Lección 11: Codificación de Canal. Parte I

Gianluca Cornetta, Ph.D.
Dep. de Ingeniería de Sistemas de Información y Telecomunicación
Universidad San Pablo-CEU

Contenido

- Codificación de Forma de Onda y Secuencias Estructuradas
- Tipos de Control de Error
- Secuencias Estructuradas

Codificación de Forma de Onda y Secuencias Estructuradas

- La codificación de canal se refiere a una clase de técnicas de procesado de la señal que permiten mejorar las prestaciones de un sistema de comunicación proporcionándole una mejor tolerancia a las no idealidades, a las interferencias y al ruido
- La codificación de canal puede dividirse en dos grandes áreas:
  - *Codificación de forma de onda* (o diseño de la señal)
  - *Secuencias estructuradas* (o redundancia estructurada)
- La codificación de forma de onda transforma las señales para optimizar el proceso de detección minimizando la probabilidad de error
- Las secuencias estructuradas transforman las secuencias de datos añadiendo bits de redundancia que permiten realizar detección y corrección de errores

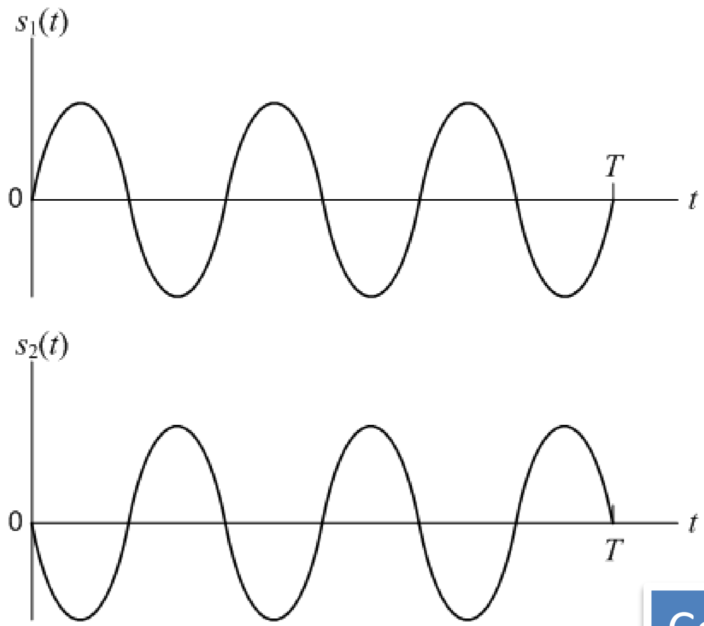
Codificación de Forma de Onda y Secuencias Estructuradas

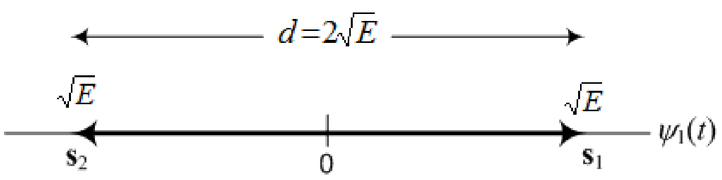
<u>*Analytic representation*</u> | <u>*Waveform representation*</u> | <u>*Vector representation*</u>

