Tema 4: Diagonalización de endomorfismos

José M. Salazar

Noviembre de 2016

Tema 4: Diagonalización de endomorfismos

- Lección 4. Diagonalización de endomorfismos.

Índice

Representación matricial de un endomorfismo f

Llamaremos $End(V)$ al conjunto de los endomorfismos del $\mathbb{K}$-espacio vecctorial V. Sea $f \in End(V)$ con V de tipo finito y sea $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ base de V.
Dado $x \in V$ con coordenadas X_B respecto de B y dado $f(x) = y \in V$ con coordenadas Y_B respecto de B, veamos cuál es la relación entre las coordenadas X_B e Y_B.
Consideremos la representación de los vectores $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ respecto de B:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= a_{11}e_1 + \cdots + a_{n1}e_n \\ &\vdots \\ f(e_n) &= a_{1n}e_1 + \cdots + a_{nn}e_n \end{aligned}$$

Representación matricial de un endomorfismo f

Si $x \in V$ tiene coordenadas $X_B = (x_1, \dots, x_n)$ respecto de B, esto es, $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, entonces:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) \\
&= x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n) \\
&= x_1(a_{11} e_1 + \cdots + a_{n1} e_n) + \cdots + x_n(a_{1n} e_1 + \cdots + a_{nn} e_n) \\
&= (a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n) e_1 + \cdots + (a_{n1} x_1 + \cdots + a_{nn} x_n) e_n.
\end{aligned}
$$

Representación matricial de un endomorfismo f

Si denotamos por $Y_B = (y_1, \ldots, y_n)$ a las coordenadas de $y = f(x)$ respecto de B, entonces:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1 & = & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ & \vdots & \\ y_n & = & a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{array} \right.$$

o, escrito matricialmente,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Esta es la *ecuación matricial* de f respecto de la base B.

Representación matricial de un endomorfismo f

La matriz

$$F = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se denomina *matriz asociada a f* respecto de la base B. Además, F tiene por columnas las coordenadas respecto de B de los vectores $f(e_1), \ldots, f(e_n)$. Escribiremos $F = M(f, B)$. La ecuación matricial de f se escribe abreviadamente como $Y_B = M(f, B)X_B$, entendiendo que X_B e Y_B están escritos en forma de columna.

Cambios de base

Sea $f \in End(V)$, con V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n, y sean $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ y $B' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ bases de V. La matriz $F = M(f, B)$, y la matriz $G = M(f, B')$, están relacionadas, como vimos en el capítulo anterior, por la matriz de cambio de base $P = M(B, B')$ del modo que refleja el diagrama conmutativo siguiente:

$$V \xrightarrow{f} V$$

$$\begin{array}{ccccc} & X_B & \xrightarrow{F} & Y_B & \\ P & \downarrow & & \downarrow & P \\ & X_{B'} & \xrightarrow{G} & Y_{B'} & \end{array}$$

Se tiene $F = P^{-1}GP$

Matrices semejantes

Definición (Semejanza de matrices)

Dadas $F, G \in M_n(\mathbb{K})$, se dice que F es semejante *a G si $F = P^{-1}GP$ para cierta matriz $P \in M_n(\mathbb{K})$ regular. Esta relación es de equivalencia en $M_n(\mathbb{K})$ (cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva), de modo que diremos que F y G son semejantes.*

Teorema

Las matrices asociadas a $f \in End(V)$ con V de tipo finito son todas semejantes.

Operaciones con endomorfismos y matrices

Teorema

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con $dim(V) = n$.

- *$End(V)$ dotado de la suma y producto por escalar usuales en homomorfismos tiene estructura de $\mathbb{K}$-espacio vectorial.*
- *Los $\mathbb{K}$-espacios vectoriales $End(V)$ y $M_n(\mathbb{K})$ son isomorfos.*

Operaciones con endomorfismos y matrices

Sean $f, g \in End(V)$ con $dim(V) = n$ y sea B base de V.

