

# LÓGICA

## HOJA 1

### Algunas nociones de teoría de conjuntos, relaciones y funciones

✓ **Ejercicio 1** Sean  $A = \{-3, -1, 3, 9\}$  y  $B = \{-3, -1, 0, 3, 5, 7, 8\}$ . Determinar  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$  y  $B \setminus A$ .

✓ **Ejercicio 2** Sean  $A = \{-1, 0, 3, 7\}$  y  $B = \{-1, 1\}$ . Determinar y representar gráficamente el conjunto  $A \times B$ .

**Ejercicio 3** Demostrar las propiedades

$$(A \setminus B) \cup B = A \cup B \quad (1)$$

$$(A \setminus B) \cap B = \emptyset \quad (2)$$

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B \quad (3)$$

**Ejercicio 4** Verifica la siguiente identidad:

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B).$$

✓ **Ejercicio 5** Sea  $A = \{-1, 1, 3, 5\}$ . Determina el conjunto  $P(A)$  de las partes de  $A$ .

✓ **Ejercicio 6** Sean  $A = \{a, b, c\}$ ,  $R = \{(a, b), (b, a), (c, b), (c, a)\}$ . Entonces  $aRb, bRa, cRb$  y  $cRa$ . Representar gráficamente la relación  $R$ .

**Ejercicio 7** Interpretar gráficamente las propiedades reflexiva, simétrica y antisimétrica.

✓ **Ejercicio 8** Sea  $H = \{A, B, C, D\}$  el conjunto de las asignaturas en el horario representado en la tabla.

Horario	L	M	X	J
9-10	D	A	D	B
10-11	A	D	D	D
11-12	B	C	B	A
12-13				C

$$H = \{A, B, C, D\}$$

Horario	L	M	X	J
9-10	D	A	D	B
10-11	A	D	D	D
11-12	B	C	B	A
12-13				C

2

Sobre  $H$  definimos la relación  $R$  como:  $\forall x, y \in H, (x, y) \in R$  si y sólo si hay al menos un día en el horario tal que la clase  $x$  es anterior a la clase  $y$ .

- Determina los elementos de  $R$ .
- Determina el dominio, la imagen de  $R$  y la imagen inversa de  $\{A, C\}$ .
- Determina si  $R$  es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.
- ¿Es  $R$  una función?

✓ **Ejercicio 9** En base a la siguiente Tabla 1, describir las relaciones en el conjunto  $P = \{\text{Andrea, Beatriz, Carlos, Davide, Edward}\}$ :

- $xR_1y \leftrightarrow x$  e  $y$  viven en el mismo país.
- $xR_2y \leftrightarrow x$  e  $y$  tienen el mismo número de teléfono o la misma edad.
- $xR_3y \leftrightarrow x$  e  $y$  tienen la misma altura y son europeos.

Tabla 1	Edad	Tel.	País	Altura	Ocupación
Andrea	21	43-6950-555-0001	Alemania	1,75	Informática
Beatriz	18	34-91-555-0000	España	1,68	Estudiante
Carlos	37	34-91-555-0000	España	1,75	Profesor
Davide	18	39-06-555-0002	Italia	1,65	Estudiante
Edward	21	1-215-555-0003	EEUU	1,68	Profesor

✓ **Ejercicio 10** Determinar dominio e imagen de las siguientes relaciones:

- $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{d, e\}$  y  $R = \{(a, d), (b, e), (c, d), (c, e)\}$ .
- Sea  $A$  el conjunto de las personas y  $R = \{(a, b) \in A \times A : a \text{ es el padre de } b\}$ .
- En el conjunto de las partes  $P(A)$  de un conjunto  $A$ , la relación de inclusión  $R = \{(B, C) \in P(A) \times P(A) : B \subseteq C\}$ .
- En el conjunto  $\mathbb{Z}$  de los números enteros, la relación  $R = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n - m \text{ es par}\}$ .
- En el conjunto de las rectas del plano real, la relación " $r$  es ortogonal a  $s$ ."