$$s_1(t) = \sin \omega_0 t$$

$$s_2(t) = -s_1(t) = -\sin \omega_0 t$$

$$0 \leq t \leq T$$





Conjunto de señales antipodales

Codificación de Forma de Onda y Secuencias Estructuradas

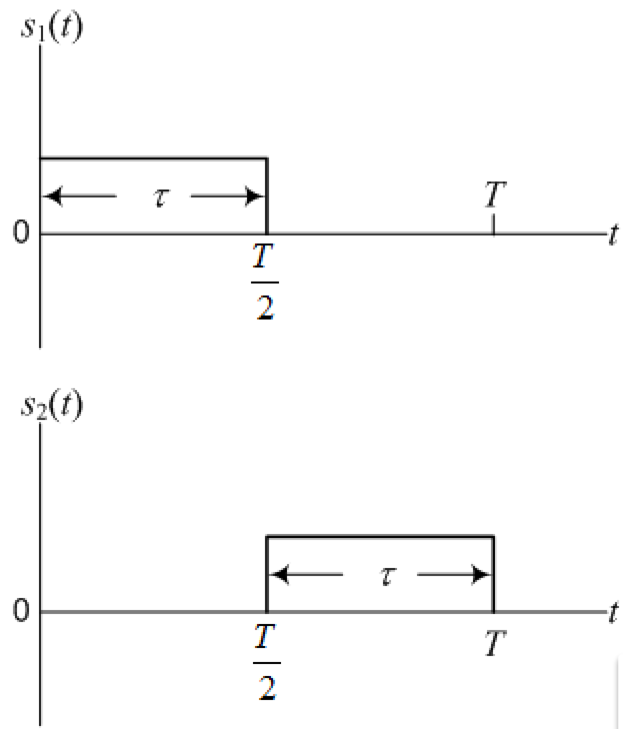
Analytic representation

$s_1(t) = p(t)$

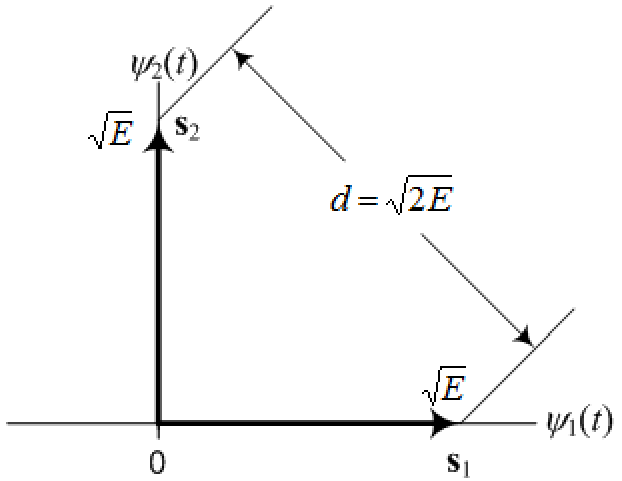
$s_2(t) = p\left(t - \frac{T}{2}\right)$

$0 \le t \le T$

Waveform representation



Vector representation



Conjunto de señales ortogonales

- En general, un conjunto de señales de igual energía $s_i(t)$, con $i = 1, 2 \ldots M$, constituye un conjunto ortonormal (ortogonal y normalizado a la unidad) si y sólo si:

$$\boxed{z_{ij} = \frac{1}{E}\int_0^T s_i(t)s_j(t)dt = \begin{cases} 1 & \text{for } i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}}$$

- Donde z_{ij} es el <u>coeficiente de intercorrelación</u> (*cross-correlation coefficient*) y E la energía de la señal expresada como:

$$\boxed{E = \int_0^T s_i^2(t)dt}$$

- Las señales de un conjunto ortogonal no pueden interferir entre ellas y su producto escalar es nulo, por tanto <u>cada vector del repertorio de señales tiene proyección nula sobre toda las otras</u>

Codificación de Forma de Onda y Secuencias Estructuradas

- Un esquema de transmisión M-ario en el que el transmisor acepta k bits a la vez y asocia a la secuencia una de las $M=2^k$ posibles formas de onda puede considerarse como un tipo de codificación de onda en el que cada forma de onda contiene k de información
- *Un esquema de transmisión ortogonal* (por ejemplo MFSK) se caracteriza por una mejora de tasa de error P_B o una reducción del E_b/N_0 requerido al aumentar de k en detrimento de la eficiencia espectral (es decir, una codificación M-aria expande del ancho de banda de la señal)
- *Un esquema de transmisión no ortogonal* (por ejemplo MPSK) se caracteriza por una gran eficiencia espectral (es decir, ocupación de banda reducida) en detrimento de la tasa de error y del E_b/N_0 requerido

Codificación de Forma de Onda y Secuencias Estructuradas

- La codificación de forma de onda es un procedimiento que transforma un conjunto de forma de onda en uno mejorado que proporciona una P_B mejor respecto al conjunto original
- La transformación debe generar un repertorio de señales muy poco parecidos entre ellos, es decir, con un coeficiente de intercorrelación z_{ij} lo más pequeño posible
- Desde el punto de vista geométrico esto equivale a hacer que la distancia entre los vectores que representan los varios símbolos sea la más grande posible
- El valor más pequeño de z_{ij} es z_{ij}=-1 y corresponde a la máxima distancia entre vectores; no obstante, este valor sólo se alcanza para esquemas binarios (M=2) y antipodales
- En general es posible implementar un esquema codificado en los que todos los coeficientes z_{ij} son iguales a 0. Un conjunto con estas características se denomina ortogonal (la distancia entre vectores es inferior respecto a la de un esquema antipodal)
- La intercorrelación entre señales representa pues una medida de la distancia entre los vectores de se señal

Codificación de Forma de Onda y Secuencias Estructuradas

- Cada forma de onda del conjunto $\{s_i(t)\}$ puede ser formada por una secuencia de pulsos
- A cada pulso se le asigna un nivel $+1$ o -1 que representa un dígito binario 1 o 0
- Cuando un conjunto se representa de esta forma, es posible afirmar que $\{s_i(t)\}$ representa un conjunto ortogonal si y sólo si:

$$z_{ij} = \frac{\text{number of digit agreements} - \text{number of digit disagreements}}{\text{total number of digits in the sequence}}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{for } i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Codificación de Forma de Onda y Secuencias Estructuradas

1-bit

$$\begin{array}{c} 0 \\ \hline 1 \end{array} \qquad \mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2-bit

$$\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} \qquad \mathbf{H}_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_1 & \overline{\mathbf{H}_1} \end{bmatrix}$$

Data set   *Orthogonal codeword set*

3-bit

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad \mathbf{H}_3 = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{H}_2 & \overline{\mathbf{H}_2} \end{bmatrix}$$