Propiedades

- $M(f + g, B) = M(f, B) + M(g, B)$.
- *Dado* $a \in \mathbb{K}$, $M(a \cdot f, B) = aM(f, B)$.
- $M(h \circ f, B) = M(h, B)M(f, B)$.
- *Si* f *es el endomorfismo identidad,* $f = Id$, $M(f, B) = I_n$.
- *Si* f *es el endomorfismo nulo,* $f = 0$, $M(f, B) = \bar{0}$.

Diagonalización: planteamiento del problema

Sea $f \in End(V)$, con V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $dim(V) = n$.
Objetivo: Encontrar una base B tal que $M(f, B)$ sea diagonal.
El interés por encontrar esta matriz, que no siempre existirá, radica en que permite estudiar fácilmente el comportamiento de f.

Definición

- *Se dice que* $f \in End(V)$ *es diagonalizable si existe una representación matricial* $M(f, B) \in M_n(\mathbb{K})$ *diagonal.*
- *De una matriz* $F \in M_n(\mathbb{K})$ *se dice que es* diagonalizable *si es semejante a una matriz diagonal.*

Observación

$f \in End(V)$ *es diagonalizable si y sólo si cualquiera de sus matrices asociadas es diagonalizable.*

Autovalores, autovectores y subespacios propios

Sea $f \in End(V)$ con V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $dim(V) = n$.

Definición (Autovalor, autovector y subespacio propio)

i) $\lambda \in \mathbb{K}$ *es* autovalor *o* valor propio *de f si existe $v \in V$, $v \neq \bar{0}$, tal que $f(v) = \lambda v$.*

ii) *A v se le llama* autovector *o* vector propio *de λ.*

iii) *El* subespacio propio *o* autoespacio *de λ, V_λ, es el conjunto de los autovectores de λ junto al vector $\bar{0}$:*

$$\begin{aligned} V_\lambda &= \{v \in V : f(v) = \lambda v\} \\ &= \{v \in V : (f - \lambda Id)(v) = \bar{0}\} \\ &= Ker(f - \lambda Id) \end{aligned}$$

Autovalores, autovectores y subespacios propios

Observaciones

- *V_λ es un subespacio vectorial de V.*
- *Si $\{v_1, \ldots, v_r\}$ son vectores propios asociados a autovalores distintos de f, entonces $\{v_1, \ldots, v_r\}$ son l.i..*
- *Si $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_r}$ son subespacios propios asociados a autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ distintos, entonces $V_{\lambda_i} \cap \left(\sum_{j \neq i} V_{\lambda_j} \right) = \bar{0}$, siendo $\sum_{j \neq i} V_{\lambda_j} = L\left(\cup_{j \neq i} V_{\lambda_j} \right)$*

Determinación de las ecuaciones de V_λ

Procedimiento (Cálculo de V_λ)

Dado un autovalor $\lambda \in \mathbb{K}$, las ecuaciones de $V_\lambda = Ker(f - \lambda Id)$ se obtienen del siguiente modo:

- *Se fija una base B de V y se calcula $F = M(f, B)$.*
- *Se considera el sistema homogéneo $(F - \lambda I_n)X_B = \bar{0}$ con $X_B = (x_1, \dots, x_n)$ escrito en forma de columna. Así se obtienen las ecuaciones implícitas de V_λ respecto de B.*
- *Las ecuaciones paramétricas y una base de autovectores de V_λ se consiguen resolviendo el sistema $(F - \lambda I_n)X_B = \bar{0}$.*

Observación

Dado V_λ un subespacio propio de f, $dim(V_\lambda) = n - r(F - \lambda I_n)$ para cualquier F asociada a f.

