Lección 13: Codificación de Canal. Parte III

Gianluca Cornetta, Ph.D.
Dep. de Ingeniería de Sistemas de Información y Telecomunicación
Universidad San Pablo-CEU

Contenido

- Utilidad de la Matriz Estándar
- Códigos Cíclicos
- Códigos de Hamming

Utilidad de la Matriz Estándar

- La matriz estándar es una herramienta muy potente que permite estudiar la capacidad de detección y corrección de un código de bloque lineal (n, k) incluso para códigos con n grande
- Un indicador de las capacidad de un código de detectar y corregir t errores es límite de Hamming (*Hamming bound*)
- El límite de Hamming permite establecer cuál es el mínimo número de bits de paridad o de filas de la matriz estándar necesarios para corregir todas las posibles combinaciones de t errores y es definido como:

$$\text{Number of parity bits:} \quad n\text{-}k \geq \log_2\left[1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{t}\right]$$

$$\text{Number of cosets:} \quad 2^{n\text{-}k} \geq \left[1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{t}\right]$$

Utilidad de la Matriz Estándar

- La capacidad de detección y corrección de error de un código $(n,\ k)$ depende de la distancia mínima d_{min} entre palabras y viceversa
- El número mínimo t de errores que se desea corregir determina pues la distancia de Hamming mínima del código d_{min} :

$$t = \frac{d_{\min} - 1}{2} \Rightarrow d_{\min} = 2t + 1$$

- El t mínimo deseable en $t=2$ lo que lleva a una distancia mínima $d_{min} = 5$
- Es deseable poder transmitir al menos 2 bits de dato por cada palabra de código (es decir, el código más sencillo debe ser de tipo $(n, 2)$ y tener pues $k=2$)
- Cuando $k=2$ el espacio de las *n-tuplas* tiene $2^k=4$ elementos que corresponden a las 4 posibles palabras de código

Utilidad de la Matriz Estándar

- $k=t=2$ se utilizan para determinar el límite de Hamming mínimo

$$2^{n-2} \geq \left[1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right]$$

- La desigualdad anterior se resuelve numéricamente encontrando que el valor mínimo de n que la satisface es $n=7$:

$$\begin{cases}\binom{7}{1}=\dfrac{7!}{1!\cdot(7-1)!}=7\\ \binom{7}{2}=\dfrac{7!}{2!\cdot(7-2)!}=21\end{cases} \Rightarrow 2^{7-2}=32 \geq \left[1+\binom{7}{1}+\binom{7}{2}\right]=[1+7+21]=29$$

- Es deseable diseñar un código con n mínimo por cuestiones de eficiencia de banda y sencillez de implementación
- Por tanto el código de dimensiones mínimas es el $(7, 2)$. La matriz generadora $\mathbf{G}$ de este código está formada por $k=2$ 7-tuplas linealmente independiente y cada 7-tupla está formada por 5 bits de paridad y 2 de dato

Utilidad de la Matriz Estándar

- Una posible matriz generadora del código $(7, 2)$ es:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{P} \quad | \quad \mathbf{I}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Es fácil verificar que las dos filas de $\mathbf{G}$ forman una base del subespacio S de V_7 ya que $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 \neq \{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2\}$ y $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 \in S$
- El código $\mathbf{U}_2$ relativo al mensaje $\mathbf{m}_2 = [0\ 1]$ se calcula como:

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{m}_2\mathbf{G} = [0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

- Recordando que:

$$d_{\min} = \min\{w(\mathbf{U}_1), w(\mathbf{U}_2)\} = w(\mathbf{U}_2) = 3$$

- Se observa que el código no $(7, 2)$ con la restricción $d_{min} = 5$ ya que por este código $d_{min} = 3$