✓ **Ejercicio 11** Utilizando la Tabla 1 del ejercicio 9, definir una relación de equivalencia en  $P$  y determinar las relativas clases de equivalencia.

✓ **Ejercicio 12** Determinar cuáles de las siguientes relaciones binarias son funciones:

- Sobre el conjunto de las personas, la relación que asocia a cada persona su madre.
- Sobre el conjunto de las personas que tienen hermanos, la relación que asocia a cada persona su hermano.

24-10  
SOMA - X

3

c) Sean  $A$  el conjunto de los alumnos matriculados en nuestra asignatura el año pasado y  $B$  el conjunto de las notas

$$\{NP, SS, AP, NT, SB, MH\}.$$

En  $A \times B$  definimos la relación que asocia a cada alumno su nota final.

d) Con la notación del apartado c), en  $B \times A$  definimos la relación que asocia a cada nota los alumnos que han sacado esa nota en la asignatura.

**Ejercicio 13** a) Sean  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  las funciones  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  y  $g(x) = x + 1$ . Verificar que  $g \circ f \neq f \circ g$ . (Entonces la composición de funciones no es conmutativa.)

b) Demostrar que si  $f : A \rightarrow B$  es una función, entonces  $f = Id_B \circ f = f \circ Id_A$ .

c) Descomponer la función  $f(x) = \sqrt{3 + \left(\frac{1}{2 + \sin(x)}\right)^2}$  en una composición de funciones más simples.

# EJERCICIOS RESUELTOS HOJA 1

3/4

## Ejercicio 1

$$A \cup B = \{-3, -1, 0, 3, 5, 7, 8, 9\}$$

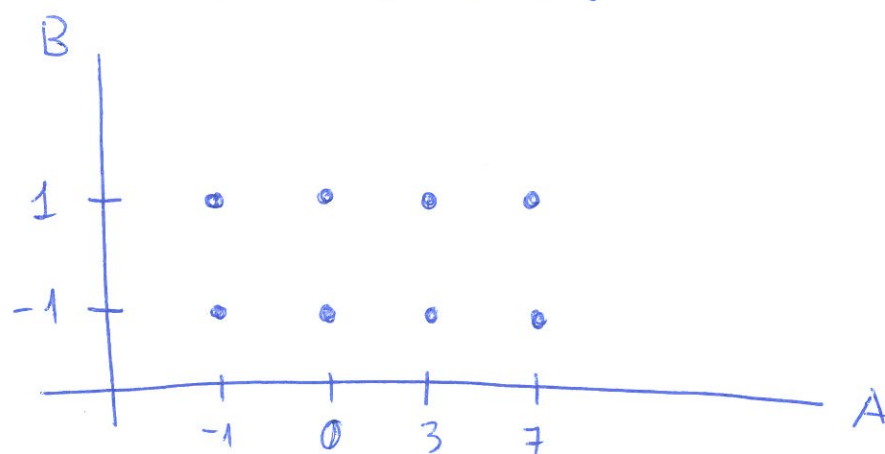
$$A \cap B = \{-3, -1, 3\}$$

$$A \setminus B = \{9\}$$

$$B \setminus A = \{0, 5, 7, 8\}$$

## Ejercicio 2

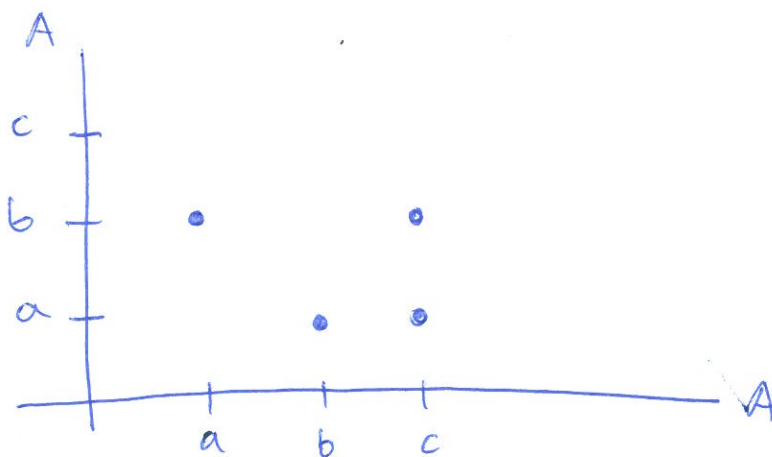
$$A \times B = \{(-1, -1), (-1, 1), (0, -1), (0, 1), (3, -1), (3, 1), (7, -1), (7, 1)\}$$