Determinación de los autovalores

Sea B base de V con $dim(V) = n$, y sea $F = M(f, B)$. Entonces:

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathbb{K} \text{ es autovalor de } f \quad &\Leftrightarrow \quad f(v) = \lambda v \text{ para algún } v \in V, v \neq \bar{0} \\ &\Leftrightarrow \quad F X_B = \lambda X_B, \text{ para algún } X_B \neq \bar{0} \\ &\Leftrightarrow \quad (F - \lambda I_n) X_B = \bar{0} \text{ para algún } X_B \neq \bar{0} \\ &\Leftrightarrow \quad det(F - \lambda I_n) = \bar{0} \end{aligned}$$

Observación (Cálculo de autovalores)

Los autovalores de f son las soluciones pertenecientes al cuerpo $\mathbb{K}$ de la ecuación polinómica $det(F - t\, I_n) = 0$, con F cualquier matriz asociada a f.

Polinomio característico y propiedades

Definición (Polinomio característico)

Sea $f \in End(V)$, con V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n, y sea $F = M(f, B)$ con B base de V. El polinomio característico *de F es el polinomio de grado n, $P_F(t) = det(F - t\, I_n)$. La ecuación $P_F(t) = 0$ es la* ecuación característica *de F.*

Propiedades

- *Sea $F \in M_n(\mathbb{K})$. Se tiene*
$$P_F(t) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} Tr(F) t^{n-1} + \cdots + det(F)$$
- *Si $F, G \in M_n(\mathbb{K})$ son semejantes, $P_F(t) = P_G(t)$. En particular, $det(F) = det(G)$ y $tr(F) = tr(G)$. Hablaremos, por tanto, del polinomio característico de f, $P(t)$.*
- *Los autovalores de f son las raíces $\lambda_i \in \mathbb{K}$ de $P(t) = 0$.*

Multiplicidades algebraica y geométrica

Definición (Multiplicidades algebraica y geométrica)

Sea $f \in End(V)$ con autovalores asociados $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$.

- *Llamamos* multiplicidad algebraica *del autovalor λ_i al mayor exponente n_i para el cual el factor $(\lambda_i - t)^{n_i}$ aparece en la descomposición de $P(t)$*
- *Llamamos* multiplicidad geométrica *de λ_i a la dimensión $dim(V_{\lambda_i})$.*

Proposición

Sea $f \in End(V)$. Si $\lambda_1 \in \mathbb{K}$ es un autovalor de multiplicidad algebraica n_1, entonces

$$1 \leq dim(V_{\lambda_1}) \leq n_1$$

Teoremas de diagonalización

Teorema

$f \in End(V)$ es diagonalizable si y sólo si existe una base, B, de V formada por vectores propios de f. Se tendrá que $M(f,B)$ es diagonal, con los autovalores colocados en la diagonal principal y repetidos tantas veces como indique su multiplicidad geométrica.

Teorema

Sea $f \in End(V)$ con V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n. El endomorfismo f es diagonalizable si y sólo si:

- *$P(t) = (\lambda_1 - t)^{n_1} \cdots (\lambda_r - t)^{n_r}$ con $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ (todas las raíces de $P(t)$ son elementos del cuerpo $\mathbb{K}$).*
- *$dim(V_{\lambda_i}) = n_i$ para todo $i = 1, \ldots, r$.*

Teoremas de diagonalización

Corolario

- *Si* $\dim(V) = n$ *y* $f \in End(V)$ *tiene* n *autovalores distintos, entonces* f *es diagonalizable.*
- *Si* $f \in End(V)$ *es diagonalizable con autovalores* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$*, entonces se tiene la suma directa* $V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}$*, esto es,* $V = V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_r}$ *y* $V_{\lambda_i} \cap (\sum_{j \neq i} V_{\lambda_j}) = \bar{0}$ *para todo* $i \in \{1, \ldots, r\}$.

Algoritmo de diagonalización en $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Procedimiento (Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

1 *Se fija una base* B_0 *de* V *y se determina* $F = M(f, B_0)$.

