end{aligned}$$

es la DERIVADA PARCIAL de f respecto de la variable x_i.

En la práctica, las derivadas parciales son las derivadas de una función que dependa de más de una variable.

<u>Para una función de 2 variables:</u> Sea $f(x, y)$ una función que depende de dos variables. Si mantenemos constante y y derivamos f (suponiendo que f es derivable) con respecto a x, obtendremos la derivada parcial de f con respecto a x, y se denota por

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = f'_x.$$

Análogamente, Si mantenemos constante x y derivamos f (suponiendo que f es derivable) con respecto a y, obtendremos la derivada parcial de f con respecto a y, y se denota por

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = f'_y.$$

<u>Ejemplo 1:</u> Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ de $\boldsymbol{f(x, y) = x \ln(y)}$ en el punto $\vec{\boldsymbol{a}} = (\mathbf{1}, \mathbf{1})$.

<u>Solución</u>

To compute $\frac{\partial f}{\partial x}$ we assume y is constant and we differentiate f with respect to x to obtain

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathbf{ln}(\boldsymbol{y})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \ln(1) = \mathbf{0}$$

Now, to compute $\frac{\partial f}{\partial y}$ we assume x is constant and we differentiate f with respect to y to obtain

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = \frac{1}{1} = \mathbf{1}$$

<u>Ejemplo 2:</u> Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ de $\boldsymbol{f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}}$ en el punto $\vec{\boldsymbol{a}} = (\mathbf{2}, \mathbf{3})$.

<u>Solución</u>

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \boldsymbol{e^{\frac{x}{y}}} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 3) = \frac{\boldsymbol{e^{\frac{2}{3}}}}{\mathbf{3}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \boldsymbol{e^{\frac{x}{y}}} \cdot \left(\frac{-\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y^2}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2, 3) = \frac{\mathbf{-2}}{\mathbf{9}} \boldsymbol{e^{\frac{2}{3}}}$$

<u>Una función de 3 variables</u>: tiene 3 derivadas parciales.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = f'_x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = f'_y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f_z = f'_z$$

<u>Una función de n variables</u>: tiene n derivadas parciales.

<u>Ejemplo 3:</u> Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ y $\frac{\partial f}{\partial z}$ de $f(x,y,z) = 2x^2y^3 - xyz + 5z^3$ en el punto $\vec{a} = (1,2,1)$.

<u>Solución</u>

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathbf{4xy^3 - yz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,1) = 4 \cdot 1 \cdot 2^3 - 2 \cdot 1 = 4 \cdot 8 - 2 = \mathbf{30}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \mathbf{6x^2y^2 - xz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2,1) = 6 \cdot 1^2 \cdot 2^2 - 1 \cdot 1 = 6 \cdot 4 - 1 = \mathbf{23}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \mathbf{-xy + 15z^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,2,1) = -1 \cdot 2 + 15 \cdot 1^2 = -2 + 15 = \mathbf{13}$$

<u>Ejemplo 4:</u> Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ y $\frac{\partial f}{\partial z}$ de $f(x,y,z) = x^2 - 2xy + z^3$ en el punto $\vec{a} = \left(2, \frac{1}{2}, 0\right)$.

<u>Solución</u>

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathbf{2x - 2y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(2, \frac{1}{2}, 0\right) = 2 \cdot 2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 4 - 1 = \mathbf{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \mathbf{-2x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(2, \frac{1}{2}, 0\right) = -2 \cdot 2 = \mathbf{-4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \mathbf{3z^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}\left(2, \frac{1}{2}, 0\right) = 3 \cdot 0^2 = \mathbf{0}$$

VECTOR GRADIENTE:

<u>Definición:</u> El gradiente de una función de varias variables $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se define como una matriz columna o un vector cuyos componentes son las derivadas parciales de f, y se denota por $\nabla f = grad(f) = f'(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Es decir:

$$\nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \nabla f = grad(f) = f'(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

El gradiente de f en el punto $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ es

$$\nabla f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix}$$

<u>Ejemplo 1:</u> Calcule el gradiente de $\boldsymbol{f(x, y) = x \ln(y)}$ en el punto $\boldsymbol{\vec{a} = (1, 1)}$.

<u>Solución</u>

$$\nabla f = grad(f) = f'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{\ln(y)} \\ \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

<u>Ejemplo 2:</u> Calcule el gradiente de $\boldsymbol{f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}}$ en el punto $\vec{\boldsymbol{a}} = (\boldsymbol{2},\boldsymbol{3})$.

<u>Solución</u>

$$\nabla f = grad(f) = f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y}} \\ \boldsymbol{e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(\frac{-x}{y^2}\right)} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{e^{\frac{2}{3}}}{3}} \\ \boldsymbol{\frac{-2}{9} e^{\frac{2}{3}}} \end{pmatrix}$$

<u>Ejemplo 3:</u> Calcule el gradiente de $\boldsymbol{f(x,y,z) = 2x^2y^3 - xyz + 5z^3}$ en el punto $\vec{\boldsymbol{a}} = (\boldsymbol{1},\boldsymbol{2},\boldsymbol{1})$.

<u>Solución</u>

$$\nabla f = grad(f) = f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{4xy^3 - yz} \\ \boldsymbol{6x^2y^2 - xz} \\ \boldsymbol{-xy + 15z^2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{30} \\ \boldsymbol{23} \\ \boldsymbol{13} \end{pmatrix}$$

<u>Ejemplo 4:</u> Calcule el gradiente de $\boldsymbol{f(x,y,z) = x^2 - 2xy + z^3}$ en el punto $\vec{\boldsymbol{a}} = \left(\boldsymbol{2},\boldsymbol{\frac{1}{2}},\boldsymbol{0}\right)$.

<u>Solución</u>

$$\nabla f = grad(f) = f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2x - 2y} \\ \boldsymbol{-2x} \\ \boldsymbol{3z^2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{-4} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

<u>Ejercicio:</u> Calcule todas las derivadas parciales y el gradiente de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{f(x,y) = x^2y + 2x + y, \vec{a} = (0,1)}$
b) $\boldsymbol{f(x,y) = \mathrm{sen}(xy) + \cos(x), \vec{a} = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)}$
c) $\boldsymbol{f(x,y) = xe^{xy}, \vec{a} = (2,3)}$
d) $\boldsymbol{f(x,y) = \ln(x^2 + 2y), \vec{a} = (1,0)}$
e) $\boldsymbol{f(x,y) = yx^2 + 2y, \vec{a} = (3,-2)}$
f) $\boldsymbol{f(x,y) = xe^{x+y}, \vec{a} = (2,-1)}$
g) $\boldsymbol{f(x,y) = \ln(2x + yx), \vec{a} = (1,-1)}$
h) $\boldsymbol{f(x,y) = x\,\mathrm{sen}(x - y), \vec{a} = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)}$
i) $\boldsymbol{f(x,y) = 5y^5 + 4x^4y + 3x^2y^3 + 2xy^4 + 2x + 3y + 5, \vec{a} = (-2,1)}$
j) $\boldsymbol{f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2y^3+1}, \vec{a} = (2,5)}$
k) $\boldsymbol{f(x,y) = x\ln(y) + y\ln(x), \vec{a} = (2,1)}$
l) $\boldsymbol{f(x,y,z) = \ln(xyz), \vec{a} = (1,-2,-1)}$
m) $\boldsymbol{f(x,y,z) = x^2 + 2xy + y^2 + y^3z, \vec{a} = (2,-1,0)}$
n) $\boldsymbol{f(x,y) = (3xy - 4y^2)^3, \vec{a} = (-1,-1)}$
o) $\boldsymbol{f(x,y) = \frac{x}{x+y}}$
p) $\boldsymbol{f(z,t) = t^4\tan(3zt)}$
q) $\boldsymbol{f(x,y,z) = e^{\mathrm{sen}(xyz)}}$
r) $\boldsymbol{f(y,w) = \arccos(yw)}$
s) $\boldsymbol{f(x,y,z) = x \cdot \pi^z\sqrt{yz}}$
t) $\boldsymbol{f(x,y,z,w) = (xw)^{yz}, \vec{a} = (1,2,-1,1)}$
u) $\boldsymbol{f(x,y,z,w,t) = xyw - \sqrt{zwt}, \vec{a} = (-3,-1,2,2,1)}$
v) $\boldsymbol{f(x,y) = \tan(x^3 - 5y^2)}$
w) $\boldsymbol{f(x,y,z) = \frac{x^2y^4z}{x^2+y^2+z^2}}$
x) $\boldsymbol{f(x,y,z) = 2x + 3y^2 - \mathrm{sen}\,z}$

<u>Solución</u>

a)

$$f(x,y) = x^2y + 2x + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathbf{2xy + 2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 2 \cdot 0 \cdot 1 + 2 = \mathbf{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \boldsymbol{x^2 + 1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 0^2 + 1 = \mathbf{1}$$

$$\nabla f = grad(f) = f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2xy + 2} \\ \boldsymbol{x^2 + 1} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(0,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

b)

$$f(x,y) = \operatorname{sen}(xy) + \cos(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \boldsymbol{y \cos(xy) - \operatorname{sen}(x)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{2},0\right) = 0 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos(0) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - 1 = \mathbf{-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \boldsymbol{x \cos(xy)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2},0\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0\right) = \frac{\pi}{2}\cos(0) = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

$$\nabla f = grad(f) = f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y \cos(xy) - \operatorname{sen}(x)} \\ \boldsymbol{x \cos(xy)} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f\left(\frac{\pi}{2},0\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{2},0\right) \\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2},0\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \boldsymbol{\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix}$$

c)

$$f(x,y) = xe^{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} = \boldsymbol{e^{xy}(1 + xy)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,3) = e^{2\cdot 3}(1 + 2 \cdot 3) = \boldsymbol{7e^6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \boldsymbol{x^2 e^{xy}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2{,}3) = 2^2 e^{2\cdot 3} = \mathbf{4e^6}$$

$$\nabla f = grad(f) = f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e^{xy}(1+xy)} \\ \boldsymbol{x^2 e^{xy}} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(2{,}3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(2{,}3) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(2{,}3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{7e^6} \\ \boldsymbol{4e^6} \end{pmatrix}$$

d)

$$f(x,y) = \ln(x^2 + 2y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\boldsymbol{2x}}{\boldsymbol{x^2 + 2y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1{,}0) = \frac{2\cdot 1}{1^2 + 2\cdot 0} = \mathbf{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x^2 + 2y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1{,}0) = \frac{2}{1^2 + 2\cdot 0} = \mathbf{2}$$

$$\nabla f = grad(f) = f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{2x}}{\boldsymbol{x^2+2y}} \\ \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x^2+2y}} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(1{,}0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1{,}0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1{,}0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

e)

$$f(x,y) = yx^2 + 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \boldsymbol{2xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3,-2) = 2\cdot 3\cdot(-2) = \mathbf{-12}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \boldsymbol{x^2 + 2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(3,-2) = 3^2 + 2 = \mathbf{11}$$

