Tema 2: Espacios Vectoriales

José M. Salazar

Septiembre de 2020

Tema 2: Espacios Vectoriales

- Lección 2. Espacios vectoriales.

Índice

Definición de espacio vectorial

Definición (Espacio vectorial)

Dado un cuerpo $\mathbb{K}$ y un conjunto no vacío V, se dice que V es un espacio vectorial *sobre $\mathbb{K}$, o $\mathbb{K}$-espacio vectorial, si en él se han definido dos operaciones, una interna, $+ : V \times V \to V$, y otra externa, $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$, llamadas respectivamente* suma *y* producto por un escalar, *cuyas propiedades pasamos a describir:*

- S1 *Asociativa:* $(u + v) + w = u + (v + w) \quad \forall u, v, w \in V$.
- S2 *Conmutativa:* $u + v = v + u \quad \forall u, v \in V$.
- S3 *Existencia de elemento neutro:* $\exists \bar{0} \in V$ *tal que* $\bar{0} + v = v + \bar{0} = v \, \forall v \in V$
- S4 *Existencia de elemento opuesto:* $\forall v \in V$ *existe otro vector* $-v \in V$ *tal que* $v + (-v) = \bar{0}$.

Definición de espacio vectorial

Definición (Espacio vectorial)

M1 $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$ *para todo* $a \in \mathbb{K}$ *y para todo par de vectores* $u, v \in V$.

M2 $(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$ *para todo par de escalares* $a, b \in \mathbb{K}$ *y para todo* $u \in V$.

M3 $a \cdot (b \cdot u) = (ab) \cdot u$ *para todo* $u \in V$ *y* $a, b \in \mathbb{K}$.

M4 $1 \cdot u = u$ *para todo* $u \in V$*, donde* 1 *es la unidad para el producto en* $\mathbb{K}$.

Diremos que $(V, +, \cdot)$ tiene estructura de $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

Propiedades

Habitualmente trabajaremos con el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si bien todos los resultados que se obtienen en este tema son válidos en cualquier cuerpo $\mathbb{K}$.

Observación

De las propiedades enunciadas se deducen las siguientes:

1. $0 \cdot u = \bar{0}$.
2. $a \cdot \bar{0} = \bar{0}$.
3. *Si* $a \cdot u = \bar{0}$, *entonces* $a = 0$ *ó* $u = \bar{0}$.
4. $(-a) \cdot u = a \cdot (-u) = -(a \cdot u)$.

Ejemplos

En los conjuntos que aparecen a continuación, las operaciones $+$ y $\cdot$ representan la suma y producto por escalar usuales en cada uno de ellos, y en todos los casos se tiene estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial:

- $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, siendo $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$.
- $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$, siendo $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices de coeficientes reales con m filas y n columnas.
- $(\mathbb{R}_n[x], +, \cdot)$, siendo $\mathbb{R}_n[x]$ es el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes reales y una variable x.
- $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$, siendo $\mathbb{R}[x]$ el conjunto de los polinomios con coeficientes reales y una variable x.
- $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$, siendo $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ el conjunto de todas las funciones del intervalo $I \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Ejemplos

Otro ejemplo de espacio vectorial es el *espacio vectorial producto*. Dados $(V_1, +_1, \cdot_1)$ y $(V_2, +_2, \cdot_2)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, el $\mathbb{K}$-espacio vectorial producto es el conjunto $V = V_1 \times V_2$ dotado de la operación suma

$$\begin{array}{rccc} + : & V \times V & \to & V \\ & ((v_1, v_2), (w_1, w_2)) & \mapsto & (v_1 +_1 \ w_1, v_2 +_2 \ w_2) \end{array}$$

y la operación producto por escalar

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{K} \times V & \to & V \\ & (\lambda, (v_1, v_2)) & \mapsto & (\lambda \cdot_1 \ v_1, \lambda \cdot_2 \ v_2) \end{array}$$

Obsérvese que el espacio vectorial producto se puede definir de igual modo con n $\mathbb{K}$-espacios vectoriales.