2. *Se calcula el polinomio característico* $P_F(t) = P(t)$ *de* f *y se determinan sus raíces para obtener los valores propios* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. *Si alguna raíz es compleja,* f *no es diagonalizable.*

3. *Supuesto que todas las raíces de* $P(t)$ *son reales,* $P(t) = (\lambda_1 - t)^{n_1} \cdots (\lambda_r - t)^{n_r}$, f *será diagonalizable si y sólo si* $\dim(V_{\lambda_i}) = n_i$ *para todo* $i \in \{1, \ldots, r\}$.

4. *Supuesto que* $\dim(V_{\lambda_i}) = n_i$ *para todo* $i \in \{1, \ldots, r\}$, *se calcula una base* $B(V_{\lambda_i}) = \{v_{i,1}, \ldots, v_{i,n_i}\}$ *para cada subespacio* V_{λ_i}. *Los vectores de estas bases son vectores propios de* λ_i.

Algoritmo de diagonalización en $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Procedimiento

5. *Se considera la colección de todos los vectores de todas las bases obtenidas* $B = \{v_{1,1}, \ldots, v_{1,n_1}, \ldots, v_{r,1}, \ldots, v_{r,n_r}\}$.
   B *es base de* V *y* $M(f, B) = D$ *es la matriz diagonal:*

$$D = \begin{pmatrix} \begin{array}{|ccc|} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{array} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{array}{|ccc|} \lambda_r & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{array} \end{pmatrix}$$

donde la caja de cada λ_i *tiene tamaño* n_i.

Algoritmo de diagonalización en $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Procedimiento

6. *Se tiene $D = P^{-1}FP$ con $P = M(B, B_0)$ la matriz de paso que tiene por columnas a las coordenadas de los vectores de B en función de B_0.*

Teorema espectral real

Teorema (Teorema espectral real)

Toda matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ simétrica es diagonalizable y todos los subespacios propios V_λ son perpendiculares entre sí con respecto al producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$. La matriz de paso P se puede escoger ortogonal ($P^t = P^{-1}$), esto es, tal que $P^tAP = P^{-1}AP = D$ diagonal. Hablamos, entonces, de diagonalización ortogonal *de A.*

Ejemplo: proyección

Dados dos subespacios complementarios, $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, de un espacio vectorial V ($V = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$) y dado $v \in V$, sabemos que v se descompone de modo único como $v = x + y$ con $x \in \mathcal{X}$ e $y \in \mathcal{Y}$.

Proposición

Existe un único endomorfismo de V, p, tal que $p(v) = x$. A p se lo denomina proyección sobre $\mathcal{X}$ a lo largo de $\mathcal{Y}$ y cumple las siguientes propiedades:

- $p^2 = p$ (*p es idempotente*).
- $Id - p$ *es la proyección sobre* $\mathcal{Y}$ *a lo largo de* $\mathcal{X}$.
- $Im(p) = \{x : p(x) = x\}$.
- $Im(p) = Ker(Id - p) = \mathcal{X}$ *y* $Im(Id - p) = Ker(p) = \mathcal{Y}$

Ejemplo: proyección

Proposición

Si $V = \mathbb{R}^n$, la matriz de p con respecto a la base canónica es:

$$M(p, B_c) = [\mathbf{X}|\mathbf{Y}] \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} [\mathbf{X}|\mathbf{Y}]^{-1} = [\mathbf{X}|\mathbf{0}][\mathbf{X}|\mathbf{Y}]^{-1},$$

donde las columnas de $\mathbf{X}$ *y de* $\mathbf{Y}$ *son bases de* $\mathcal{X}$ *e* $\mathcal{Y}$ *respectivamente.*
La matriz asociada a la proyección p con respecto a la base de $\mathbb{R}^n$, $B = \{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$, formada por la unión de las dos bases de $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ será una matriz diagonal con dos autovalores: el 1 y el 0.

$$M(p, B) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las multiplicidades algebraicas coinciden, respectivamente, con las dimensiones de $\mathcal{X} = V_1$ e $\mathcal{Y} = V_0$, que son los subespacios propios.