$$\nabla f = grad(f) = f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2xy} \\ \boldsymbol{x^2+2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(3,-2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(3,-2) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(3,-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-12} \\ \boldsymbol{11} \end{pmatrix}$$

f)

$$f(x,y) = xe^{x+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y} + xe^{x+y} = \boldsymbol{e^{x+y}(1+x)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,-1) = e^{2-1}(1+2) = 3e^1 = \boldsymbol{3e}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \boldsymbol{xe^{x+y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,-1) = 2e^{2-1} = 2e^1 = \boldsymbol{2e}$$

$$\nabla f = grad(f) = f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e^{x+y}(1+x)} \\ \boldsymbol{xe^{x+y}} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(2,-1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(2,-1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(2,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{3e} \\ \boldsymbol{2e} \end{pmatrix}$$

g)

$$f(x,y) = \ln(2x+yx)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2+y}{2x+yx} = \frac{2+y}{(2+y)x} = \boldsymbol{\frac{1}{x}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) = \frac{1}{1} = \boldsymbol{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2x+yx} = \frac{x}{(2+y)x} = \boldsymbol{\frac{1}{2+y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = \frac{1}{2-1} = \frac{1}{1} = \boldsymbol{1}$$

$$\nabla f = grad(f) = f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{1}{x}} \\ \boldsymbol{\frac{1}{2+y}} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(1,-1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

h)

$$f(x,y) = x\,\mathrm{sen}(x-y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \boldsymbol{\mathrm{sen}(x-y) + x\cos(x-y)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\mathbf{0},\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}\right) = \mathrm{sen}\left(0-\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}\right) + 0\cos\left(0-\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}\right) = -1+0 = \mathbf{-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \boldsymbol{-x\cos(x-y)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,\frac{\pi}{2}\right) = -0\cos\left(0-\frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{0}$$

$$\nabla f = grad(f) = f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mathrm{sen}(x-y) + x\cos(x-y)} \\ \boldsymbol{-x\cos(x-y)} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f\left(0,\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

i)

$$f(x,y) = 5y^5 + 4x^4y + 3x^2y^3 + 2xy^4 + 2x + 3y + 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \boldsymbol{16x^3y + 6xy^3 + 2y^4 + 2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-2,1) = 16(-2)^3 \cdot 1 + 6(-2) \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^4 + 2 = \mathbf{-136}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \boldsymbol{25y^4 + 4x^4 + 9x^2y^2 + 8xy^3 + 3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-2,1) = 25(-2)^4 + 4(-2)^4 + 9(-2)^2(-2)^2 + 8(-2) \cdot 1^3 + 3 = \mathbf{595}$$

$$\nabla f = grad(f) = f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{16x^3y + 6xy^3 + 2y^4 + 2} \\ \mathbf{25y^4 + 4x^4 + 9x^2y^2 + 8xy^3 + 3} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(-2,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(-2,1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(-2,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-136} \\ \mathbf{595} \end{pmatrix}$$

j)

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2y^3 + 1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2(x^2y^3 + 1) - xy^2(2xy^3)}{(x^2y^3 + 1)^2} = \frac{y^2(x^2y^3 + 1 - 2x^2y^3)}{(x^2y^3 + 1)^2} = -\boldsymbol{y^2}\frac{\boldsymbol{x^2y^3 - 1}}{\boldsymbol{(x^2y^3 + 1)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,5) = -5^2\frac{2^25^3 - 1}{(2^25^3 + 1)^2} = \frac{\mathbf{-12475}}{\mathbf{251001}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy(x^2y^3 + 1) - xy^2(3x^2y^2)}{(x^2y^3 + 1)^2} = \frac{xy(2x^2y^3 + 2 - 3x^2y^3)}{(x^2y^3 + 1)^2} = -\boldsymbol{xy}\frac{\boldsymbol{x^2y^3 - 2}}{\boldsymbol{(x^2y^3 + 1)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,5) = -2 \cdot 5\frac{2^25^3 - 2}{(2^25^3 + 1)^2} = \frac{\mathbf{-4980}}{\mathbf{251001}}$$

$$\nabla f = grad(f) = f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{y^2}\frac{\boldsymbol{x^2y^3 - 1}}{\boldsymbol{(x^2y^3 + 1)^2}} \\ -\boldsymbol{xy}\frac{\boldsymbol{x^2y^3 - 2}}{\boldsymbol{(x^2y^3 + 1)^2}} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(2,5) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(2,5) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(2,5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{-12475}}{\mathbf{251001}} \\ \frac{\mathbf{-4980}}{\mathbf{251001}} \end{pmatrix}$$

k)

$$f(x,y) = x\ln(y) + y\ln(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \ln(y) + y\frac{1}{x} = \mathbf{ln}(\boldsymbol{y}) + \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \ln(1) + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{1}{y} + \ln(x) = \mathbf{ln}(\boldsymbol{x}) + \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \ln(2) + \frac{2}{1} = 0{,}6931 + 2 = \mathbf{2{,}6931}$$

$$\nabla f = grad(f) = f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{\ln(y) + \frac{y}{x}} \\ \mathbf{\ln(x) + \frac{x}{y}} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(2,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{\frac{1}{2}} \\ \mathbf{2,6931} \end{pmatrix}$$

l)

$$f(x,y,z) = \ln(xyz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{yz}{xyz} = \mathbf{\frac{1}{x}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,-2,-1) = \frac{1}{1} = \mathbf{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{xz}{xyz} = \mathbf{\frac{1}{y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,-2,-1) = \frac{1}{-2} = \mathbf{\frac{-1}{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{xy}{xyz} = \mathbf{\frac{1}{z}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,-2,-1) = \frac{1}{-1} = \mathbf{-1}$$

$$\nabla f = grad(f) = f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{\frac{1}{x}} \\ \mathbf{\frac{1}{y}} \\ \mathbf{\frac{1}{z}} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(1,-2,-1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1,-2,-1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,-2,-1) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(1,-2,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{\frac{-1}{2}} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

m)

$$f(x,y,z) = x^2 + 2xy + y^2 + y^3 z$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathbf{2x + 2y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,-1,0) = 2\cdot 2 + 2\cdot(-1) = \mathbf{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \boldsymbol{2x + 2y + 3y^2 z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,-1,0) = 2\cdot 2 + 2\cdot(-1) + 3(-1)^2 0 = \mathbf{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \boldsymbol{y^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(2,-1,0) = (-1)^3 = \mathbf{-1}$$

$$\nabla f = grad(f) = f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2x + 2y} \\ \boldsymbol{2x + 2y + 3y^2 z} \\ \boldsymbol{y^3} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(2,-1,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(2,-1,0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(2,-1,0) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(2,-1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

n)

$$f(x,y) = (3xy - 4y^2)^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3(3xy - 4y^2)^2 3y = \boldsymbol{9y(3xy - 4y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,-1) = 9(-1)(3(-1)(-1) - 4(-1)^2)^2 = \mathbf{-9}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3(3xy - 4y^2)^2(3x - 8y) = \boldsymbol{(3xy - 4y^2)^2(9x - 24y)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1,-1) = (3(-1)(-1) - 4(-1)^2)^2\big(9(-1) - 24(-1)\big) = \mathbf{15}$$

$$\nabla f = grad(f) = f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{9y(3xy - 4y^2)^2} \\ \boldsymbol{(3xy - 4y^2)^2(9x - 24y)} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(-1,-1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(-1,-1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(-1,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-9} \\ \mathbf{15} \end{pmatrix}$$

o)

$$f(x,y) = \frac{x}{x+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x+y-x}{(x+y)^2} = \boldsymbol{\frac{y}{(x+y)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\boldsymbol{\frac{x}{(x+y)^2}}$$

$$\nabla f = grad(f) = f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{y}{(x+y)^2}} \\ -\boldsymbol{\frac{x}{(x+y)^2}} \end{pmatrix}$$

p)

$$f(z,t) = t^4 \tan(3zt)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = t^4 3t \frac{1}{\cos^2(3zt)} = \boldsymbol{3t^5 \frac{1}{\cos^2(3zt)}}$$

Or

$$\frac{\partial f}{\partial z} = t^4 3t \sec^2(3zt) = \boldsymbol{3t^5 \sec^2(3zt)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \boldsymbol{3t^3 \tan(3zt) + t^4 \frac{3z}{\cos^2(3zt)}}$$

Or

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \boldsymbol{3t^3 \tan(3zt) + 3t^4 z \sec^2(3zt)}$$

$$\nabla f = grad(f) = f'(z,t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{3t^5 \frac{1}{\cos^2(3zt)}} \\ \boldsymbol{3t^3 \tan(3zt) + t^4 \frac{3z}{\cos^2(3zt)}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{3t^5 \sec^2(3zt)} \\ \boldsymbol{3t^3 \tan(3zt) + 3t^4 z \sec^2(3zt)} \end{pmatrix}$$

q)

$$f(x,y,z) = e^{\sin(xyz)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \boldsymbol{e^{\mathrm{sen}(xyz)} \cdot \cos(xyz) \cdot yz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \boldsymbol{e^{\mathrm{sen}(xyz)} \cdot \cos(xyz) \cdot xz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \boldsymbol{e^{\mathrm{sen}(xyz)} \cdot \cos(xyz) \cdot xy}$$

$$\nabla f = grad(f) = f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e^{\mathrm{sen}(xyz)} \cdot \cos(xyz) \cdot yz} \\ \boldsymbol{e^{\mathrm{sen}(xyz)} \cdot \cos(xyz) \cdot xz} \\ \boldsymbol{e^{\mathrm{sen}(xyz)} \cdot \cos(xyz) \cdot xy} \end{pmatrix}$$

r)

$$f(y,w) = \arccos(yw)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \boldsymbol{\frac{-w}{\sqrt{1-y^2w^2}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial w} = \boldsymbol{\frac{-y}{\sqrt{1-y^2w^2}}}$$

$$\nabla f = grad(f) = f'(y,w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{-w}{\sqrt{1-y^2w^2}}} \\ \boldsymbol{\frac{-y}{\sqrt{1-y^2w^2}}} \end{pmatrix}$$

s)

$$f(x,y,z) = x \cdot \pi^z \sqrt{yz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \boldsymbol{\pi^z \sqrt{yz}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot \pi^z \frac{1}{2} \frac{z}{\sqrt{yz}} = \boldsymbol{\frac{x \cdot \pi^z \cdot z}{2\sqrt{yz}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x \cdot \pi^z \ln \pi \sqrt{yz} + x \cdot \pi^z \frac{1}{2} \frac{y}{\sqrt{yz}} = \boldsymbol{x \cdot \pi^z \left(\ln \pi \sqrt{yz} + \frac{y}{2\sqrt{yz}} \right)}$$

$$\nabla f = grad(f) = f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi^z \sqrt{yz}} \\ \boldsymbol{\frac{x \cdot \pi^z \cdot z}{2\sqrt{yz}}} \\ \boldsymbol{x \cdot \pi^z \left(\ln \pi \sqrt{yz} + \frac{y}{2\sqrt{yz}} \right)} \end{pmatrix}$$