Utilidad de la Matriz Estándar

- Por consiguiente el límite de Hamming no es una condición suficiente para el código $(7, 2)$
- Es necesario verificar el cumplimiento de otro límite que se denomina *límite de Plotkin*:

$$d_{\min} \leq \frac{n \times 2^{k-1}}{2^k - 1}$$

- En general un código de bloque lineal (n, k) debe cumplir con ambos límites con las siguientes diferencias:
  - Para códigos con relación de código k/n elevada, *si el código cumple con el límite de Hamming entonces satisfará también el límite de Plotkin*
  - Para códigos con relación de código k/n baja (como es el caso de este ejemplo), *si el código cumple con el límite de Plotkin entonces satisfará también el límite de Hamming*
- Por consiguiente el código más pequeño que asegura $d_{min} = 5$ es el $(8, 2)$
- Obviamente se trata de un código realizable pero poco práctico debido a su baja eficiencia de banda ya que 2 bits de dato implican la transmisión de 6 bits de paridad

Utilidad de la Matriz Estándar

- La matriz generadora del código $(8, 2)$ es:

$$\mathbf{G} = \left[\mathbf{P} \quad | \quad \mathbf{I}_2\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- La operación de detección empieza calculando el síndrome del código (n, k), por ello es necesario determinar la transpuesta $\mathbf{H}^T$ de la matriz de control de paridad $\mathbf{H}$
- $\mathbf{H}^T$ es una matriz $n \times (n\text{-}k)$, por lo que para un código $(8, 2)$ es:

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_6 \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Utilidad de la Matriz Estándar

- El síndrome por cada uno de los posible 2^{n-k} patrones de error es $\mathbf{S}_i = \mathbf{e}_i \mathbf{H}^T$, con $i=1,\ldots, 2^{n-k}$
  - $\mathbf{e}_i$ representa el i-ésimo líder de *coset* (una fila de la matriz estándar), es decir, uno de los 2^{n-k} patrones de error que pueden perturbar todos los posibles 2^k códigos $\mathbf{U}_j$ del conjunto
- Utilizando esta ecuación se construye la tabla de síndromes que permite detectar el patrón de error que corresponde a un síndrome dado
- El patrón de error estimado se suma (módulo 2) al código corrompido recibido por el detector para calcular el código correcto
- Un código suele ser diseñado para corregir α errores y detectar simultáneamente β errores ($\beta \geq \alpha$) siempre que se cumpla la condición siguiente:

$$d_{\min} \geq \alpha + \beta + 1 \Rightarrow \alpha + \beta \leq d_{\min} - 1 = 5 - 1 = 4$$

- Por tanto existen las siguientes posibilidades:

Detect (α)	*Correct* (β)
2	2
3	1
4	0

Utilidad de la Matriz Estándar

- La detección es un proceso sencillo ya que un error es detectado si el síndrome del vector recibido es distinto de cero
- El proceso de corrección es más complejo ya que implica también detectar el patrón de error que ha generado un síndrome dado para poderlo corregir
- Esto proceso equivale a realizar las siguientes operaciones (en el caso de nuestro código $(8, 2)$):

$$\mathbf{S}_i = r_i H^T = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 & r_7 & r_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} s_1 = r_1 + r_8 \\ s_2 = r_2 + r_8 \\ s_3 = r_3 + r_7 + r_8 \\ s_4 = r_4 + r_7 + r_8 \\ s_5 = r_5 + r_7 \\ s_6 = r_6 + r_7 \end{cases}$$