Definición y caracterización de subespacio vectorial

Definición (Subespacio vectorial)

Un subconjunto $W \neq \emptyset$ del $\mathbb{K}$-espacio vectorial V es un subespacio vectorial *de V si $(W, +, \cdot)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con las mismas operaciones $+$ y $\cdot$ que V.*

Teorema

Sea $W \subset V$, con $W \neq \emptyset$ y $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Entonces W es subespacio vectorial de V si y sólo si:

i) *W es cerrado para la suma: si $u, v \in W$, entonces $u + v \in W$.*

ii) *W es cerrado para el producto por escalares: si $u \in W$ y $a \in \mathbb{K}$, entonces $a \cdot u \in W$.*

Las condiciones *i*) y *ii*) son equivalentes a:
iii) $a \cdot u + b \cdot v \in W$ para todo $u, v \in W$ y $a, b \in \mathbb{K}$.

Propiedades y ejemplos

Observación

Si W es un subespacio vectorial de V, entonces $\bar{0} \in W$.

Ejemplos

- $W = \{\bar{0}\}$ *y* $W = V$ *son subespacios vectoriales de* V.
- *El conjuntos de soluciones del sistema lineal homogéneo* $AX = 0$ *con* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *es un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^n$.

Intersección y suma de subespacios vectoriales

Definición (Intersección de subespacios vectoriales)

Sean U y W subespacios vectoriales de V. La intersección *de U y W, $U \cap W$, es el conjunto*

$$U \cap W = \{v \in V \text{ tal que } v \in U \text{ y } v \in W\}$$

Definición (Suma de subespacios vectoriales)

Sean U y W subespacios vectoriales de V. La suma *de U y W, $U + W$, es el conjunto*

$$U + W = \{v \in V \text{ tal que } v = u + w \text{ con } u \in U \text{ y } w \in W\}$$

Teorema

$U \cap W$ y $U + W$ son subespacios vectoriales de V.

Suma directa

Definición (Suma directa)

Dados U y W subespacios vectoriales de V, si $U \cap W = \{\bar{0}\}$ se dice que la suma es suma directa *y escribimos $U \oplus W$. Si $V = U + W$ y estos son suma directa, decimos que V es la suma directa de U y W, y escribimos $V = U \oplus W$.*

Observación

$V = U \oplus W$ si y sólo si cada vector $v \in V$ se escribe de modo único como $v = u + w$ para ciertos $u \in U$ y $w \in W$.

Combinación lineal y envolvente lineal

Definición (Combinación lineal)

Sea S un subconjunto no vacío del $\mathbb{K}$-espacio vectorial V. Un vector $v \in V$ es combinación lineal *de la familia $S \subset V$ si $v = a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m$ con $a_i \in \mathbb{K}$ y $v_i \in S$ para todo $i = 1, \ldots, m$.*

Definición (Envolvente lineal)

Llamamos envolvente lineal *de S, $L(S)$, al conjunto formado por todas las combinaciones lineales de elementos de S:*

$$L(S) = \{a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m : m \in \mathbb{N}, v_i \in S, a_i \in \mathbb{K}, i = 1, \ldots, m\}$$

Propiedades de las envolventes lineales

Propiedades

- *$L(S)$ es un subespacio vectorial de V.*
- *$L(S)$ es el menor subespacio vectorial de V que contiene a S, esto es, si W es un subespacio vectorial de V que contiene a S, entonces $L(S) \subset W$.*
- *Si S es subespacio vectorial de V, entonces $L(S) = S$.*

Teorema

Dados U, W subespacios vectoriales de V, entonces $U + W = L(U \cup W)$.

Sistemas de generadores. Dependencia e independencia lineal

Definición (Sistema de generadores)

Un conjunto de vectores $S \subset V$ es un sistema de generadores *(s.g.) de V si $L(S) = V$. Si V admite un s.g. S con una cantidad finita de vectores, se dice que V es de* tipo finito. *En caso contrario, es de* tipo infinito.