t)

$$f(x,y,z,w) = (xw)^{yz}$$

Recuerde que cuando $y = f^n \Rightarrow y' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$, y cuando $y = a^f \Rightarrow y' = a^f \cdot f' \cdot \ln a$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz(xw)^{yz-1}w = \boldsymbol{yzw(xw)^{yz-1}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,-1,1) = 2\cdot(-1)\cdot 1\cdot(1\cdot 1)^{2\cdot(-1)-1} = \mathbf{-2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \boldsymbol{(xw)^{yz}\cdot z\cdot \ln(xw)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2,-1,1) = (1\cdot 1)^{2\cdot(-1)}\cdot(-1)\cdot\ln(1\cdot 1) = -\ln(1) = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \boldsymbol{(xw)^{yz}\cdot y\cdot \ln(xw)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,2,-1,1) = (1\cdot 1)^{2\cdot(-1)}\cdot 2\cdot\ln(1\cdot 1) = 2\cdot\ln(1) = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial w} = yz(xw)^{yz-1}x = \boldsymbol{yzx(xw)^{yz-1}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial w}(1,2,-1,1) = 2\cdot(-1)\cdot 1\cdot(1\cdot 1)^{2\cdot(-1)-1} = \mathbf{-2}$$

$$\nabla f = grad(f) = f'(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{yzw(xw)^{yz-1}} \\ \boldsymbol{(xw)^{yz}\cdot z\cdot \ln(xw)} \\ \boldsymbol{(xw)^{yz}\cdot y\cdot \ln(xw)} \\ \boldsymbol{yzx(xw)^{yz-1}} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(1,2,-1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1,2,-1,1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,2,-1,1) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(1,2,-1,1) \\ \frac{\partial f}{\partial w}(1,2,-1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

u)

$$f(x,y,z,w,t) = xyw - \sqrt{zwt}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \boldsymbol{yw}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-3,-1,2,2,1) = (-1)\cdot 2 = \mathbf{-2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \boldsymbol{xw}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-3,-1,2,2,1) = (-3) \cdot 2 = \mathbf{-6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{\boldsymbol{wt}}{\mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{zwt}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(-3,-1,2,2,1) = -\frac{2 \cdot 1}{2\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial w} = \boldsymbol{xy} - \frac{\boldsymbol{zt}}{\mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{zwt}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial w}(-3,-1,2,2,1) = (\mathbf{-3})(\mathbf{-1}) - \frac{2 \cdot 1}{2\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 1}} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\boldsymbol{zw}}{\mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{zwt}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(-3,-1,2,2,1) = -\frac{2 \cdot 2}{2\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 1}} = \mathbf{-1}$$

$$\nabla f = grad(f) = f'(x,y,z,w,t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial w} \\ \frac{\partial f}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{yw} \\ \boldsymbol{xw} \\ -\frac{\boldsymbol{wt}}{\mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{zwt}}} \\ \boldsymbol{xy} - \frac{\boldsymbol{zt}}{\mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{zwt}}} \\ -\frac{\boldsymbol{zw}}{\mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{zwt}}} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(-3,-1,2,2,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(-3,-1,2,2,1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(-3,-1,2,2,1) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(-3,-1,2,2,1) \\ \frac{\partial f}{\partial w}(-3,-1,2,2,1) \\ \frac{\partial f}{\partial t}(-3,-1,2,2,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{-6} \\ \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}} \\ \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

v)

$$f(x,y) = \tan(x^3 - 5y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2}{\cos^2(x^3 - 5y^2)} = \mathbf{3x^2 \sec^2(x^3 - 5y^2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-10y}{\cos^2(x^3 - 5y^2)} = \mathbf{10y \sec^2(x^3 - 5y^2)}$$

$$\nabla f = grad(f) = f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3x^2}{\cos^2(x^3 - 5y^2)} \\ \frac{-10y}{\cos^2(x^3 - 5y^2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 \sec^2(x^3 - 5y^2) \\ 10y \sec^2(x^3 - 5y^2) \end{pmatrix}$$

w)

$$f(x,y,z) = \frac{x^2y^4z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy^4z(x^2 + y^2 + z^2) - x^2y^4z2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{2xy^4z(x^2 + y^2 + z^2 - x^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$
$$= \frac{\mathbf{2xy^4z(y^2 + z^2)}}{\mathbf{(x^2 + y^2 + z^2)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4x^2y^3z(x^2 + y^2 + z^2) - x^2y^4z2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{4x^2y^3z(x^2 + y^2 + z^2) - 2x^2y^5z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$
$$= \frac{2x^2y^3z(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{\mathbf{2x^2y^3z(2x^2 + y^2 + 2z^2)}}{\mathbf{(x^2 + y^2 + z^2)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x^2y^4(x^2 + y^2 + z^2) - x^2y^4z2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{x^2y^4(x^2 + y^2 + z^2) - 2x^2y^4z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$
$$= \frac{x^2y^4(x^2 + y^2 + z^2 - 2z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{\mathbf{x^2y^4(x^2 + y^2 - z^2)}}{\mathbf{(x^2 + y^2 + z^2)^2}}$$

$$\nabla f = grad(f) = f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2xy^4z(y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \\ \frac{2x^2y^3z(2x^2 + y^2 + 2z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \\ \frac{x^2y^4(x^2 + y^2 - z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \end{pmatrix}$$

x)

$$f(x,y,z) = 2x + 3y^2 - \operatorname{sen} z$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathbf{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \mathbf{6y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\cos z$$

$$\nabla f = grad(f) = f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{6y} \\ -\cos z \end{pmatrix}$$

DERIVADAS PARCIALES SEGUNDAS Y MATRIZ HESSIANA:

Las derivadas parciales segundas se denotan por

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f'_{x_i x_j} = f_{x_i x_j}.$$

Y son las derivadas parciales primeras de las derivadas parciales de primer orden.

Cuando $i \neq j \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, y se llaman DERIVADAS CRUZADAS.

Por el contrario, cuando $i = j \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

<u>**Ejemplo:**</u> **Calcule todas las derivadas parciales segundas de $\boldsymbol{f(x,y) = x^3 + 2xy}$, en el punto $\vec{\boldsymbol{a}} = (\mathbf{1},\mathbf{2})$.**

<u>Solución</u>

En primer lugar, tenemos que calcular las derivadas parciales de primer orden.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x$$

A continuación, calculamos las derivadas parciales de segundo orden.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathbf{6x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2) = \mathbf{6}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \mathbf{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2) = \mathbf{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2) = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \mathbf{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,2) = \mathbf{2}$$

Definición (MATRIZ HESSIANA): La matriz Hessiana de una function de varias variables $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, se define como la matriz $H\ n \times n$ cuyos (i, j)-ésimos elementos son las derivadas parciales de segundo orden de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Es decir,

$$\nabla^2 f = H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

Observación: Como $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, cuando $i \neq j$, $H(f)$ siempre será una matriz simétrica.

La matriz Hessiana en un punto se define como:

$$\nabla^2 f(\vec{a}) = H(f)(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\vec{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix}$$

Ejemplo: **Calcule la matriz Hessiana de $f(x,y) = x^3 + 2xy$, en el punto $\vec{a} = (1,2)$.**

Solución

Por el ejemplo anterior ya sabemos las derivadas parciales de segundo orden de la función anterior, por lo que únicamente tenemos que rellenar la matriz Hessiana con ellas.

$$\nabla^2 f = H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{6x} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(1,2) = H(f)(1,2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,2) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Ejercicio: **Calcule el vector gradiente y la matriz hessiana de las siguientes matrices:**

a) $f(x,y) = 5x^2y + 3x^2y^2 + 5y^3$
b) $f(x,y) = (x^2 + y^3)^5$
c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$
d) $f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2 - 2x$
e) $f(x,y) = e^{2x+3y}$
f) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$
g) $f(x,y) = x^y$
h) $f(x,y,z) = \ln\left(\frac{xy}{z}\right)$, **en el punto** $\vec{a} = (e, e^2, 1)$.
i) $f(x,y) = e^x y + xe^y$, **en el punto** $\vec{a} = (0,1)$.
j) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2 + y}$, **en el punto** $\vec{a} = (1,0)$.
k) $f(x,y) = e^{xy}$, **en el punto** $\vec{a} = (-1,0)$.

Solución

a)

$$f(x,y) = 5x^2y + 3x^2y^2 + 5y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10xy + 6xy^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 5x^2 + 6x^2y + 15y^2$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{10xy + 6xy^2} \\ \mathbf{5x^2 + 6x^2y + 15y^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10y + 6y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 10x + 12xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^2 + 30y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 10x + 12xy$$

$$\nabla^2 f = H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{10y + 6y^2} & \mathbf{10x + 12xy} \\ \mathbf{10x + 12xy} & \mathbf{6x^2 + 30y} \end{pmatrix}$$

b)

$$f(x, y) = (x^2 + y^3)^5$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x(x^2 + y^3)^4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 15y^2(x^2 + y^3)^4$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{10x(x^2 + y^3)^4} \\ \mathbf{15y^2(x^2 + y^3)^4} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10(x^2 + y^3)^4 + 80x^2(x^2 + y^3)^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 120xy^2(x^2 + y^3)^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 30y(x^2 + y^3)^4 + 180y^4(x^2 + y^3)^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 120xy^2(x^2 + y^3)^3$$

$$\nabla^2 f = H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{10(x^2 + y^3)^4 + 80x^2(x^2 + y^3)^3} & \mathbf{120xy^2(x^2 + y^3)^3} \\ \mathbf{120xy^2(x^2 + y^3)^3} & \mathbf{30y(x^2 + y^3)^4 + 180y^4(x^2 + y^3)^3} \end{pmatrix}$$

c)