Utilidad de la Matriz Estándar

- La complejidad de la tabla de corrección depende del número de errores simultáneos (1 ó 2) que se desea corregir
- En el caso de corrección de error sencillo ($\beta=1$)el decodificador se diseña para evaluar sólo los primeros 9 *cosets* de la matriz estándar entre los 64 posibles
- En el caso de corrección hasta error dobles ($\beta=2$)el decodificador se diseña para evaluar sólo los primeros 37 *cosets* de la matriz estándar entre los 64 posibles
- Los *cosets* de 38 a 64 se utilizan para la corrección de un subconjunto de errores triples (26 de los 53 posibles). Estos *cosets* no se utilizan en decodificadores de distancia limitada (los cuales sólo corrigen hasta errores de orden t)
- Un código (n, k) diseñado para corregir errores hasta grado t no puede ser reorganizado para corregir sólo errores de tipo $t+1$,aunque la matriz estándar tenga el tamaño suficiente para contener todos los *cosets* relativos a estos tipo de error
  - El único parámetro que fija el máximo número de errores simultáneos errores es posible corregir es la distancia de Hamming mínima d_{min} ($d_{min}=5$ impone $t=2$)
  - Una secuencia de x bits erróneos sólo podría ser corregible si todos los vectores de peso x son líderes de *coset* (es decir, sólo aparecen en la primera columna de la matriz estándar), si un vector de peso x aparece en alguna otra columna el error no es corregible incluso si la matriz estándar tiene tamaño suficiente para contener todos los patrones de error de peso x

Códigos Cíclicos

- Los *códigos cíclicos binarios* son una subclase muy importante de los códigos de bloque lineales
- Esta clase de códigos puede implementarse fácilmente utilizando un registro de desplazamiento realimentado lineal (*Linear Feedback Shift Register* –LFSR)
- El síndrome puede calcularse utilizando registros análogos
- Un código lineal es (n, k) es un código cíclico cuando se verifica la siguiente condición:
  - Si la *n-tupla* es un código $\mathbf{U}=(u_0, u_1,\ldots, u_{n-1})$ en el subespacio $S \Rightarrow$ también $\mathbf{U}^{(1)}=(u_{n-1}, u_0, u_1,\ldots, u_{n-2})$, obtenido rotando $\mathbf{U}$ en sentido horario una única vez, pertenece a S
- En general $\mathbf{U}^{(i)}=(u_{n-i}, u_{n-i+1},\ldots, u_{n-1}, u_0, u_1,\ldots, u_{n-i-1})$, obtenido rotando $\mathbf{U}$ en sentido horario i veces, todavía es un elemento de S
- Los componentes de $\mathbf{U}=(u_0, u_1,\ldots, u_{n-1})$ pueden considerarse como los coeficientes de un polinomio de grado n -1:

$$\mathbf{U}(X) = u_0 + u_1 X + u_2 X^2 + \cdots + u_{n-1} X^{n-1} \quad u_i = \{0,1\}$$

- En general, una *n-tupla* es descrita por un polinomio de grado menor o igual a n -1

Códigos Cíclicos

- Si $\mathbf{U}(X)$ es un polinomio de grado n -1 $\Rightarrow$ $\mathbf{U}^{(i)}(X)$ es el resto de la división $X^i\mathbf{U}(X)/(X^n+1)$, es decir:

$$\frac{X^i\mathbf{U}(X)}{X^n+1}=\mathbf{q}(X)+\frac{\mathbf{U}^{(i)}(X)}{X^n+1}$$

- Multiplicando ambos miembros por se obtiene (X^n+1):

$$X^i\mathbf{U}(X)=\mathbf{q}(X)(X^n+1)+\underbrace{\mathbf{U}^{(i)}(X)}_{\text{remainder}}$$

- O, de forma equivalente, en términos de artimética modular:

$$\mathbf{U}^{(i)}(X)=X^i\mathbf{U}(X)\bmod(X^n+1)$$

- Consideremos la expresión anterior para el caso i =1:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(X)&=u_0+u_1X+u_2X^2+\cdots+u_{n-2}X^{n-2}+u_{n-1}X^{n-1}\\ X\mathbf{U}(X)&=u_0X+u_1X^2+u_2X^3+\cdots+u_{n-2}X^{n-1}+u_{n-1}X^n\end{aligned}$$