Definición (Dependencia lineal)

$S = \{v_1 \ldots, v_m\} \subset V$ es linealmente dependiente *(l.d.) si existen $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{K}$, no todos nulos, tales que:*

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_m v_m = \bar{0}$$

De un vector $v \in V$ diremos que depende linealmente *de S si $v \in L(S)$.*

Sistemas de generadores. Dependencia e independencia lineal

Definición (Independencia lineal)

$S = \{v_1, \ldots, v_m\} \subset V$ *es* linealmente independiente *(l.i.) si no es linealmente dependiente, esto es, de ser cierta la igualdad*

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_m v_m = \bar{0},$$

entonces $a_1 = \cdots = a_m = 0$.

Proposición

Si $\{v_1, \ldots, v_m\}$ *es l.i. en* V *y* $\{w_1, \ldots, w_n\}$ *es s.g. de* V*, entonces* $m \leq n$.

Bases y teoremas relacionados

Definición (Base)

Una familia de vectores $B = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ *es una* base *de* V *si es l.i. y s.g. de* V.

Teoremas

Sea V *no nulo de tipo finito. Entonces:*

- *(Existencia de base)* V *admite una base.*
- *(Teorema de la base) Todas las bases de* V *tienen el mismo número de vectores, que llamamos* dimensión *de* V, $dim(V)$.
- *(Teorema de ampliación de la base) Si* $S \subset V$ *es l.i., entonces* S *se puede ampliar a una base de* V.

Ejemplos

Ejemplos (*Bases canónicas*)

- *En* $\mathbb{R}^n$, $B_c = \{e_1, \ldots, e_n\}$, *donde* $e_i \in \mathbb{R}^n$ *con 1 en la coordenada* i *y 0 en el resto.*
- *En* $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B_c = \{E_{11}, \ldots, E_{1n}, \ldots, E_{m1}, \ldots, E_{mn}\}$, *con* $E_{ij} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *con 1 en la posición* (i, j) *y 0 en el resto.*
- *En* $\mathbb{R}_n[x]$, $B_c = \{1, x, \ldots, x^n\}$.
- *En* $\mathbb{R}[x]$, $B_c = \{1, x, x^2, \ldots\}$.

Ejemplos

- *Por convenio,* $dim(\{\bar{0}\}) = 0$.
- $\mathbb{R}^n$, $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *y* $\mathbb{R}_n[x]$ *son de tipo finito con* $dim(\mathbb{R}^n) = n$, $dim(M_{m\times n}(\mathbb{R})) = mn$ *y* $dim(\mathbb{R}_n[x]) = n + 1$.
- $\mathbb{R}[x]$ *y* $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ *son de tipo infinito.*

Subespacios y dimensiones

Propiedades

Dado un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de tipo finito, V, y dados U, W subespacios vectoriales suyos, se cumple:

- $dim(U) \leq dim(V)$.
- $dim(U) = dim(V)$ *si y sólo si* $U = V$.
- *Sea* $dim(U) = m$ *y sea* $S = \{v_1, \ldots, v_m\} \subset U$. *Entonces* S *es base de* U *si y sólo si es l.i..*
- *(Fórmula de las dimensiones)* $dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$.

El espacio vectorial $\mathbb{K}^n$. Operaciones elementales

Dados m vectores del $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{K}^n$, sus coordenadas pueden verse como filas de una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$

$$A_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, A_m = (a_{m1}, \ldots, a_{mn})$$

que generan un subespacio $F(A) = L(A_1, \ldots, A_m)$.
Dadas $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, escribimos $A \to B$ si B se obtiene de A mediante operaciones elementales en filas.