Codificación de Forma de Onda y Secuencias Estructuradas

- En general es posible construir un conjunto de códigos $\mathbf{H}_k$ de dimensión $2^k \times 2^k$ llamada *matriz de Hadamard* para un data set de k bits a partir de la matriz $\mathbf{H}_{k\text{-}1}$

$$\boxed{\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{k-1} & \mathbf{H}_{k-1} \\ \mathbf{H}_{k-1} & \overline{\mathbf{H}}_{k-1} \end{bmatrix}}$$

- Cada par de palabras en cada conjunto de códigos $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$, $\mathbf{H}_3$, …, $\mathbf{H}_k$ … se caracteriza por tener el mismo número de dígitos concordantes y discordantes
- Por consiguiente $z_{ij} = 0 \ \forall \ i \neq j$ y cada uno de los conjuntos es ortogonal
- <u>Una codificación ortogonal M-aria combinada con una detección coherente, produce exactamente la misma mejora de P_B que un esquema de transmisión M-ario con un formato de modulación ortogonal (por ejemplo MFSK)</u>

Codificación de Forma de Onda y Secuencias Estructuradas

- Para señales ortogonales equiprobables y de igual energía, la probabilidad de error P_E de una secuencia codificada (símbolo) es limitada superiormente por:

$$\boxed{P_E(M) \le (M-1) Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)}$$

- $E_s = kE_b$ es la energía de una palabra de código de k bits
- Para determinar la probabilidad de error de bit P_B, hay que tener en cuenta la relación entre P_B y P_E :

$$\boxed{\frac{P_B(k)}{P_E(k)} = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} \quad \text{or} \quad \frac{P_B(M)}{P_E(M)} = \frac{M/2}{(M-1)}}$$

- Por consiguiente la probabilidad de error de bit P_B es limitada superiormente por:

$$\boxed{P_B(k) \le 2^{k-1} Q\left(\sqrt{\frac{kE_b}{N_0}}\right) \quad \text{or} \quad P_B(M) \le \frac{M}{2} Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)}$$

Codificación de Forma de Onda y Secuencias Estructuradas

- *Un conjunto biortogonal* de M señales puede ser obtenido a partir de un conjunto de $M/2$ señales ortogonales de la siguiente forma:

$$\boxed{\mathbf{B}_k = \left[\begin{array}{c}\mathbf{H}_{k-1} \\ \hline \overline{\mathbf{H}}_{k-1}\end{array}\right]}$$

- Un código biortogonal, por tanto, está formado por dos conjuntos de códigos ortogonales de manera que *a cada palabra de código de un conjunto le corresponde una palabra de código antipodal en el otro conjunto*
- Por ejemplo el código correspondiente a un data set de 3 bit es:

Data set

$$\begin{array}{ccc}
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 \\
\hdashline
1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1
\end{array}$$

Biorthogonal codeword set

$$\mathbf{B}_3 = \left[\begin{array}{cccc}
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 \\
\hdashline
1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathbf{H}_2 \\ \hline \overline{\mathbf{H}}_2\end{array}\right]$$

Codificación de Forma de Onda y Secuencias Estructuradas

Los códigos biortogonales se caracterizan por tener:

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{for } i = j \\ -1 & \text{for } i \neq j, |i-j| = \dfrac{M}{2} \\ 0 & \text{for } i \neq j, |i-j| \neq \dfrac{M}{2} \end{cases}$$

- Unas claras ventaja de esta clase de códigos con respecto a un código biortogonal son:
  - <u>*Un número menor de bits de codificación*</u> ($M/2$ en vez de M) que conlleva a un ancho de banda menor
  - <u>*Unas prestaciones mejores en términos de tasa de error*</u> (la distancia entre códigos es más elevada)
- Para señales biortogonales equiprobables y de igual energía, la probabilidad de error P_E de una secuencia codificada (símbolo) es limitada superiormente por:

$$P_E(M) \leq (M-2)Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)$$

- $P_B(M)$ es una función compleja de $P_E(M)$ que puede aproximarse con:

$$P_B(M) \approx \frac{P_E(M)}{2} \leq \frac{1}{2}\left[(M-2)Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)\right]$$