- Sumando y restando u_{n-1} (en aritmética módulo 2 esta operación equivale a sumar u_{n-1} dos veces) se obtiene:

$$X\mathbf{U}(X)=\underbrace{u_{n-1}+u_0X+u_1X^2+u_2X^3+\cdots+u_{n-2}X^{n-1}}_{\mathbf{U}^{(1)}(X)}+u_{n-1}X^n+u_{n-1}=\mathbf{U}^{(1)}(X)+u_{n-1}(X^n+1)$$

Códigos Cíclicos

- $\mathbf{U}^{(1)}(X)$ es de grado n -1 por tanto no es divisible por (X^n+1), por tanto, resulta:

$$\frac{X\mathbf{U}(X)}{X^n+1} = u_{n-1} + \frac{\mathbf{U}^{(1)}(X)}{X^n+1} \Rightarrow \mathbf{U}^{(1)}(X) = X\mathbf{U}(X) \bmod (X^n+1)$$

- Por extensión se obtiene la expresión general:

$$\mathbf{U}^{(i)}(X) = X^i\mathbf{U}(X) \bmod (X^n+1)$$

Códigos Cíclicos

- Es posible generar un código cíclico utilizando un *polinomio generador* $\mathbf{g}(X)$:

$$\mathbf{g}(X) = g_0 + g_1 X + g_2 X^2 + \cdots + g_p X^p$$

- Donde $g_0 = g_p = 1$
- Cada polinomio de código en el subespacio es de la forma $\mathbf{U}(X) = \mathbf{m}(X)\mathbf{g}(X)$, donde $\mathbf{U}(X)$ es un polinomio de grado menor o igual a n -1 y $\mathbf{m}(X)$ es un polinomio que representa el mensaje:

$$\mathbf{m}(X) = m_0 + m_1 X + m_2 X^2 + \cdots + m_{n-p-1} X^{n-p-1}$$

- Existen 2^{n-p} polinomios de código y 2^k posibles vectores de código. A cada vector de código va asociado un solo polinomio de código $\Rightarrow n - p = k$ o, de forma equivalente, $p = n - k$
- Por consiguiente, el polinomio generador $\mathbf{g}(X)$ debe ser de grado $n - k$ y cada polinomio de código que representa un código cíclico (n, k) puede expresarse como:

$$\mathbf{U}(X) = \left(m_0 + m_1 X + m_2 X^2 + \cdots + m_{k-1} X^{k-1}\right)\mathbf{g}(X)$$

- Esto significa que $\mathbf{U}$ es un código válido del subespacio S *si y sólo si* $\mathbf{U}(X)$ es perfectamente divisible (sin resto) por $\mathbf{g}(X)$

Códigos Cíclicos

- Un polinomio generador $\mathbf{g}(X)$ de un código cíclico (n, k) es un factor de (X^n+1), es decir, $(X^n+1)=\mathbf{g}(X)\ \mathbf{h}(X)$
- Por ejemplo:

$$\boxed{\left(X^7+1\right)=\left(1+X+X^3\right)\left(1+X+X^2+X^4\right)}$$

- Si escogemos $\mathbf{g}(X)=(1+X+X^3)$ (es decir el polinomio de grado n - $k=3 \Rightarrow k= n-3=4$) es posible generar un código cíclico $(7, 4)$
- Si escogemos $\mathbf{g}(X)=(1+X+X^2+X^4)$ (es decir el polinomio de grado n - $k=4 \Rightarrow k= n-4=3$) es posible generar un código cíclico $(7, 3)$
- $\mathbf{g}(X)$ es un polinomio de grado n - k, es un factor de (X^n+1) y puede generar de forma unívoca un código cíclico (n, k)

Códigos Cíclicos

- Un mensaje de k bits $\mathbf{m}(X)$ se representa como:

$$\mathbf{m}(X) = m_0 + m_1 X + m_2 X^2 + \cdots + m_{k-1} X^{k-1}$$

- La operación de codificación equivale a añadir en la cola del mensaje n-k bits de paridad para generar la n-*tupla* $\mathbf{U}$
- Esta operación equivale a desplazar $\mathbf{m}(X)$ de n - k posiciones a la derecha en un hipotético registro de desplazamiento:

$$X^{n-k}\mathbf{m}(X) = m_0 X^{n-k} + m_1 X^{n-k+1} + m_2 X^{n-k+2} + \cdots + m_{k-1} X^{n-1}$$