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 12$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3x^2 - 3} \\ \mathbf{3y^2 - 12} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

$$\nabla^2 f = H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{6x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{6y} \end{pmatrix}$$

d)

$$f(x, y, z) = x^2 y + y^2 z + z^2 - 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2yz$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y^2 + 2z$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2xy - 2} \\ \mathbf{x^2 + 2yz} \\ \mathbf{y^2 + 2z} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 2y$$

$$\nabla^2 f = H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2y} & \mathbf{2x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2x} & \mathbf{2z} & \mathbf{2y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2y} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

e)

$$f(x,y) = e^{2x+3y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^{2x+3y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3e^{2x+3y}$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2e^{2x+3y}} \\ \boldsymbol{3e^{2x+3y}} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4e^{2x+3y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6e^{2x+3y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 9e^{2x+3y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6e^{2x+3y}$$

$$\nabla^2 f = H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{4e^{2x+3y}} & \boldsymbol{6e^{2x+3y}} \\ \boldsymbol{6e^{2x+3y}} & \boldsymbol{9e^{2x+3y}} \end{pmatrix}$$

f)

$$f(x,y) = \mathrm{sen}(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(xy)$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y\cos(xy)} \\ \boldsymbol{x\cos(xy)} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y^2 \operatorname{sen}(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \cos(xy) - yx \operatorname{sen}(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^2 \operatorname{sen}(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \cos(xy) - xy \operatorname{sen}(xy)$$

$$\nabla^2 f = H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{-y^2 \operatorname{sen}(xy)} & \boldsymbol{\cos(xy) - xy \operatorname{sen}(xy)} \\ \boldsymbol{\cos(xy) - xy \operatorname{sen}(xy)} & \boldsymbol{-x^2 \operatorname{sen}(xy)} \end{pmatrix}$$

g)

$$f(x, y) = x^y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln(x)$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{yx^{y-1}} \\ \boldsymbol{x^y \ln(x)} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2} = (y^2 - y)x^{y-2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln(x) = x^{y-1}(1 + y \ln(x))$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^y \ln(x) \ln(x) = x^y (\ln(x))^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = yx^{y-1} \ln(x) + x^y \frac{1}{x} = yx^{y-1} \ln(x) + \frac{x^y}{x} = yx^{y-1} \ln(x) + x^{y-1}$$
$$= x^{y-1}(y \ln(x) + 1)$$

$$\nabla^2 f = H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{(y^2 - y)x^{y-2}} & \boldsymbol{x^{y-1}(1 + y\ln(x))} \\ \boldsymbol{x^{y-1}(1 + y\ln(x))} & \boldsymbol{x^y(\ln(x))^2} \end{pmatrix}$$

h)

$$f(x,y,z) = \ln\left(\frac{xy}{z}\right)$$

$$\vec{a} = (e, e^2, 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{z}{xy} \cdot \frac{y}{z} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{z}{xy} \cdot \frac{x}{z} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{xy} \cdot \left(-\frac{xy}{z^2}\right) = -\frac{1}{z}$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} \\ -\frac{1}{z} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(e, e^2, 1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(e, e^2, 1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(e, e^2, 1) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(e, e^2, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{1}{e}} \\ \boldsymbol{\frac{1}{e^2}} \\ \boldsymbol{-1} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{z^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0$$

$$\nabla^2 f = H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\frac{1}{x^2}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{\frac{1}{y^2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\frac{1}{z^2}} \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(e, e^2, 1) = H(f)(e, e^2, 1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(e, e^2, 1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(e, e^2, 1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(e, e^2, 1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(e, e^2, 1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(e, e^2, 1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(e, e^2, 1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(e, e^2, 1) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(e, e^2, 1) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(e, e^2, 1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\frac{1}{e^2}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{\frac{1}{e^4}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

i)

$$f(x, y) = e^x y + x e^y$$

$$\vec{a} = (0,1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y e^x + e^y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x + x e^y$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{ye^x + e^y} \\ \boldsymbol{e^x + xe^y} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(0,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1 + e} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ye^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^x + e^y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = xe^y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^x + e^y$$

$$\nabla^2 f = H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{ye^x} & \boldsymbol{e^x + e^y} \\ \boldsymbol{e^x + e^y} & \boldsymbol{xe^y} \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(0,1) = H(f)(0,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1 + e} \\ \boldsymbol{1 + e} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

j)

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 + y}$$

$$\vec{a} = (1,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y}}}{1 + \left(\sqrt{x^2 + y}\right)^2} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 + y}}}{1 + x^2 + y} = \frac{x}{(1 + x^2 + y)\sqrt{x^2 + y}}$$
$$= x(1 + x^2 + y)^{-1}(x^2 + y)^{-1/2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2+y}}}{1+\left(\sqrt{x^2+y}\right)^2}=\frac{1}{2(1+x^2+y)\sqrt{x^2+y}}=\frac{1}{2}(1+x^2+y)^{-1}(x^2+y)^{-1/2}$$

$$\nabla f=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\boldsymbol{x}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{y})\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{y}}}\\ \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{2}+\mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{2}\boldsymbol{y})\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{y}}}\end{pmatrix}$$

$$\nabla f(1{,}0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(1{,}0)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(1{,}0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{0}{(1+0^2+1)\sqrt{0^2+1}}\\ \frac{1}{(2+2\cdot 0^2+2\cdot 1)\sqrt{0^2+1}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{(1+x^2+y)\sqrt{x^2+y}-x\left(2x\sqrt{x^2+y}+(1+x^2+y)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y}}\right)}{\left((1+x^2+y)\sqrt{x^2+y}\right)^2}=$$

$$=\frac{(1+x^2+y)\sqrt{x^2+y}-x\left(2x\sqrt{x^2+y}+\frac{(2x+2x^3+2xy)}{2\sqrt{x^2+y}}\right)}{\left((1+x^2+y)\sqrt{x^2+y}\right)^2}=$$

$$=\frac{(1+x^2+y)\sqrt{x^2+y}-x\left(\frac{4x(x^2+y)+(2x+2x^3+2xy)}{2\sqrt{x^2+y}}\right)}{\left((1+x^2+y)\sqrt{x^2+y}\right)^2}=$$

$$=\frac{(1+x^2+y)\sqrt{x^2+y}-x\left(\frac{4x^3+4xy+2x+2x^3+2xy}{2\sqrt{x^2+y}}\right)}{\left((1+x^2+y)\sqrt{x^2+y}\right)^2}=$$

$$=\frac{(1+x^2+y)\sqrt{x^2+y}-\left(\frac{4x^4+4x^2y+2x^2+2x^4+2x^2y}{2\sqrt{x^2+y}}\right)}{\left((1+x^2+y)\sqrt{x^2+y}\right)^2}=$$

$$=\frac{(1+x^2+y)\sqrt{x^2+y}-\left(\frac{6x^4+6x^2y+2x^2}{2\sqrt{x^2+y}}\right)}{\left((1+x^2+y)\sqrt{x^2+y}\right)^2}=$$

$$= \frac{\dfrac{2(1+x^2+y)(x^2+y) - 6x^4 - 6x^2y - 2x^2}{2\sqrt{x^2+y}}}{(1+x^2+y)^2(x^2+y)} =$$

$$= \frac{2(1+x^2+y)(2x^2+2y) - 6x^4 - 6x^2y - 2x^2}{2(1+x^2+y)^2(x^2+y)\sqrt{x^2+y}} =$$

$$= \frac{2x^2 + y + 2x^4 + 2x^2y + 2x^2y + 2y^2 - 6x^4 - 6x^2y - 2x^2}{(1+x^2+y)^2(2x^2+2y)\sqrt{x^2+y}} =$$

$$= \frac{y - 4x^4 - 2x^2y + 2y^2}{(1+x^2+y)^2(2x^2+2y)\sqrt{x^2+y}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x\left(-(1+x^2+y)^{-2}(x^2+y)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(1+x^2+y)^{-1}(x^2+y)^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\left(-(1+x^2+y)^{-2}(x^2+y)^{-1/2} - \frac{1}{2}(1+x^2+y)^{-1}(x^2+y)^{-3/2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{1}{2}\left(-(1+x^2+y)^{-2}2x(x^2+y)^{-1/2} - \frac{1}{2}(1+x^2+y)^{-1}(x^2+y)^{-3/2}2x\right) =$$

$$= x\left(-(1+x^2+y)^{-2}(x^2+y)^{-1/2} - \frac{1}{2}(1+x^2+y)^{-1}(x^2+y)^{-3/2}\right)$$

$$\nabla^2 f = H(f) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(1,0) = H(f)(1,0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{\dfrac{-1}{2}} \\ \mathbf{\dfrac{-1}{2}} & \mathbf{\dfrac{-1}{4}} \end{pmatrix}$$

k)

$$f(x,y) = e^{xy}$$

$$\vec{a} = (-1,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{ye^{xy}} \\ \boldsymbol{xe^{xy}} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(-1{,}0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(-1{,}0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(-1{,}0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{xy} + xye^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^{xy} + yxe^{xy}$$

$$\nabla^2 f = H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y^2 e^{xy}} & \boldsymbol{e^{xy} + xye^{xy}} \\ \boldsymbol{e^{xy} + xye^{xy}} & \boldsymbol{x^2 e^{xy}} \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(-1{,}0) = H(f)(-1{,}0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1{,}0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1{,}0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-1{,}0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1{,}0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

MATRIZ JACOBIANA:

Definición: La matriz Jacobiana de una función vectorial está formada por todas las primeras derivadas parciales de esta última. Suponga que $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, donde

$$f(x_1, \dots, x_n) = y = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Las derivadas parciales primeras de estas funciones se pueden escribir en una matriz $m \times n$, denominada jacobiano, y denotada por $J(f)$, es decir:

$$J(f) = Jac\ f = J_f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana en el punto $\vec{a}$ es

$$J(f)(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix}.$$

La fila i-ésima $(i = 1, \dots, m)$ de esta matriz es el gradiente de la i-ésima función f_i, dentro de f.

<u>Ejemplo 1:</u> Calcule el jacobiano de la función $\boldsymbol{f(x,y) = \left(x \ln(y), e^{\frac{x}{y}}\right)}$ en el punto $\boldsymbol{\vec{a} = (1,1)}$.

<u>Solución</u>

$$f_1 = x \ln(y)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \ln(y)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(1,1) = \ln(1) = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(1,1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$f_2 = e^{\frac{x}{y}}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(1,1) = \frac{e^1}{1} = e$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(\frac{-x}{y^2}\right)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(1,1) = \frac{-1}{1} e^{\frac{1}{1}} = -e$$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{ln}(\boldsymbol{y}) & \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} \\ \boldsymbol{e}^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{y}} & \boldsymbol{e}^{\frac{x}{y}} \cdot \left(\frac{-\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}^2}\right) \end{pmatrix}$$

$$J(f)(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(1,1) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{e} & -\boldsymbol{e} \end{pmatrix}$$

<u>Ejemplo 2:</u> Calcule el jacobiano de la función $\boldsymbol{f(x,y,z) = (2x^2y^3 - xyz + 5z^3, x^2 - 2xy + z^3)}$ en el punto $\vec{\boldsymbol{a}} = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$.