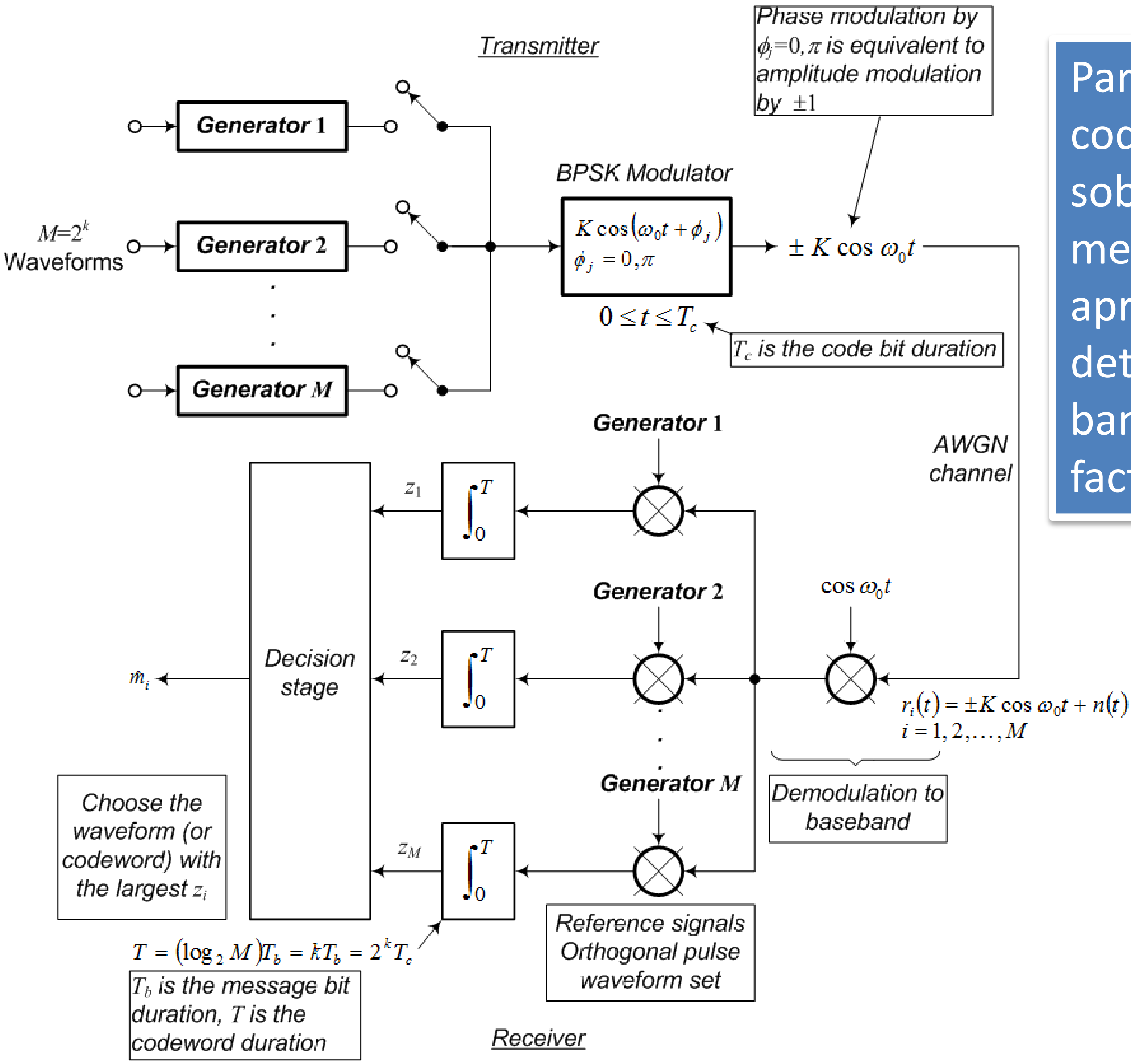
Codificación de Forma de Onda y Secuencias Estructuradas

- Un código generado a partir de un conjunto ortogonal eliminando el primer dígito de cada palabra del conjunto se denomina <u>*transortogonal o simplex*</u> y es caracterizado por:

$$\boxed{z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{for } i = j \\ \dfrac{-1}{M-1} & \text{for } i \neq j \end{cases}}$$

- Respecto a los códigos anteriores, un código transortogonal requiere el mínimo E_b/N_0 para una tasa de símbolo fijada
- Para M grande, las prestaciones en términos de error de los tres tipos de código es esencialmente la misma
- Un código biortogonal requiere la mitad del ancho de banda de los otros dos…
  - …no obstante, para todos los códigos los requerimientos de banda y la complejidad del sistema aumentan exponencialmente al aumentar de M por tanto estos esquemas son atractivos sólo cuando es disponible un elevado ancho de banda