- Si dividimos $X^{n-k}\mathbf{m}(X)$ por $\mathbf{g}(X)$ se obtiene:

$$X^{n-k}\mathbf{m}(X) = \mathbf{q}(X)\mathbf{g}(X) + \mathbf{p}(X)$$

- El resto $\mathbf{p}(X)$ puede expresarse como

$$\mathbf{p}(X) = p_0 + p_1 X + p_2 X^2 + \cdots + p_{n-k-1} X^{n-k-1}$$

- O, de forma equivalente:

$$\mathbf{p}(X) = X^{n-k}\mathbf{m}(X) \bmod \mathbf{g}(X)$$

- Añadiendo $\mathbf{p}(X)$ a ambos miembros de la expresión de $X^{n-k}\mathbf{m}(X)$ y aplicando la aritmética modular se obtiene:

$$\mathbf{p}(X) + X^{n-k}\mathbf{m}(X) = \mathbf{q}(X)\mathbf{g}(X) + \mathbf{p}(X) + \mathbf{p}(X) = \mathbf{q}(X)\mathbf{g}(X) = \mathbf{U}(X)$$

Códigos Cíclicos

- El primer miembro de la ecuación anterior, es decir:

$$\mathbf{p}(X)+X^{n-k}\mathbf{m}(X)=p_0+p_1X+p_2X^2+\cdots+p_{n-k-1}X^{n-k-1}+m_0X^{n-k}+m_1X^{n-k+1}+m_2X^{n-k+2}+\cdots+m_{k-1}X^{n-1}$$

- representa un código (n, k) válido
- El polinomio de código corresponde al siguiente vector:

$$\mathbf{U}=\underbrace{(p_0,p_1,\ldots,p_{n-k-1}}_{(n-k)\text{ parity bits}},\quad \underbrace{m_0,m_1,\ldots,m_{k-1})}_{k\text{ message bits}}$$

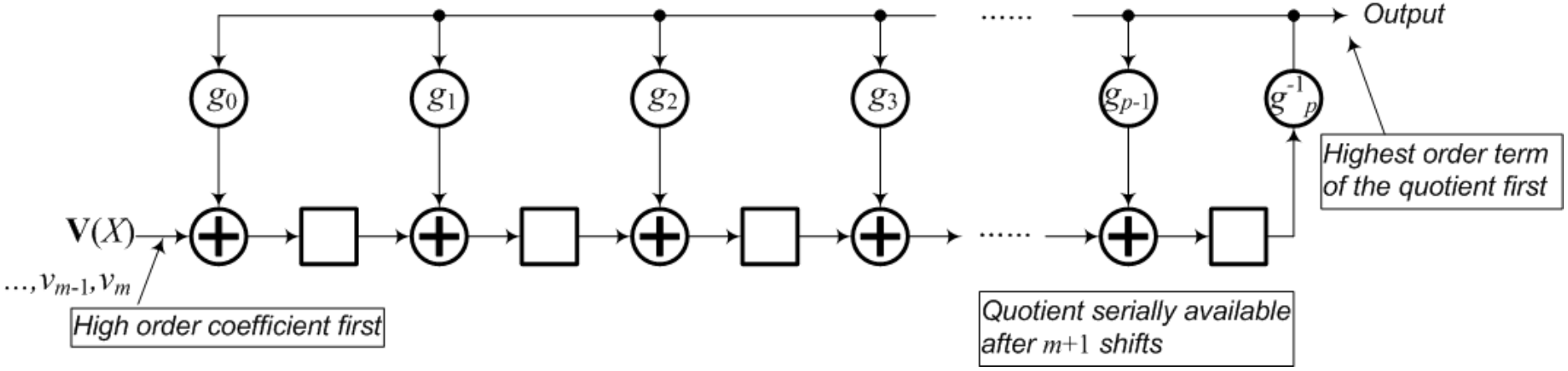
- La codificación implica el desplazamiento y la división de un polinomio; estas operaciones se pueden realizar mediante un LFSR
- Dados dos polinomios $\mathbf{V}(X)$ y $\mathbf{g}(X)$ de grado m y p respectivamente (con $m\geq p$):