<u>Solución</u>

$$f_1 = 2x^2y^3 - xyz + 5z^3$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 4xy^3 - yz$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(1,2,1) = 4 \cdot 1 \cdot 2^3 - 2 \cdot 1 = 4 \cdot 8 - 2 = 30$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 6x^2y^2 - xz$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(1,2,1) = 6 \cdot 1^2 \cdot 2^2 - 1 \cdot 1 = 6 \cdot 4 - 1 = 23$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = -xy + 15z^2$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z}(1,2,1) = -1 \cdot 2 + 15 \cdot 1^2 = -2 + 15 = 13$$

$$f_2 = x^2 - 2xy + z^3$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 2x - 2y$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(1,2,1) = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 2 - 4 = -2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = -2x$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(1,2,1) = -2 \cdot 1 = -2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = 3z^2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z}(1,2,1) = 3 \cdot 1^2 = 3$$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{4xy^3 - yz} & \boldsymbol{6x^2y^2 - xz} & \boldsymbol{-xy + 15z^2} \\ \boldsymbol{2x - 2y} & \boldsymbol{-2x} & \boldsymbol{3z^2} \end{pmatrix}$$

$$J(f)(1,2,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(1,2,1) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(1,2,1) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(1,2,1) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(1,2,1) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(1,2,1) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(1,2,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{30} & \mathbf{23} & \mathbf{13} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

<u>Ejercicio:</u> Calcule el jacobiano de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{f(x,y,z) = (x\,\mathrm{sen}(y)\cos(z), x\,\mathrm{sen}(y)\,\mathrm{sen}(z), x\cos(y))}$

b) $\boldsymbol{f(x,y,z) = (x, 5z, 4y^2 - 2z, z\,\mathrm{sen}(x))}$

c) $\boldsymbol{f(x,y) = (x\cos(y), x\,\mathrm{sen}(y))}$

d) $\boldsymbol{f(x,y,z) = (e^x y, \ln(xyz))}$**, en el punto** $\boldsymbol{\vec{a} = (1,1,1)}$**.**

e) $\boldsymbol{f(x,y,z) = \left(e^{\frac{x}{y}}z, \mathrm{sen}(xyz), \ln\left(\frac{xz}{y}\right)\right)}$**, en el punto** $\boldsymbol{\vec{a} = (1,1,1)}$**.**

f) $\boldsymbol{f(x,y,z) = \left(x\ln(y), e^{\frac{x}{z}}\right)}$

g) $\boldsymbol{f(x,y) = ((x+1)^2 y, 7x^4 + y, -y^3)}$

h) $\boldsymbol{f(x,y,z) = (x^2y^2z^2, 2y - 5x)}$

i) $\boldsymbol{f(x,y) = (x - y, 5x^3, xy)}$

j) $\boldsymbol{f(x,y,z) = \left(\frac{x}{1+x+y+z}, \frac{y}{1+x+y+z}, \frac{z}{1+x+y+z}\right)}$

<u>Solución</u>

a)

$$f(x,y,z) = (x\,\mathrm{sen}(y)\cos(z), x\,\mathrm{sen}(y)\,\mathrm{sen}(z), x\cos(y))$$

$$f_1 = x\,\mathrm{sen}(y)\cos(z)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \operatorname{sen}(y)\cos(z)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = x\cos(z)\cos(y)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = -x\operatorname{sen}(y)\operatorname{sen}(z)$$

$$f_2 = x\operatorname{sen}(y)\operatorname{sen}(z)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \operatorname{sen}(y)\operatorname{sen}(z)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = x\operatorname{sen}(z)\cos(y)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = x\operatorname{sen}(y)\cos(z)$$

$$f_3 = x\cos(y)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = \cos(y)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = -x\operatorname{sen}(y)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z} = 0$$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{sen}(\boldsymbol{y})\,\mathbf{cos}(\boldsymbol{z}) & \boldsymbol{x}\,\mathbf{cos}(\boldsymbol{z})\,\mathbf{cos}(\boldsymbol{y}) & -\boldsymbol{x}\,\mathbf{sen}(\boldsymbol{y})\,\mathbf{sen}(\boldsymbol{z}) \\ \mathbf{sen}(\boldsymbol{y})\,\mathbf{sen}(\boldsymbol{z}) & \boldsymbol{x}\,\mathbf{sen}(\boldsymbol{z})\,\mathbf{cos}(\boldsymbol{y}) & \boldsymbol{x}\,\mathbf{sen}(\boldsymbol{y})\,\mathbf{cos}(\boldsymbol{z}) \\ \mathbf{cos}(\boldsymbol{y}) & -\boldsymbol{x}\,\mathbf{sen}(\boldsymbol{y}) & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

b)

$$f(x, y, z) = (x, 5z, 4y^2 - 2z, z\sin(x))$$

$$f_1 = x$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = 0$$

$$f_2 = 5z$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = 5$$

$$f_3 = 4y^2 - 2z$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = 8y$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z} = -2$$

$$f_4 = z\,\mathrm{sen}(x)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x} = z\cos(x)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial z} = \mathrm{sen}(x)$$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x} & \frac{\partial f_4}{\partial y} & \frac{\partial f_4}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{8y} & \mathbf{-2} \\ \boldsymbol{z\cos(x)} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\sin(x)} \end{pmatrix}$$

c)

$$f(x,y) = (x\cos(y), x\sin(y))$$

$$f_1 = x\cos(y)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \cos(y)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -x\,\mathrm{sen}(y)$$

$$f_2 = x\,\mathrm{sen}(y)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \mathrm{sen}(y)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = x\cos(y)$$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{cos}(\boldsymbol{y}) & -\boldsymbol{x}\,\mathbf{sen}(\boldsymbol{y}) \\ \mathbf{sen}(\boldsymbol{y}) & \boldsymbol{x}\,\mathbf{cos}(\boldsymbol{y}) \end{pmatrix}$$

d)

$f(x,y,z) = (e^x y, \ln(xyz))$, en el punto $\vec{a} = (1,1,1)$.

$$f_1 = e^x y$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = e^x y$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = e^x$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = 0$$

$$f_2 = \ln(xyz)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{1}{z}$$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e^x y} & \boldsymbol{e^x} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\frac{1}{x}} & \boldsymbol{\frac{1}{y}} & \boldsymbol{\frac{1}{z}} \end{pmatrix}$$

$$J(f)(1,1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(1,1,1) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(1,1,1) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(1,1,1) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(1,1,1) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(1,1,1) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(1,1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e} & \boldsymbol{e} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

e)

$f(x,y,z) = \left(e^{\frac{x}{y}}z, \operatorname{sen}(xyz), \ln\left(\frac{xz}{y}\right)\right)$, en el punto $\vec{a} = (1,1,1)$.

$$f_1 = e^{\frac{x}{y}}z$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = e^{x/y}\frac{1}{y}z = \frac{z}{y}e^{x/y}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = e^{x/y}\left(\frac{-x}{y^2}\right)z = -\frac{xz}{y^2}e^{x/y}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = e^{x/y}$$

$$f_2 = \operatorname{sen}(xyz)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = yz\cos(xyz)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = xz\cos(xyz)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = xy\cos(xyz)$$

$$f_3 = \ln\left(\frac{xz}{y}\right)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = \frac{1}{\frac{xz}{y}} \cdot \frac{z}{y} = \frac{y}{xz} \cdot \frac{z}{y} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{1}{\frac{xz}{y}} \cdot \left(\frac{-xz}{y^2}\right) = \frac{y}{xz} \cdot \left(\frac{-xz}{y^2}\right) = -\frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z} = \frac{1}{\frac{xz}{y}} \cdot \frac{x}{y} = \frac{y}{xz} \cdot \frac{x}{y} = \frac{1}{z}$$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{z}{y} e^{x/y}} & \boldsymbol{-\frac{xz}{y^2} e^{x/y}} & \boldsymbol{e^{x/y}} \\ \boldsymbol{yz\cos(xyz)} & \boldsymbol{xz\cos(xyz)} & \boldsymbol{xy\cos(xyz)} \\ \boldsymbol{\frac{1}{x}} & \boldsymbol{-\frac{1}{y}} & \boldsymbol{\frac{1}{z}} \end{pmatrix}$$

$$J(f)(1,1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(1,1,1) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(1,1,1) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(1,1,1) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(1,1,1) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(1,1,1) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(1,1,1) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(1,1,1) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(1,1,1) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(1,1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{\cos(1)} & \boldsymbol{\cos(1)} & \boldsymbol{\cos(1)} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

f)

$$f(x, y, z) = \left(x \ln(y), e^{\frac{x}{z}}\right)$$

$$f_1 = x \ln(y)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \ln(y)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = 0$$

$$f_2 = e^{\frac{x}{z}}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = e^{\frac{x}{z}} \frac{1}{z} = \frac{e^{\frac{x}{z}}}{z}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = e^{\frac{x}{z}}\left(-\frac{x}{z^2}\right) = -\frac{xe^{\frac{x}{z}}}{z^2}$$

$$J(f)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{\ln(y)} & \boldsymbol{\frac{x}{y}} & \mathbf{0}\\ \boldsymbol{\frac{e^{\frac{x}{z}}}{z}} & \mathbf{0} & \boldsymbol{-\frac{xe^{\frac{x}{z}}}{z^2}}\end{pmatrix}$$

g)

$$f(x,y)=((x+1)^2y,7x^4+y,-y^3)$$

$$f_1=(x+1)^2y$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}=2(x+1)y=2y(x+1)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}=(x+1)^2$$

$$f_2=7x^4+y$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}=28x^3$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}=1$$

$$f_3=-y^3$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y}=-3y^2$$

$$J(f)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y}\\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}\boldsymbol{y(x+1)} & \boldsymbol{(x+1)^2}\\ \mathbf{28}\boldsymbol{x^3} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{-3y^2}\end{pmatrix}$$

h)

$$f(x,y,z)=(x^2y^2z^2,2y-5x)$$

$$f_1=x^2y^2z^2$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2xy^2z^2$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 2yx^2z^2$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = 2zx^2y^2$$

$$f_2 = 2y - 5x$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = -5$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = 2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = 0$$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2xy^2z^2} & \mathbf{2yx^2z^2} & \mathbf{2zx^2y^2} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

i)

$$f(x,y) = (x - y, 5x^3, xy)$$

$$f_1 = x - y$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -1$$

$$f_2 = 5x^3$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 15x^2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = 0$$

$$f_3 = xy$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = y$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = x$$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{15x^2} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{y} & \boldsymbol{x} \end{pmatrix}$$

j)

$$f(x,y,z) = \left(\frac{x}{1+x+y+z}, \frac{y}{1+x+y+z}, \frac{z}{1+x+y+z}\right)$$

$$f_1 = \frac{x}{1+x+y+z}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{(1+x+y+z)-x}{(1+x+y+z)^2} = \frac{1+y+z}{(1+x+y+z)^2}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{-x}{(1+x+y+z)^2}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{-x}{(1+x+y+z)^2}$$

$$f_2 = \frac{y}{1+x+y+z}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{-y}{(1+x+y+z)^2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{(1+x+y+z)-y}{(1+x+y+z)^2} = \frac{1+x+z}{(1+x+y+z)^2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{-y}{(1+x+y+z)^2}$$

$$f_3 = \frac{z}{1+x+y+z}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = \frac{-z}{(1+x+y+z)^2}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{-z}{(1+x+y+z)^2}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z} = \frac{(1+x+y+z)-z}{(1+x+y+z)^2} = \frac{1+x+y}{(1+x+y+z)^2}$$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{1}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})^2} & \frac{-\boldsymbol{x}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})^2} & \frac{-\boldsymbol{x}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})^2} \\ \frac{-\boldsymbol{y}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})^2} & \frac{\mathbf{1}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})^2} & \frac{-\boldsymbol{y}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})^2} \\ \frac{-\boldsymbol{z}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})^2} & \frac{-\boldsymbol{z}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})^2} & \frac{\mathbf{1}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})^2} \end{pmatrix}$$

DERIVADAS DIRECCIONALES:

Definición (NORMA DE UN VECTOR): La norma de un vector $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ es $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$.