Codificación de Forma de Onda y Secuencias Estructuradas

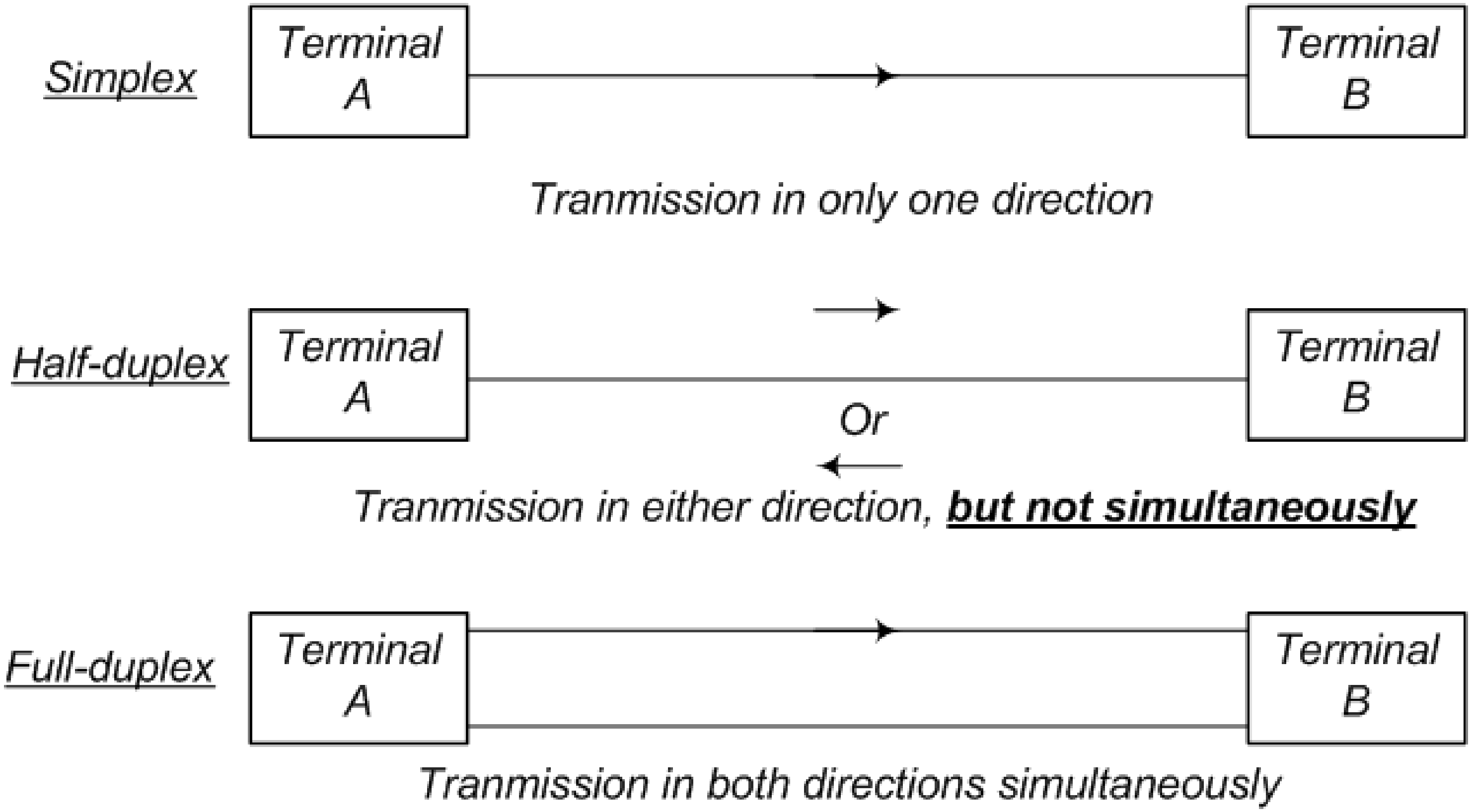


Para una P_B dada, una codificación ortogonal sobre k bits lleva a una mejora de E_b/N_0 de aproximadamente 3 dB en detrimento del ancho de banda que aumenta de un factor M/k