$$\mathbf{V}(X)=v_0+v_1X+v_2X^2+\cdots+v_mX^m$$
$$\mathbf{g}(X)=g_0+g_1X+g_2X^2+\cdots+g_pX^p$$

- El LFSR debe realizar la siguiente operación:

$$\frac{\mathbf{V}(X)}{\mathbf{g}(X)}=\mathbf{q}(X)+\frac{\mathbf{p}(X)}{\mathbf{g}(X)}$$

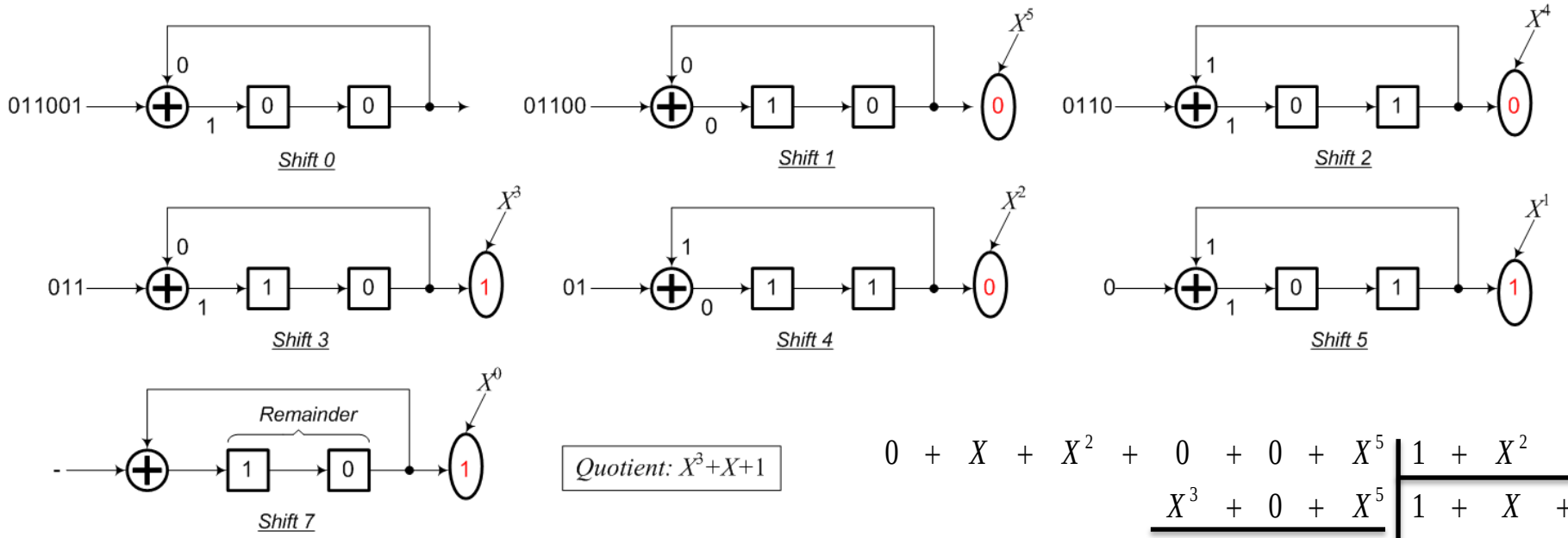
Códigos Cíclicos



Linear Feedback Shift Register (LFSR)