<u>**Ejemplo:**</u>

$$\boldsymbol{v} = (2,3)$$

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{\mathbf{13}}$$

Definición (VECTOR UNITARIO): Es un vector cuya norma es 1. Es decir, $\|\boldsymbol{v}\| = 1$.

<u>**Ejemplo:**</u>

$$\boldsymbol{v} = (1,0)$$

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = \mathbf{1}$$

Definición: (DERIVADA DIRECTIONAL): Si una función de varias variables $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es diferenciable, su derivada direccional en el punto $\boldsymbol{a}$ en la dirección del vector $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ se puede obtener multiplicando la traspuesta de su gradiente en el punto $\boldsymbol{a}$ y un vector unitario $\boldsymbol{v}$. Es decir,

$$f_v'(\boldsymbol{a}) = \left(\nabla f(\boldsymbol{a})\right)^t \cdot \boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\right) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) \cdot v_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \cdot v_n$$

<u>Ejemplo</u>: Calcule la derivada direccional de $\boldsymbol{f(x,y) = 4x^2 + y^2}$ en el punto $\boldsymbol{(1,1)}$, en la dirección del vector $\boldsymbol{v = (2,1)}$.

<u>Solución</u>

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x \\ 2y \end{pmatrix}, \nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(1,1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{v} = (2,1)$ no es unitario, ya que su norma no es 1, por lo que tenemos que dividirlo por su norma.

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Por lo que el vector unitario correspondiente es $\boldsymbol{v} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Por tanto,

$$f_v'(1,1) = \left(\nabla f(1,1)\right)^t \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = (8 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = 8 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{18}{\sqrt{5}}}$$

Este resultado indica que cada vez que las variables independientes crezcan una unidad en la dirección $\boldsymbol{v} = (2,1)$, la función decrece en $\frac{18}{\sqrt{5}}$ unidades.

<u>Ejemplo 2</u>: Calcule la derivada direccional de $\boldsymbol{f(x,y,z) = e^{xy} + e^{xz} + e^{yz}}$ en el punto $\boldsymbol{(1,1,0)}$, en la dirección del vector $\boldsymbol{v = (-1,0,0)}$.

<u>Solución</u>

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ye^{xy} + ze^{xz} \\ xe^{xy} + ze^{yz} \\ xe^{xz} + ye^{yz} \end{pmatrix}, \nabla f(1,1,0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(1,1,0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(1,1,0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3}(1,1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ e \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{v} = (-1,0,0)$ es unitario.

Por tanto,

$$f_v'(1,1,0) = \left(\nabla f(1,1,0)\right)^t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (e, e, 2) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{e}$$

Este resultado indica que cada vez que las variables independientes crezcan una unidad en la dirección $\boldsymbol{v} = (-1,0,0)$, la función decrece en e unidades.

<u>Ejemplo 3</u>: Calcule la derivada direccional de $\boldsymbol{f(x, y, z) = 3x^2yz + 5xz + 6}$ en el punto $(\boldsymbol{1, 0, -1})$, en la dirección del vector $\boldsymbol{v = (1, -2, -1)}$.

<u>Solución</u>

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6xyz + 5z \\ 3x^2z \\ 3x^2y + 5x \end{pmatrix}, \nabla f(1,0,-1) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(1,0,-1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(1,0,-1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3}(1,0,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{v} = (1, -2, -1)$ no es unitario, ya que su norma no es 1, por lo que tenemos que dividirlo por su norma.

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

Por lo que el vector unitario correspondiente es $\boldsymbol{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$.

Por tanto,

$$f_v'(1,0,-1) = \left(\nabla f(1,0,-1)\right)^t \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{-2}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = (-5, -3,5) \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{-2}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$= -5 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} - 3 \cdot \frac{-2}{\sqrt{6}} + 5 \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\right) = \boldsymbol{\frac{-4}{\sqrt{6}}} \approx \boldsymbol{-1,63}$$

Este resultado indica que cada vez que las variables independientes crezcan una unidad en la dirección $\boldsymbol{v} = (1, -2, -1)$, la función decrece en 1,63 unidades.

2.3 REGLA DE LA CADENA PARA FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Como ya sabemos, la regla de la cadena es una regla de derivación para la composición de funciones.

Para funciones de una variable, la regla de la cadena nos dice que si f y g son diferenciables, entonces

$$\frac{d}{dx}\big(f(g(x))\big) = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

Que de forma abreviada se puede escribir como $(f\ o\ g)' = (f'o\ g) \cdot g'$.

Esto es, la derivada de la composición de funciones se puede calcular como el producto de la derivada de "la función de fuera", f, y la derivada de "la función de dentro", g .

Para simplificar la expresión anterior hacemos $y = f(g(x))$, y $u = g(x)$, entonces, $y = f(u)$ y

$$\frac{d}{dx}\Big(f\big(g(x)\big)\Big) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Nótese que cuando substituimos la función interior por u, f está en función de u, por lo que la derivada de f es $\frac{dy}{du}$. Además, como $g(x) = u$ (u es función de x), $g' = u' = \frac{du}{dx}$.

<u>Ejemplo:</u> Calcule la derivada de f utilizando la regla de la cadena:

a) $\boldsymbol{f(x) = (x^2 + 1)^3}$

b) $\boldsymbol{f(x) = \mathbf{sen}(x^2)}$

c) $\boldsymbol{f(x) = \mathbf{arctan}(\mathbf{sen}(x))}$

d) $\boldsymbol{f(x) = e^{\ln(x)}}$

<u>Solución</u>

a)

$$f(x) = (x^2 + 1)^3$$

$$u = g(x) = x^2 + 1$$

$$y = f(u) = u^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2 \cdot 2x = 3(x^2 + 1)^2 \cdot 2x = \boldsymbol{6(x^2 + 1)^2}$$

b)

$$f(x) = \text{sen}(x^2)$$

$$u = g(x) = x^2$$

$$y = f(u) = \text{sen}(u)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos(u) \cdot 2x = \cos(x^2) \cdot 2x = \mathbf{2x\cos(x^2)}$$

c)

$$f(x) = \arctan(\text{sen}(x))$$

$$u = g(x) = \text{sen}(x)$$

$$y = f(u) = \arctan(u)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{1+u^2} \cdot \cos(x) = \frac{1}{1+(\text{ein}(x))^2} \cdot \cos(x) = \frac{\mathbf{cos(x)}}{\mathbf{1+sen^2(x)}}$$

d)

$$f(x) = e^{\ln(x)}$$

$$u = g(x) = \ln(x)$$

$$y = f(u) = e^u$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot \frac{1}{x} = e^{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\boldsymbol{e^{\ln(x)}}}{\boldsymbol{x}}$$

La regla de la cadena también se puede aplicar para funciones de varias variables. A continuación, consideramos la función $z = f(x,y)$ donde $x = g(t)$ e $y = h(t)$. Si $g(t)$ y $h(t)$ son diferenciables con respecto a t, entonces

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Suponga que cada argumento de $z = f(u,v)$ es una función de dos variables tal que $u = h(x,y)$ y $v = g(x,y)$, y que estas funciones son diferenciables. Entonces, utilizando la regla de la cadena, se tiene:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

En general, para funciones $\underbrace{\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}}_{g(f(x))=g\ o\ f}$, si f es diferenciable en el punto $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, y g es diferenciable en el punto $\vec{b} = f(\vec{a})$, entonces, la composición de funciones $g(f(x)) = g\ o\ f$ es también diferenciable en el punto $\vec{a}$ y se cumple que:

$$\nabla(g\ o\ f)(\vec{a}) = \nabla g(\vec{a}) \cdot Jf(\vec{a}).$$

Es decir,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}(\vec{a}), \frac{\partial z}{\partial x_2}(\vec{a}), \cdots, \frac{\partial z}{\partial x_m}(\vec{a})\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial y_1}(\vec{b}), \frac{\partial z}{\partial y_2}(\vec{b}), \cdots, \frac{\partial z}{\partial y_m}(\vec{b})\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial y_1}{\partial x_2}(\vec{a}) \ldots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial y_2}{\partial x_2}(\vec{a}) \ldots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & \vdots \quad \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial y_m}{\partial x_2}(\vec{a}) \ldots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix}$$

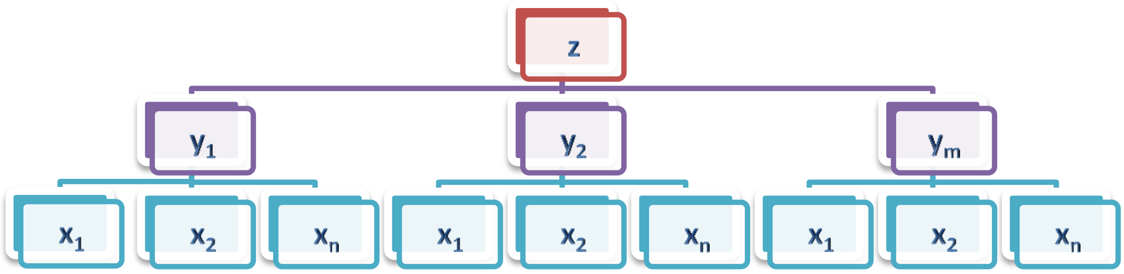
Si desarrollamos el producto anterior, obtenemos el valor de todas las derivadas parciales de z:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}(\vec{a}) = \frac{\partial z}{\partial y_1}(\vec{b}) \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_1}(\vec{a}) + \frac{\partial z}{\partial y_2}(\vec{b}) \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_1}(\vec{a}) + \cdots + \frac{\partial z}{\partial y_m}(\vec{b}) \cdot \frac{\partial y_m}{\partial x_1}(\vec{a})$$

En general,

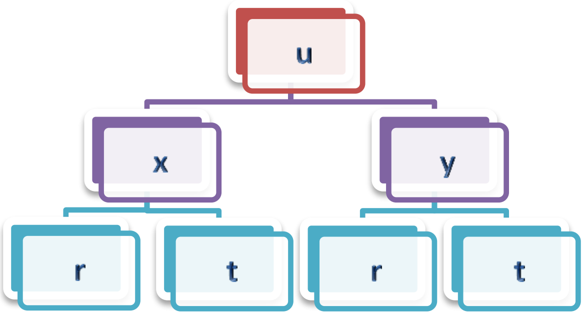
$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(\vec{a}) = \frac{\partial z}{\partial y_1}(\vec{b}) \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_i}(\vec{a}) + \frac{\partial z}{\partial y_2}(\vec{b}) \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_i}(\vec{a}) + \cdots + \frac{\partial z}{\partial y_m}(\vec{b}) \cdot \frac{\partial y_m}{\partial x_i}(\vec{a})$$

Las expresiones anteriores son fáciles de recordar mirando el diagrama que se presenta a continuación:



Ejemplo: Dada la función $\boldsymbol{u = f(x,y) = x^2 + 2y}$, donde $\boldsymbol{x = g(r,t) = r\,\mathrm{sen}(t)}$, y $\boldsymbol{y = h(r,t) = \mathrm{sen}^2(t)}$, determine el valor de $\frac{\partial u}{\partial r}$ y $\frac{\partial u}{\partial t}$ utilizando la regla de la cadena.