## Ejercicio 5

$$P(A) = \{\emptyset, \{-1\}, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{-1, 1\}, \{-1, 3\}, \{-1, 5\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{-1, 1, 3\}, \{-1, 1, 5\}, \{-1, 3, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{-1, 1, 3, 5\}\}$$

## Ejercicio 6





## Ejercicio 8

(2/4)

Entendemos que una clase es anterior a otra en un día si aparece antes en el horario de ese día (no tiene que ser inmediatamente antes)

$$a) R = \{ (A, B), (A, C), (A, D), (B, A), (B, C), (B, D), (D, A), (D, B), (D, C), (D, D) \}$$

$$b) \text{dom}(R) = \{ A, B, D \}$$

$$\text{Im}(R) = H$$

$$R^{-1}(\{A, C\}) = \{A, B, D\}$$

c)  $R$  no es reflexiva, no es simétrica, no es antisimétrica, no es transitiva

d) No. No cumple ninguna de las dos condiciones del test de la recta vertical.

~~Entendemos~~

Si entenderíamos q una clase es anterior a otra cuando es inmediatamente anterior en un día, tendríamos lo siguiente:

$$a) R = \{ (A, B), (A, D), (A, C), (B, D), (D, A), (D, B), (D, C), (D, D) \}$$

$$b) \text{dom}(R) = \{ A, B, D \}$$

$$\text{Im}(R) = H$$

$$R^{-1}(\{A, C\}) = \{A, D\}$$

c) No reflexiva, no simétrica, no antisimétrica, no transitiva

d) No. No cumple ninguna de las dos condiciones del test de la recta vertical

Ejercicio 9

Simplifiquemos la notación poniendo únicamente la primera letra de cada nombre.

$$R_1 = \{ (A,A), (B,B), (C,C), (B,C), (C,B), (D,D), (E,E) \}$$

$$R_2 = \{ (A,A), (A,E), (E,A), (E,E), (B,B), (C,C), (B,C), (C,B), (B,D), (D,B), (D,D) \}$$

$$R_3 = \{ (A,A), (B,B), (C,C), (D,D), (A,C), (C,A) \}$$

Ejercicio 10

$$1) \text{ dom}(R) = A \quad \text{Im}(R) = \text{~~CC~~ } B$$

$$2) \text{ dom}(R) = \{ \text{todos los hombres q tienen al menos un hijo} \}$$

$$\text{Im}(R) = A$$

$$3) \text{ dom}(R) = P(A)$$

$$\text{Im}(R) = P(A)$$

$$4) \left. \begin{array}{l} \text{dom}(R) = \mathbb{Z} \\ \text{Im}(R) = \mathbb{Z} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{xq la relación es reflexiva y} \\ \forall x \in \mathbb{Z}, \text{~~CC~~ } x R x \end{array} \Rightarrow$$

$$5) \left. \begin{array}{l} \text{dom}(R) = A \\ \text{Im}(R) = A \end{array} \right\} A = \{ \text{rectas del plano real} \}$$

Ejercicio 11

$R_1$  (vivir en el mismo país) es de equivalencia.

Las clases de equivalencia son:

$$C(A) = \{ A \}, \quad C(B) = \{ B, C \}, \quad C(D) = \{ D \}, \quad C(E) = \{ E \}$$

## Ejercicio 12

4/4

- a) Si. Todas las personas tienen madre y además cada persona no puede tener más de una madre (test de la recta vertical)
- b) No. Una persona puede tener + de un hermano. Sin embargo, si se cumple que, en el cjo de las personas q tienen hermanos, todas tienen hermanos.
- c) Sí.
- d) No. No cumple ninguna de las dos condiciones