

Conjuntos y Números

LISTA 3

CURSO 2018-19

- 1) En cada uno de los siguientes casos, se da una relación entre elementos del conjunto que se especifica debajo. Decidir cuáles son **relaciones de orden**; en caso de serlo, estudiar si es o no un **orden total**; de lo contrario, explicar qué propiedad le falla para ser un orden.

$$\begin{array}{cccc} \boxed{x \geq y} & , & \boxed{x < y} & , & \boxed{|x| \leq |y|} & , & \boxed{A \subset B} \\ \boxed{x, y \in \mathbb{R}} & & \boxed{x, y \in \mathbb{R}} & & \boxed{x, y \in \mathbb{R}} & & \boxed{A, B \in \mathcal{P}(X)} \\ \\ \boxed{a \leq c \wedge b \leq d} & , & \boxed{a + b\sqrt{2} \leq c + d\sqrt{2}} \\ \boxed{(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2} & & \boxed{(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2} \end{array}$$

Ojo: por convenio, ' \subset ' incluye el caso ' $=$ '; si se escribe a veces ' \subseteq ', es para ayudar a recordarlo.

- 2) Sea X un conjunto no vacío y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Se define en X la siguiente relación:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y).$$

Demostrar que la relación \mathcal{R} es una relación de orden si y sólo si f es inyectiva.

- 3) Para la relación de orden dada en \mathbb{N} por $\boxed{n|m}$, dar respuesta a las siguientes preguntas:
- ¿Tiene \mathbb{N} un máximo y/o un mínimo para esta relación?
 - ¿Qué subconjuntos de \mathbb{N} tienen un máximo y cuáles un mínimo?
 - Dado un intervalo $A = \{k \in \mathbb{N} : n \leq k \leq m\}$, ¿qué debe cumplir un $k \in A$ para ser un elemento maximal de A ? ¿Y para ser minimal?
 - ¿Cuáles son los minimales de $\mathbb{N} \setminus \{1\}$?
 - Calcular los elementos minimales de $I = \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq 1000\}$.

- 4) Decimos que una relación de orden \mathcal{R} en un conjunto X es un **buen orden**, si cada subconjunto no vacío $A \subset X$ tiene un mínimo, como sucede con el orden ' \leq ' en \mathbb{N} .

Probar que también están **bien ordenados** por ' \leq ' los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} :

- La unión $X \cup Y$ de dos subconjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}$, si cada uno de ellos está bien ordenado.
 - El conjunto $X = \{a_n + b_m : n, m \in \mathbb{N}\}$, si $\{a_n\}, \{b_n\}$, son dos sucesiones crecientes.
- 5) Probar la afirmación siguiente o dar un contraejemplo que la refute: *Si un conjunto ordenado A tiene un solo elemento minimal a , entonces a es el mínimo de A .*

6) Dar una biyección entre los conjuntos siguientes que transforme una en otra las relaciones de orden dadas sobre ellos:

- a) Por un lado \mathbb{Z} , con el orden ' \leq ' habitual y por otro el conjunto de los racionales de la forma $1 \pm n/(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, también con el orden ' \leq ' habitual.
- b) Por un lado $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, con el orden dado por: $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ si y sólo si $|a - c| \leq d - b$ y por otro el conjunto de los discos abiertos del plano, con su centro en el eje x , ordenados por inclusión.

7) ¿Existe una biyección entre \mathbb{Z} con el orden ' \leq ' habitual y \mathbb{Q} con el orden ' \leq ' habitual que transforme una en otra las relaciones de orden?

8) Dado un alfabeto que, como el nuestro, tiene un orden establecido, y llamando "palabras" a todas las posibles secuencias finitas de sus signos, se llama *orden lexicográfico* al usado en los diccionarios, listas de nombres, etc., para ordenar el conjunto de palabras.

- a) Usando el signo ' \leq ' para el orden de las "letras", dar una definición de cuándo la palabra ' $a_1a_2 \dots a_n$ ' precede a la ' $b_1b_2 \dots b_m$ ': decir qué deben cumplir sus letras para ello.
- b) Con esa definición, probar que este orden es total; en consecuencia, cada conjunto finito de palabras tendrá un mínimo.
- c) (*) ¿ es cierto el apartado anterior para cualquier conjunto infinito de palabras? (y por lo tanto se trataría de un *buen orden*). Demostrarlo o dar un contraejemplo.

9) En $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definimos la siguiente relación: $x\mathcal{R}y$ si x e y tienen el mismo signo y $|x| \leq |y|$.

- a) Demostrar que es una relación de orden, pero que no es de orden total.
- b) Hallar el supremo, ínfimo, máximo y mínimo (si los hay) del intervalo $[-3, 2)$.

10) Se considera la función

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$(n, m) \longrightarrow f(n, m) = 2^n 3^m$$

y a partir de ella se definen las siguientes relaciones en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$(n, m)\mathcal{R}_1(n', m') \Leftrightarrow f(n, m) \leq f(n', m')$$

$$(n, m)\mathcal{R}_2(n', m') \Leftrightarrow f(n, m) \mid f(n', m')$$

- a) Demostrar que \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 son ambas relaciones de orden. ¿Son relaciones de orden total?
- b) Hallar los elementos distinguidos (elementos maximales, elementos minimales, supremos, ínfimos, máximos y mínimos) del conjunto $A = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 1 \leq n + m \leq 4\}$ para cada una de la relaciones de orden \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 .