Solución



$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = 2x\cdot \mathrm{sen}(t) + 2\cdot 0 = 2r\,\mathrm{sen}(t)\cdot\mathrm{sen}(t) = \boldsymbol{2r\,\mathrm{sen}^2(t)}$$

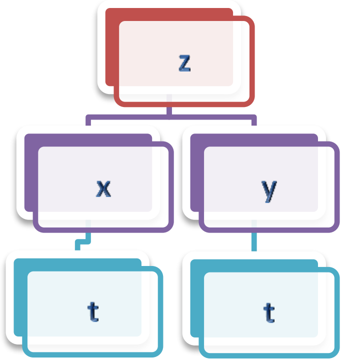
$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} &= 2x\cdot r\cos(t) + 2\cdot 2\,\mathrm{sen}(t)\cos(t)\\ &= 2\cdot r\,\mathrm{sen}(t)\cdot r\cos(t) + 2\cdot 2\,\mathrm{sen}(t)\cos(t)\\ &= \boldsymbol{2(r^2+2)\,\mathrm{sen}(t)\cos(t)}\end{aligned}$$

EJERCICIOS:

1. **Calcule la derivada de z con respecto a t, para $t = 1$.**

$$\boldsymbol{z = \frac{x^2+y^2}{x-y},\ x = \ln\left(\frac{1}{t}\right),\ y = \frac{t}{1+t}}$$

Solución



$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} =$$

$$= \frac{2x(x-y) - (x^2+y^2)}{(x-y)^2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{t}}\cdot\left(\frac{-1}{t^2}\right) + \frac{2y(x-y)+x^2+y^2}{(x-y)^2}\cdot\frac{1+t-t}{(1+t)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 2xy - (x^2 + y^2)}{(x-y)^2} \cdot t \cdot \left(\frac{-1}{t^2}\right) + \frac{2xy - 2y^2 + x^2 + y^2}{(x-y)^2} \cdot \frac{1}{(1+t)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 2xy - y^2}{(x-y)^2} \cdot \left(\frac{-1}{t}\right) + \frac{x^2 + 2xy - y^2}{(x-y)^2} \cdot \frac{1}{(1+t)^2}$$

Para $t = 1$:

$$x(1) = \ln\left(\frac{1}{1}\right) = \ln(1) = 0$$

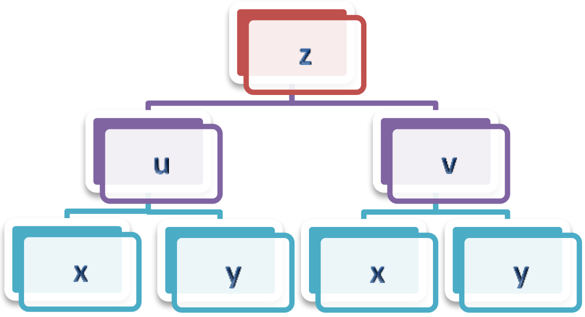
$$y(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}(1) = \frac{0 - 2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(0 - \frac{1}{2}\right)^2} \cdot \left(\frac{-1}{1}\right) + \frac{0 + 2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(0 - \frac{1}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{(1+1)^2}$$

$$= \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}(-1) + \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{3}{4}}$$

2. Sean $z = u^2 v - 2u^2 + 3v^2, u = e^{xy}$ y $v = \frac{x}{y+1}$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ para $x = 1$ e $y = 0$.

Solución



$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = (2uv - 4u) \cdot e^{xy} y + (u^2 + 6v) \cdot \frac{1}{y+1}$$

Para $x = 1$ e $y = 0$:

$$u(1,0) = e^{1 \cdot 0} = e^0 = 1$$

$$v(1,0) = \frac{1}{0+1} = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1{,}0) = (2 \cdot 1 \cdot 1 - 4 \cdot 1) \cdot e^{1 \cdot 0} \cdot 0 + (1^2 + 6 \cdot 1) \cdot \frac{1}{0+1} = \mathbf{7}$$

Aunque en el enunciado no se nos pide calcular $\frac{\partial z}{\partial y}$, lo vamos a hacer a continuación.

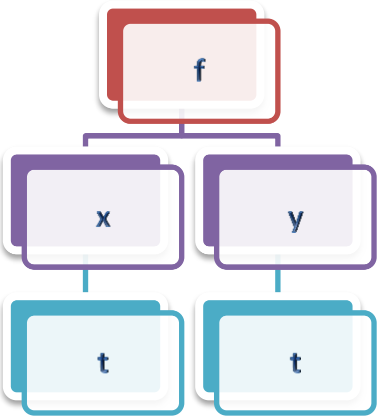
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = (2uv - 4u) \cdot e^{xy} x + (u^2 + 6v) \cdot \left(\frac{-x}{(y+1)^2}\right)$$

Para $x = 1$ e $y = 0$:

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1{,}0) = (2 \cdot 1 \cdot 1 - 4 \cdot 1) \cdot e^{1 \cdot 0} \cdot 1 + (1^2 + 6 \cdot 1) \cdot \left(\frac{-1}{(0+1)^2}\right) = -2 + 7(-1) = \mathbf{-9}$$

3. **Sea $\boldsymbol{f(x,y) = xy}$, donde $\boldsymbol{x(t) = 3 + 4t}$ e $\boldsymbol{y(t) = 6 - 2t}$. Calcule $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial t}}$ utilizando la regla de la cadena.**

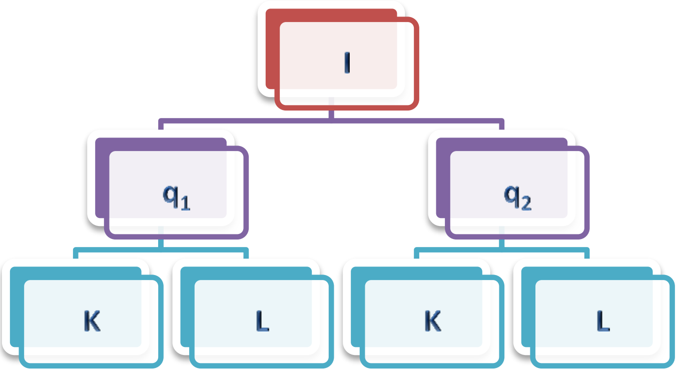
Solución



$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = y \cdot 4 + x \cdot (-2) = 4y - 2x = 4(6 - 2t) - 2(3 + 4t)$$
$$= 24 - 8t - 6 - 8t = \mathbf{18t - 16t}$$

4. Una empresa fabrica 2 productos. Los ingresos de esta compañía vienen dados por la función $\boldsymbol{I(q_1, q_2) = q_1^2 q_2}$, donde $\boldsymbol{q_1(K, L) = 5K + L}$, y $\boldsymbol{q_2(K, L) = 6K + 2L}$. Calcule los ingresos marginales con respecto al trabajo $\boldsymbol{\frac{\partial I}{\partial L}}$, y con respecto al capital $\boldsymbol{\frac{\partial I}{\partial K}}$, utilizando la regla de la cadena.

Solución

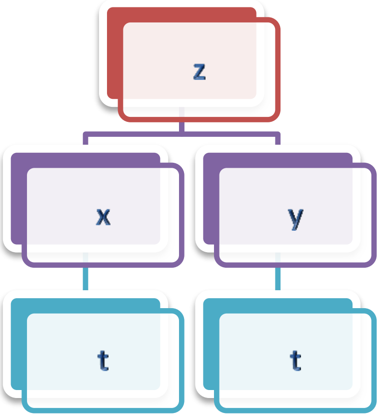


$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial K} = \frac{\partial I}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial K} + \frac{\partial I}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial K} &= 2q_1q_2 \cdot 5 + q_1^2 \cdot 6 = 10q_1q_2 + 6q_1^2 \\ &= 10(5K + L)(6K + 2L) + 6(5K + L)^2 \\ &= (50K + 10L)(6K + 2L) + 6(25K^2 + 10KL + L^2) \\ &= 300K^2 + 100KL + 60KL + 20L^2 + 150K^2 + 60KL + 6L^2 \\ &= \mathbf{450}\boldsymbol{K}^{\mathbf{2}} + \mathbf{220}\boldsymbol{KL} + \mathbf{26}\boldsymbol{L}^{\mathbf{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial L} = \frac{\partial I}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial L} + \frac{\partial I}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial L} &= 2q_1q_2 \cdot 1 + q_1^2 \cdot 2 = 2q_1q_2 + 2q_1^2 \\ &= 2(5K + L)(6K + 2L) + 2(5K + L)^2 \\ &= (10K + 2L)(6K + 2L) + 2(25K^2 + 10KL + L^2) \\ &= 60K^2 + 20KL + 12KL + 4L^2 + 50K^2 + 20KL + 2L^2 \\ &= \mathbf{110}\boldsymbol{K}^{\mathbf{2}} + \mathbf{52}\boldsymbol{KL} + \mathbf{6}\boldsymbol{L}^{\mathbf{2}}\end{aligned}$$

5. **Sea $z = f(x, y) = x^2 y - y^3$, donde $x = g(t) = \text{sen}(t)$ e $y = h(t) = e^t$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial t}$ para $t = 0$ utilizando la regla de la cadena.**

<u>Solución</u>



$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = 2xy \cdot \cos(t) + (x^2 - 3y^2) \cdot e^t$$

Para $t = 0$:

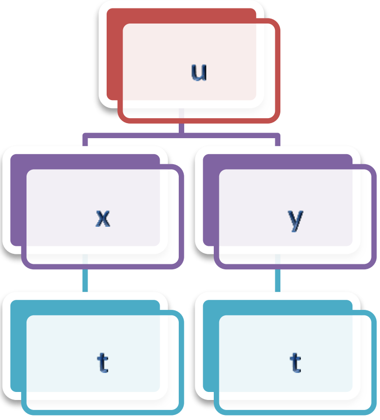
$$x = g(0) = \text{sen}(0) = 0$$

$$y = h(0) = e^0 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(0) = 2 \cdot 0 \cdot 1 \cdot \cos(0) + (0^2 - 3 \cdot 1^2) \cdot e^0 = \mathbf{-3}$$

6. **Sea $u = y^2 - x$, donde $x = \cos(t)$ e $y = \text{sen}(t)$. Calcule $\frac{\partial u}{\partial t}$ utilizando la regla de la cadena.**

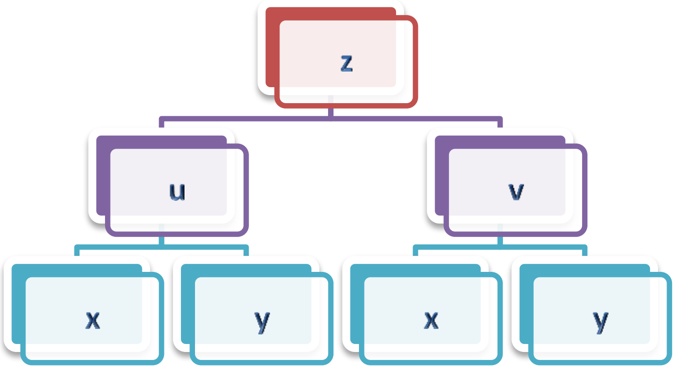
<u>Solución</u>



$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = -1 \cdot \operatorname{sen}(t) + 2y \cdot (-\cos(t)) = -\operatorname{sen}(t) - 2y\cos(t)$$
$$= -\operatorname{sen}(t) - 2\operatorname{sen}(t)\cos(t) = \mathbf{-\,sen(\mathit{t})\,(1 + 2\cos(\mathit{t}))}$$

7. Sea $z = u + v$, donde $u = x^3y^2$ y $v = x^2y^3$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, utilizando la regla de la cadena.