Propiedades

- *Si $A \to B$, entonces $F(A) = F(B)$.*
- *Si $A \to E$ con E escalonada, entonces los vectores fila no nulos de E son base de $F(A) = F(E)$.*

El espacio vectorial $\mathbb{K}^n$. Operaciones elementales

Propiedades

- *Dadas* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ *y* $B \in M_{p\times n}(\mathbb{K})$, $L(A) = L(B)$ *si y sólo si* A *y* B *tienen la misma matriz escalonada reducida (sin contar filas de ceros).*
- *Si* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $r(A) = dim(F(A))$ *y coincide con el número máximo de vectores fila l.i. y con el número máximo de vectores columna l.i.*

A partir de estas propiedades se determina si una familia finita $S \subset \mathbb{K}^n$ es l.i, l.d., s.g. o base, pudiéndose calcular una base de $L(S)$, así como sus ecuaciones paramétricas e implícitas.

Coordenadas

V representará un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de tipo finito con $dim(V) = n$.

Objetivo: Dado $S = \{v_1, \dots, v_r\} \subset V$, determinar si son l.i, l.d., s.g. o base de V y calcular una base de $L(S)$.

Observación (Coordenadas respecto de una base)

Sea $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ base del $\mathbb{K}$-espacio vectorial V. Para todo $x \in V$ existen $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ únicos y tales que $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. A la n-tupla $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ se la llama coordenadas de x respecto de B y la denotaremos por X_B.

Coordenadas

Propiedades

Sea B base de V fija. Si $x, y \in V$ cumplen $X_B = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y_B = (y_1, \ldots, y_n)$, entonces:

1. $[x + y]_B = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) = X_B + Y_B$.
2. $[a \cdot x]_B = (ax_1, \ldots, ax_n) = a \cdot X_B$.
3. *Dado $S = \{v_1, \ldots, v_r\} \subset V$, S es l.i., l.d., sistema de generadores o base de V si y sólo si lo son sus vectores de coordenadas respecto de B en $\mathbb{K}^n$.*

Coordenadas

Para determinar si $S = \{x_1, \dots, x_r\} \subset V$ es l.i, l.d., s.g. o base de V y calcular una base de $L(S)$, se sigue el siguiente procedimiento:

Procedimiento

- *Fijar una base B de V.*
- *Calcular, resolviendo sistemas compatibles determinados, los vectores de coordenadas respecto de B de $\{x_1, \dots, x_r\}$, a los que denotados por $\{X_1, \dots, X_r\} \subset \mathbb{K}^n$.*
- *Trabajar en $\mathbb{K}^n$ en vez de V contruyendo la matriz A con filas $A_i = X_i$.*
- *Escalonar $A \to E$. El rango $r(A) = r(E)$ nos dice si S es l.i, l.d., s.g. o base de V. Además, las filas no nulas de E proporcionan las coordenadas respecto de B de una base de $L(S)$.*

Ecuaciones paramétricas

Sea $W = L(S) \subset V$, con S finito y $dim(V) = n$, y sea B base de V. Las ecuaciones paramétricas de W respecto de B se hallan así:

Procedimiento

- *Se determinan las coordenadas de los vectores de S respecto de B y se expresan como filas de una matriz A que se escalona, $A \to E$.*
- *Las filas no nulas de E, $\{W_{1B}, \ldots, W_{rB}\}$, son las coordenadas respecto de B de los vectores de una base B_W de W.*
- *Las ecuaciones paramétricas son*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & \lambda_1 w_{11} + \cdots + \lambda_r w_{r1} \\ & \vdots & \\ x_n & = & \lambda_1 w_{1n} + \cdots + \lambda_r w_{rn} \end{array}\right.$$

con $W_{iB} = (w_{i1}, \ldots, w_{in})$ para todo $i = 1, \ldots, r$.

En este caso, $dim(W)$ coincide con el número de parámetros λ_i.