- $\mathbf{V}(X)$ representa el mensaje desplazado hacia la derecha $X^{n-k}\mathbf{m}(X)$
- Al terminar la división el registro de desplazamiento contiene el resto $\mathbf{p}(X)$
- $\mathbf{p}(X)$ representa el vector de bits de paridad que hay que añadir al mensaje para formar el código

Códigos Cíclicos

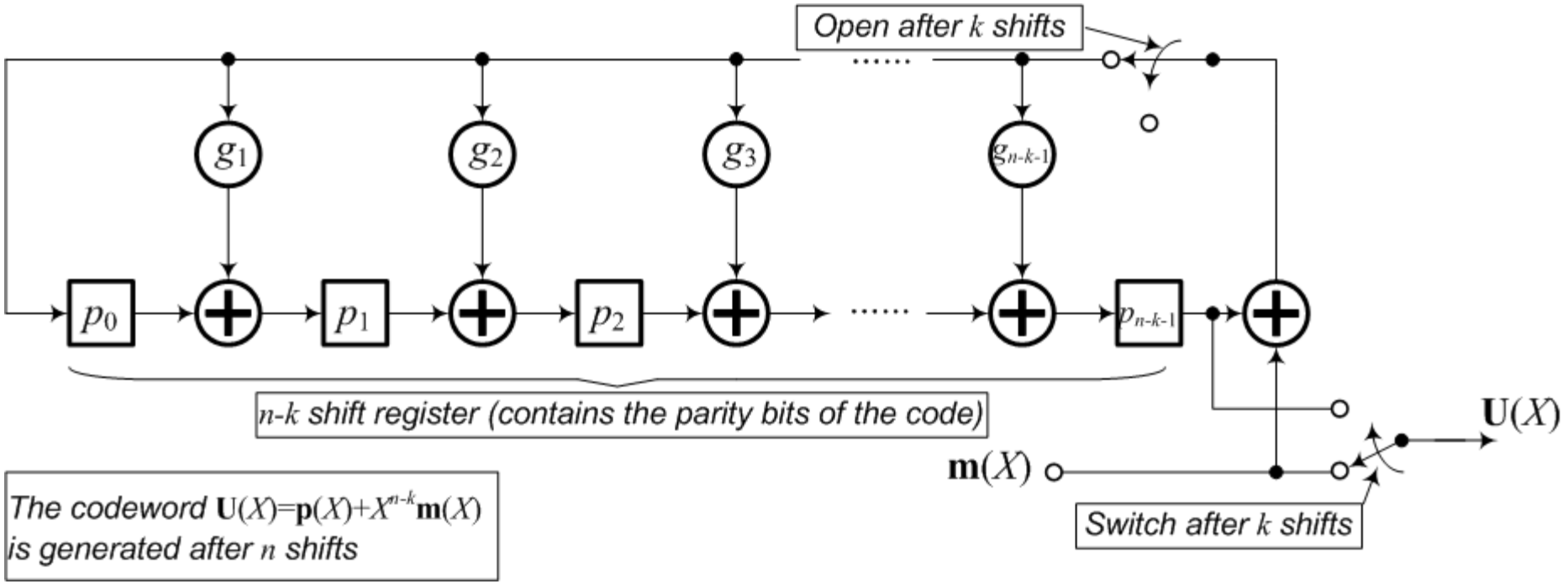


Quotient: X^3+X+1

$$0 + X + X^2 + 0 + 0 + X^5 \;\big|\; 1 + X^2$$
$$X^3 + 0 + X^5 \qquad 1 + X + X^3$$
$$X^3 \qquad //$$
$$X + 0 + X^3$$
$$// \qquad X^2 \qquad //$$
$$1 + 0 + X^2$$
$$1 \qquad //$$

- En cada desplazamiento se calcula un dígito q_j del cociente
- El contenido del registro de desplazamiento contiene el resto parcial de la división (el resto final es su contenido después del último desplazamiento)
- La red de realimentación implementa el divisor $\mathbf{g}(X)$
- El nuevo resto parcial se calcula sustraendo al resto actual $q_j\,\mathbf{g}(X)$
  - Recuerde que en una aritmética modular suma y resta son idénticas