Solución

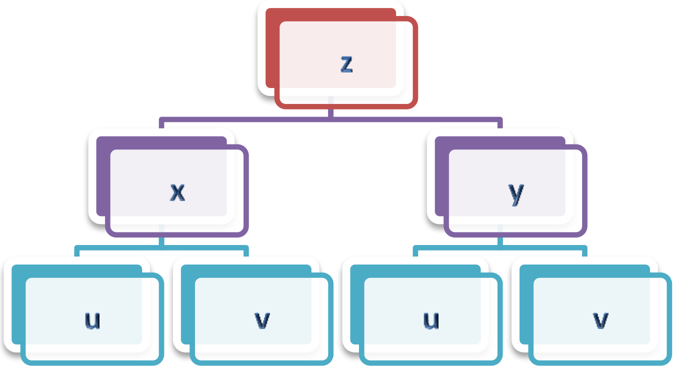


$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 1 \cdot 3x^2y^2 + 1 \cdot 2xy^3 = \mathbf{3x^2y^2 + 2xy^3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 1 \cdot 2x^3y + 1 \cdot 3x^2y^2 = \mathbf{2x^3y + 3x^2y^2}$$

8. Sea $z = f(x, y) = y^3 - 3x^2y$, donde $x = g(u, v) = u^2 + v$ e $y = h(u, v) = \frac{u}{v}$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial u}$ $(u = 1, v = 1)$ y $\frac{\partial z}{\partial v}(u = 0, v = 1)$, utilizando la regla de la cadena.

Solución



$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = -6xy \cdot 2u + (3y^2 - 3x^2) \cdot \frac{1}{v}$$

Para $u = 1, v = 1$:

$$x = g(1,1) = 1^2 + 1 = 2$$

$$y = h(1,1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}(u = 1, v = 1) = -6 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 + (3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 2^2) \cdot \frac{1}{1} = -24 - 9 = \mathbf{-33}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = -6xy \cdot 1 + (3y^2 - 3x^2) \cdot \left(\frac{-u}{v^2}\right)$$

Para $u = 0, v = 1$:

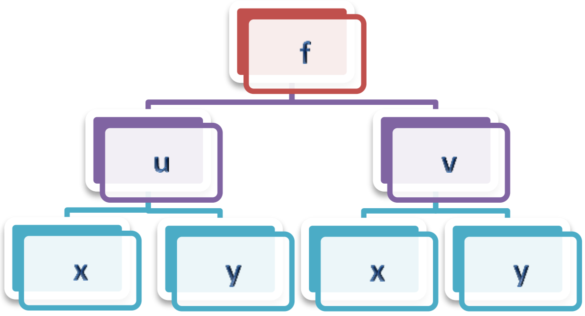
$$x = g(0,1) = 0^2 + 1 = 1$$

$$y = h(0,1) = \frac{0}{1} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}(u = 0, v = 1) = -6 \cdot 1 \cdot 0 + (3 \cdot 0^2 - 3 \cdot 1^2) \cdot \left(\frac{-0}{1^2}\right) = \mathbf{0}$$

9. **Sea $f(u,v) = uv, u(x,y) = x + y, v(x,y) = 2x^2$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$, utilizando la regla de la cadena.**

Solución



$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = v \cdot 1 + u \cdot 4x = v + 4xu = 2x^2 + 4x(x + y)$$
$$= 2x^2 + 4x^2 + 4xy = \mathbf{6x^2 + 4xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = v \cdot 1 + u \cdot 0 = v = \mathbf{2x^2}$$

2.4 HOJAS DE EJERCICIOS

A continuación se muestra una hoja de ejercicios para ser resuelta por los estudiantes.

HOJA 6: VECTOR GRADIENTE Y MATRIZ HESSIANA:

1. Calcule el gradiente de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{f(x,y,z) = \frac{x}{x+y+z}}$

b) $\boldsymbol{f(x,y) = ax^2 + 2bxy - y^2 + x - y + 1}$

c) $\boldsymbol{f(x,y,z) = 2x^3 - 3xy^2 - xyz}$

d) $\boldsymbol{f(x,y) = x^y}$

Solución

a)

$$f(x,y,z) = \frac{x}{x+y+z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x+y+z)-x}{(x+y+z)^2} = \frac{y+z}{(x+y+z)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{(x+y+z)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-x}{(x+y+z)^2}$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{y+z}{(x+y+z)^2}} \\ \boldsymbol{\frac{-x}{(x+y+z)^2}} \\ \boldsymbol{\frac{-x}{(x+y+z)^2}} \end{pmatrix}$$

b)

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy - y^2 + x - y + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2ax + 2by + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2bx - 2y - 1$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2ax + 2by + 1} \\ \boldsymbol{2bx - 2y - 1} \end{pmatrix}$$

c)

$$f(x,y,z) = 2x^3 - 3xy^2 - xyz$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 3y^2 - yz$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3xy - xz$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -xy$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{6x^2 - 3y^2 - yz} \\ \boldsymbol{3xy - xz} \\ \boldsymbol{-xy} \end{pmatrix}$$

d)

$$\boldsymbol{f(x,y) = x^y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln(x)$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{yx^{y-1}} \\ \boldsymbol{x^y \ln(x)} \end{pmatrix}$$

2. Calcule la matriz Hessiana de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{f(x,y,z) = x^2y^3z^4}$
b) $\boldsymbol{f(x,y) = x^2 \sin(y)}$
c) $\boldsymbol{f(x,y,z) = x^3y^2 + x^2z + xyz}$
d) $\boldsymbol{f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2}$
e) $\boldsymbol{f(x,y) = \frac{y}{x-y}}$

<u>Solución</u>

a)

$$f(x,y,z) = x^2y^3z^4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3z^4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2z^4$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 4x^2y^3z^3$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy^3z^4 \\ 3x^2y^2z^4 \\ 4x^2y^3z^3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^3z^4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2z^4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 8xy^3z^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^2yz^4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6xy^2z^4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 12x^2y^2z^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 12x^2y^3z^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 8xy^3z^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 12x^2y^2z^3$$

$$\nabla^2 f = H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2y^3z^4} & \boldsymbol{6xy^2z^4} & \boldsymbol{8xy^3z^3} \\ \boldsymbol{6xy^2z^4} & \boldsymbol{6x^2yz^4} & \boldsymbol{12x^2y^2z^3} \\ \boldsymbol{8xy^3z^3} & \boldsymbol{12x^2y^2z^3} & \boldsymbol{12x^2y^3z^2} \end{pmatrix}$$

b)

$$f(x,y) = x^2\sin(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\sin(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2\cos(y)$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x\sin(y) \\ x^2\cos(y) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\sin(y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x\cos(y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^2\sin(y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x\cos(y)$$

$$\nabla^2 f = H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2\sin(y)} & \mathbf{2x\cos(y)} \\ \mathbf{2x\cos(y)} & \mathbf{-x^2\sin(y)} \end{pmatrix}$$

c)

$$f(x,y,z) = x^3y^2 + x^2z + xyz$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 + 2xz + yz$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y + xz$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^2 + xy$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2y^2 + 2xz + yz \\ 2x^3y + xz \\ x^2 + xy \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy^2 + 2z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x^2y + z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 2x + y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6x^2y + z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 2x + y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = x$$

$$\nabla^2 f = H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{6xy^2 + 2z} & \boldsymbol{6x^2y + z} & \boldsymbol{2x + y} \\ \boldsymbol{6x^2y + z} & \boldsymbol{2x^3} & \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{2x + y} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

d)

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0$$

$$\nabla^2 f = H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

e)

$$f(x,y) = \frac{y}{x-y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x-y+y}{(x-y)^2} = \frac{x}{(x-y)^2}$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-y}{(x-y)^2} \\ \frac{x}{(x-y)^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2y}{(x-y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-(x-y)^2 - 2y(x-y)}{(x-y)^4} = \frac{-(x-y) - 2y}{(x-y)^3} = \frac{-x+y-2y}{(x-y)^3} = \frac{-x-y}{(x-y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x}{(x-y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{(x-y)^2 - 2x(x-y)}{(x-y)^4} = \frac{x-y-2x}{(x-y)^3} = \frac{-x-y}{(x-y)^3}$$

$$\nabla^2 f = H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{2y}{(x-y)^3}} & \boldsymbol{\frac{-x-y}{(x-y)^3}} \\ \boldsymbol{\frac{-x-y}{(x-y)^3}} & \boldsymbol{\frac{2x}{(x-y)^3}} \end{pmatrix}$$

3. <u>REFERENCIAS</u>

- Alpha C. Chiang (2005) *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, Mc. Graw-Hill.
- Balbás, Gil y Gutiérrez (1988) *Análisis matemático para la economía I. Cálculo diferencial*. Ed. Thomson.
- Blanco García S., García Pineda P. y Pozo García E. (2003) *Matemáticas Empresariales I. Álgebra Lineal*. Ed. Thomson.
- Blanco García S., García Pineda P. y Pozo García E. (2004) *Matemáticas Empresariales I. Cálculo Diferencial*. Ed. Thomson.
- Cámara Sánchez A., Garrido Abia R. y Tolmos Rodríguez-Piñero P. (2003) *Problemas Resuelto de Matemáticas para Economía y Empresa*. Ed. Thomson.
- Gutiérrez Valdeón y Franco (1997) *Matemáticas aplicadas a la economía y la empresa*. Ed. Thomson.
- Martin Anthony and Norman Biggs (1996) *Mathematics for Economics and Finance: Methods and Modelling*, Cambridge University Press.