Ecuaciones implícitas

Dado $W = L(S) \subset V$, con S finito, y dada una base B de V, las ecuaciones implícitas de W respecto de B se obtienen así:

Procedimiento

- *Se calculan las coordenadas* $\{W_{1B}, \dots, W_{rB}\} \subset \mathbb{K}^n$ *de una base de* W *respecto de* B.
- *Se construye la matriz* A *que las tiene por filas, añadiendo una última fila representando las coordenadas* $(x_1 \dots x_n)$ *de un vector genérico de* W *respecto de* B. *La nueva matriz* A' *tiene* $r+1$ *filas y* n *columnas.*
- $r(A) = r(A') = r$ *de donde se deducen, escalonando* A' *por ejemplo* ($A' \to E'$), *las ecuaciones implícitas de* W *que deben ser los* $n-r$ *elementos no nulos de la última fila de* E' *igualados a 0.*

En este caso, $r = dim(W) = n -$ número de ecuaciones implícitas.

Paso de implícitas a paramétricas. Subespacios nulo y total

Observación

Si W viene dado en forma de ecuaciones implícitas, para pasar y paramétricas y obtener una base únicamente debe escalonarse la matriz A de coeficientes para eliminar las ecuaciones que sobran y resolver el sistema equivalente resultante. La dimensión de W será $dim(W) = n - r(A)$.

Observación

- *Si $W = \{\bar{0}\}$, sus ecuaciones ímplícitas son $x_1 = \cdots = x_n = 0$, W no tiene base y tampoco ecuaciones paramétricas.*
- *Si $W = V$, no tiene ecuaciones implícitas, unas ecuaciones paramétricas son $x_1 = \lambda_1, \ldots, x_n = \lambda_n$ y una base será cualquier base de V.*

Ecuaciones de la suma y la intersección de subespacios

Sean U y W subespacios vectoriales de V, con V de tipo finito.

Procedimiento (Ecuaciones de $U + W$)

Determinando bases B_U y B_W de U y W se tiene $U + W = L(U \cup W) = L(B_U \cup B_W)$. A partir de aquí se calculan las ecuaciones paramétricas y ecuaciones implícitas de la suma.

Procedimiento (Ecuaciones de $U \cap W$)

- *Ecuaciones implícitas: se obtienen a partir de la unión de las ecuaciones implícitas de U y las de W.*
- *Ecuaciones paramétricas: se obtienen a partir de las implícitas resolviendo el sistema lineal.*

Cambio de base: planteamiento del problema

Sea V de tipo finito con $dim(V) = n$ y sean $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ y $B' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ dos bases distintas.

Objetivo: dado $x \in V$, relacionar las coordenadas $X_B = (x_1, \dots, x_n)$ con las coordenadas $X_{B'} = (x'_1, \dots, x'_n)$.

Consideramos las coordenadas de los vectores de B' en la base B:

$$\begin{aligned} e'_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{n1}e_n \\ &\vdots \\ e'_n &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n \end{aligned}$$

Se tiene

$$x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n = x'_1e'_1 + \cdots + x'_ne'_n.$$

Cálculo de la ecuación matricial

Por consiguiente:

$$x_1e_1+\cdots+x_ne_n = x_1'(a_{11}e_1+\cdots+a_{n1}e_n)+\cdots+x_n'(a_{1n}e_1+\cdots+a_{nn}e_n)$$

Reordenando términos, queda:

$$x_1e_1+\cdots+x_ne_n = (a_{11}x_1'+\cdots+a_{1n}x_n')e_1+\cdots+(a_{n1}x_1'+\cdots+a_{nn}x_n')e_n.$$

Así obtenemos las *ecuaciones de cambio de base* de B' en B:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & a_{11}x_1' + \cdots + a_{1n}x_n' \\ & \vdots & \\ x_n & = & a_{n1}x_1' + \cdots + a_{nn}x_n' \end{array}\right.$$

Cálculo de la ecuación matricial

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Si llamamos P a la matriz de arriba, podemos escribir, $X_B = PX_{B'}$ supuestos X_B y $X_{B'}$ en forma de vectores columna. Ésta es la *ecuación matricial del cambio de base* y P es la *matriz de cambio de base* de B' en B o *matriz de paso*, escribiéndose $P = M(B', B)$.

Observaciones

- *Las columnas de P son las coordenadas de los vectores de B' respecto de B.*
- *P es regular.*
- $P^{-1} = M(B, B')$.