Códigos Cíclicos



- En un LFSR de n-k bits convencional el primer dígito válido es disponible en la salida después de n-k+1 desplazamientos. Por ello, para reducir el número total de desplazamientos, $\mathbf{m}(X)$ se introduce en la etapa de salida
- Para asegurar que el término que entra en la primera etapa del LFSR sea la suma de la entrada y de la salida más significativa del LFSR, el polinomio generador $\mathbf{g}(X)$ debe ser del tipo:

$$\mathbf{g}(X)=1+g_1X+g_2X^2+\cdots+g_{n-k-1}X^{n-k-1}+X^{n-k}$$

Códigos Cíclicos

- El código transmitido $\mathbf{U}(X)$ puede estar corrompido por ruido por lo que el vector recibido $\mathbf{Z}(X)$ es una versión corrupta del vector transmitido
- $\mathbf{U}(X)$ es un polinomio de código por lo que es un múltiplo del polinomio generador $\mathbf{g}(X)$, es decir:

$$\mathbf{U}(X)=\mathbf{m}(X)\mathbf{g}(X)$$

- Por otro lado $\mathbf{Z}(X)=\mathbf{U}(X)+\mathbf{e}(X)$ es una versión de $\mathbf{U}(X)$ corrompida por un vector de error con representado por el polinomio $\mathbf{e}(X)$, es decir:
- El decodificador comprueba si $\mathbf{Z}(X)$ es un código válido, es decir, si es perfectamente divisible (con resto nulo) por $\mathbf{g}(X)$
- Esta operación equivale a calcular el síndrome $\mathbf{S}(X)$ del polinomio recibido:

$$\mathbf{Z}(X)=\mathbf{q}(X)\mathbf{g}(X)+\mathbf{S}(X)$$

- El síndrome es un polinomio de grado menor o igual a n-k-1 y puede calcularse con un LFSR
- Combinando las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\mathbf{e}(X)=[\mathbf{m}(X)+\mathbf{q}(X)]\mathbf{g}(X)+\mathbf{S}(X)$$

- Por tanto el síndrome obtenido dividiendo $\mathbf{e}(X)$ por $\mathbf{g}(X)$ es el mismo del obtenido dividiendo $\mathbf{Z}(X)$ por $\mathbf{g}(X)$, por tanto el síndrome contiene la información para corregir el error

Códigos de Hamming

- Los *códigos de Hamming* son una clase muy sencilla de códigos de bloque (pertenecen a la clase de códigos perfectos) caracterizados por $(n, k)=(2^m-1, 2^m-1-m)$ con $m=2,3,\ldots$
- Estos códigos tienen una distancia mínima igual a 3 por los que sólo pueden corregir errores sencillos o detectar hasta errores dobles
- El síndrome de un código de Hamming es la codificación binaria de la posición del bit erróneo en el vector recibido
- Asumiendo un decodificador con decisión firme la probabilidad de error de bit P_B de un código de Hamming es:

$$P_B \approx p - p(1-p)^{n-1}$$

- Donde p es la probabilidad de transición en un canal binario simétrico
- La relación E_c/N_0 entre energía de símbolo codificado y ruido para una señal BPSK demodulada coherentemente en un canal Gaussiano es:

$$\frac{E_c}{N_0} = \frac{2^m-1-m}{2^m-1}\frac{E_b}{N_0}$$

- Es posible generalizar los códigos de Hamming para corregir también errores múltiples
  - Esta familia de códigos se denomina BCH (de Bose, Chaduri y Hocquenghem)
  - Se trata de códigos cíclicos que permiten manejar una gran variedad de longitud de bloques, relaciones de códigos (*code rate*), tamaños de alfabetos y capacidades de corrección de error