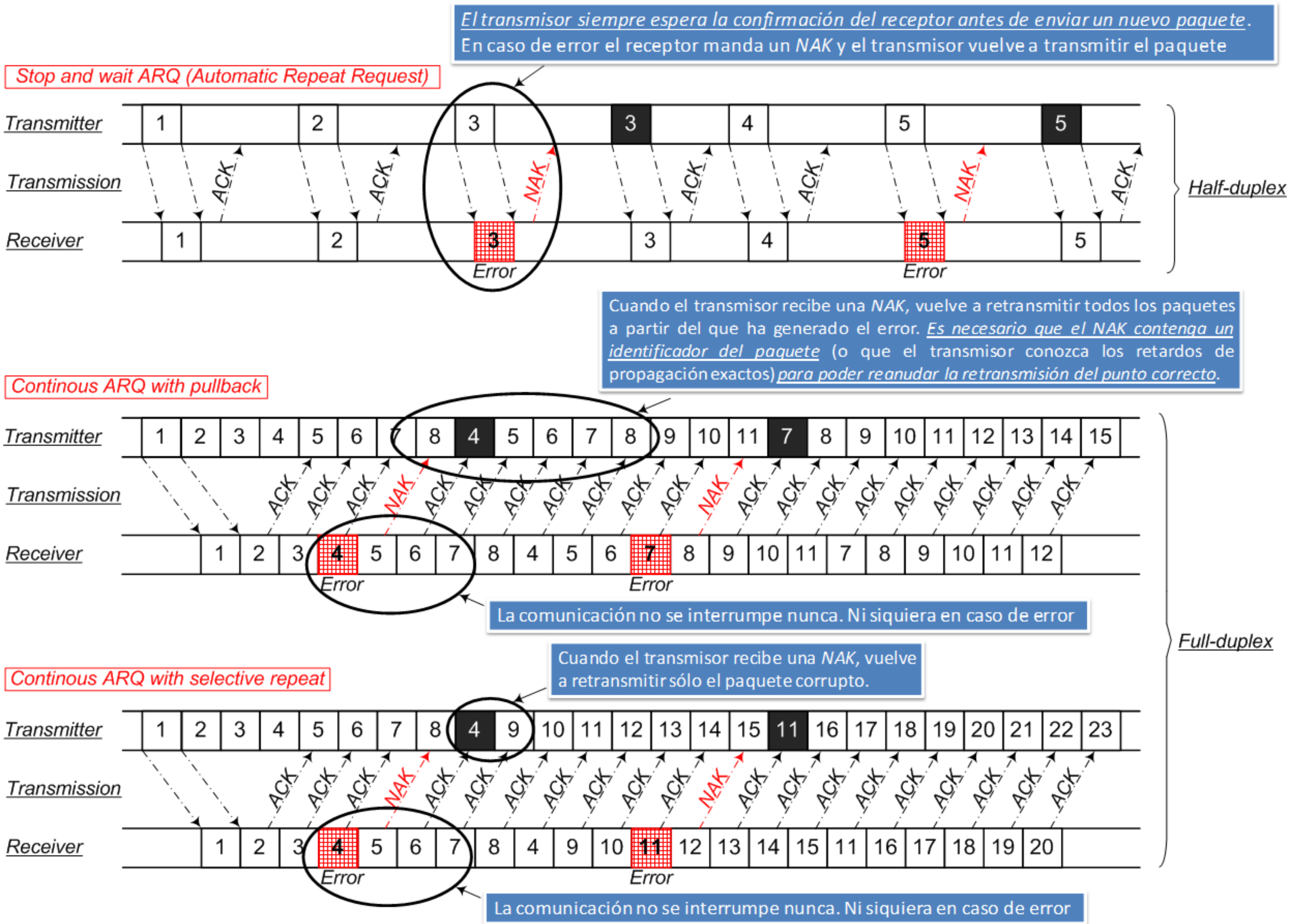
Tipos de Control de Error

- Existen códigos diseñados específicamente para el control de error
- Existen dos políticas de gestión de errores, ambas basadas en unos bits de paridad añadidos al mensaje:
  - Detección de error y retransmisión (*error detection and retransmission*): el receptor del mensaje detecta un error pero no intenta corregirlo sino que pide una retransmisión
  - Corrección de error sin canal de retorno (*Forward Error Correction* –FEC): los bits de paridad están diseñados para la detección y corrección de errores, por lo que el sistema requiere sólo una conexión de tipo *simplex*

Tipos de Control de Error



Tipos de Control de Error



Tipos de Control de Error

- Las técnicas ARQ (*Automatic Repeat Request* o *Automatic Retransmission Query*) se utilizan para implementar mecanismos de alerta en sistemas que soportan sólo la detección de errores
- La elección del protocolo ARQ más adecuado depende de las restricciones de utilización y de los recursos hardware disponibles
  - La conectividad *half-duplex* es más sencilla y barata de implementar de una de tipo *full-duplex*, pero también es mucho menos eficiente
- La ventaja principal del ARQ respecto a la corrección de error sin canal de retorno (*Forward Error Correction* –FEC) es un hardware de detección más sencillo y menos redundancia
- ARQ es también una técnica adaptativa en el sentido que la información es retransmitida sólo cuando se detecta un error
- Por otro lado el FEC es una buena alternativa (o una técnica complementaria) a la ARQ cuando:
  - No es disponible un canal de retorno o la ARQ tiene un retardo excesivo
  - La estrategia de retransmisión tiene una implementación ineficiente
  - El número esperado de errores (sin corrección) requiere un número muy elevado de retransmisiones

Secuencias Estructuradas

- Los <u>códigos con control de paridad</u> (*parity check codes*) se conocen también como secuencias estructuradas porque representan un método para <u>insertar una redundancia estructurada en una fuente de datos</u>
- Los bits de redundancia se utilizan para detectar y corregir errores
- Existen distintas categorías de códigos estructurados, pero en este curso sólo se tratarán los <u>*códigos de bloque*</u>

Secuencias Estructuradas

- Un <u>canal discreto sin memoria</u> (*Discrete Memoryless Channel* –DMC) es caracterizado por:
  - Un alfabeto de entrada discreto
  - Un alfabeto de salida discreto
  - Un conjunto de probabilidades condicionadas $P(j|i)$. j (con $1 \leq j \leq Q$) representa el símbolo recibido e i (con $1 \leq i \leq M$) representa el símbolo transmitido
- $P(j|i)$ representa pues la probabilidad de recibir j habiendo transmitido i
- En un canal sin memoria cada símbolo de salida depende sólo del símbolo de entrada correspondiente, por tanto, dada una secuencia de entrada $\mathbf{U}=u_1,u_2,\ldots,u_N$, la probabilidad condicionada de la secuencia de salida $\mathbf{Z}=z_1,z_2,\ldots,z_N$ resulta:

$$\boxed{P(\mathbf{Z} \mid \mathbf{U}) = \prod_{m=1}^{N} P(z_m \mid u_m)}$$

- Es decir, <u>el ruido afecta a cada símbolo de forma independiente</u>

Secuencias Estructuradas

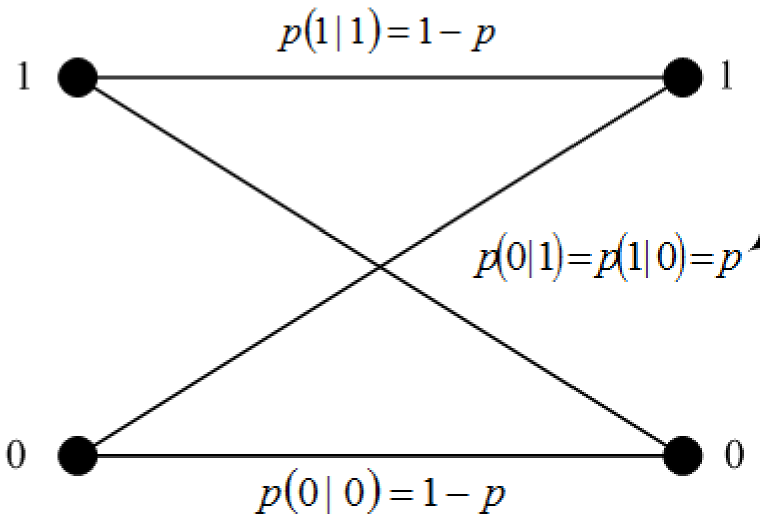
- En un canal discreto con memoria (*Bursty Bit Error*) el ruido se manifiesta como ráfagas de bits incorrectos
- Este comportamiento se modela mediante cadenas de Markov (modelo de Gilbert-Elliot) y se expresa como la probabilidad conjunta con todos los elementos de una ráfaga:

$$P\left(\underbrace{z_{t+1}=j}_{\text{futuro}} \mid \overbrace{\underbrace{u_t=i}_{\text{presente}}, \underbrace{u_{t-1}=i_{t-1},\ldots}_{\text{pasado}}}^{\text{elementos de la ráfaga}}\right)$$

- Existen dos tipos de canales:
  - Canales binarios simétricos (*binary simmetric channel* –BSC): los alfabetos de entrada y salida son discretos
  - Canales gaussianos: el alfabeto de entrada es discreto, el de salida es continuo (o una versión cuantificada de un alfabeto continuo)

Secuencias Estructuradas

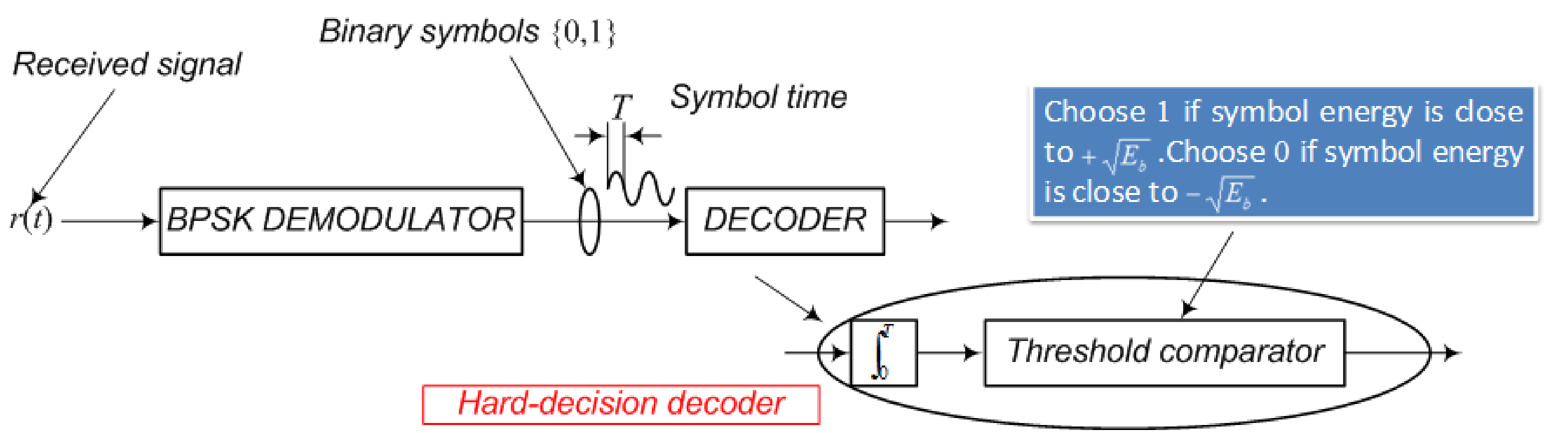
Binary Simmetric Channel (BSC)



$$E_c = E_b$$

$$p = Q\left(\sqrt{\frac{2E_c}{N_0}}\right)$$

En el caso de <u>decodificación por decisión firme</u> (*hard decision*) el demodulador detecta cada bit (símbolo) codificado de manera individual.



Hard-decision decoder

Secuencias Estructuradas

- En el caso de canal Gaussiano, el canal suma ruido a los símbolos
- El ruido en un canal AWGN es de tipo Gaussiano con media nula y varianza σ^2,por tanto el símbolo recibido tendrá una PDF de tipo Gaussiano:

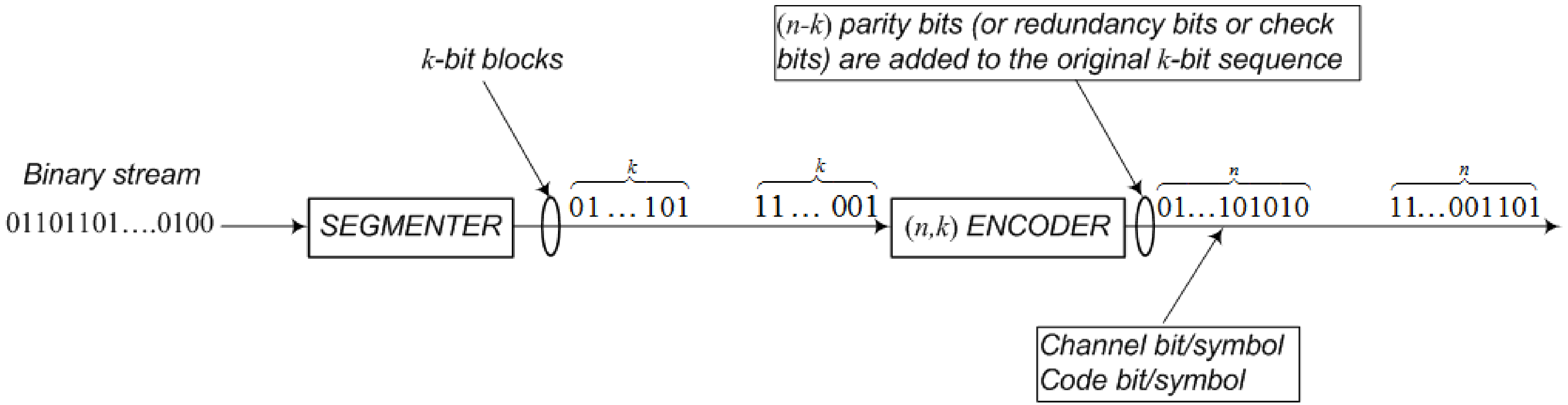
$$\boxed{p(z \mid u_k) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(z-u_k)^2}{2\sigma^2}\right]}$$

- Un canal de tipo Gaussiano suele tener un detector basado en <u>decodificación por decisión programada</u> (*soft decoding*)
  - La entrada del decodificador es un rango de valores incluido entre los que representan el 0 y el 1
  - La información extra indica la fiabilidad del símbolo recibido y se utiliza para mejorar la estimación, por ejemplo:

000 (definitely 0),	001 (probably 0),	010 (maybe 0),	011 (guess 0),
100 (guess 1),	101 (maybe 1),	110 (probably 1) ,	111(definitely 1)

  - Un decodificador por decodificación programada favorece la eficiencia de la estimación en detrimento de la sencillez de implementación
- Un demodulador de este tipo no realiza decisiones firmes por lo que no es posible definir una probabilidad de error. El detector sólo genera una familia de probabilidades condicionada (es decir, las verosimilitudes) para los distintos símbolos del alfabeto
- <u>Los códigos de bloque suelen estar implementados con decodificadores por decisión firme</u>

Secuencias Estructuradas



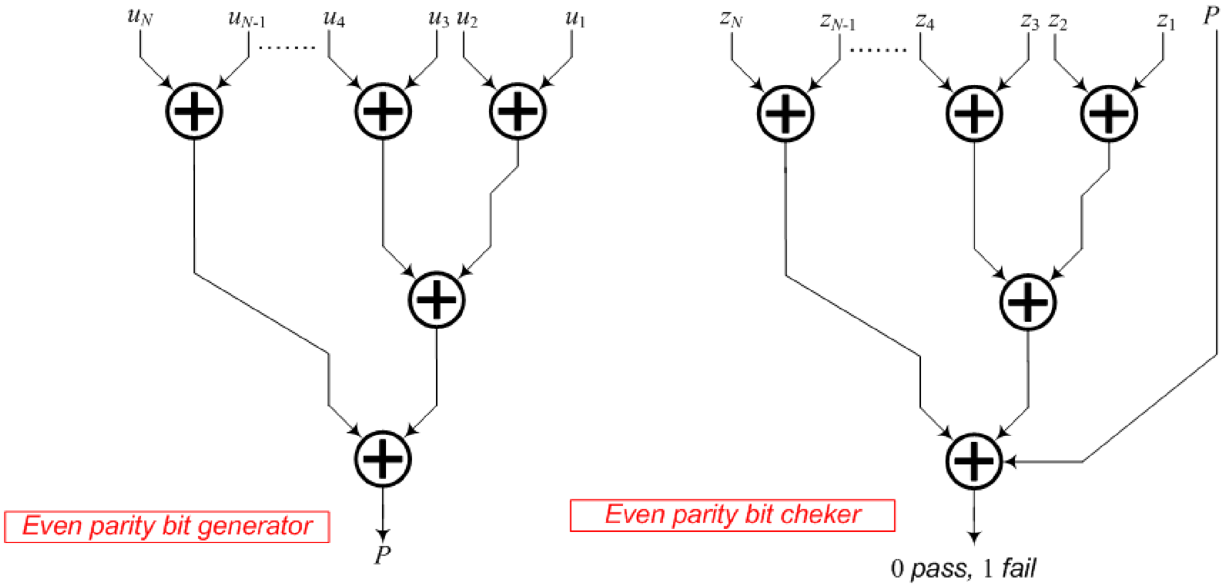
- Se define <u>redundancia de código</u> (*code redundancy*):

$$\boxed{\frac{n-k}{k}}$$

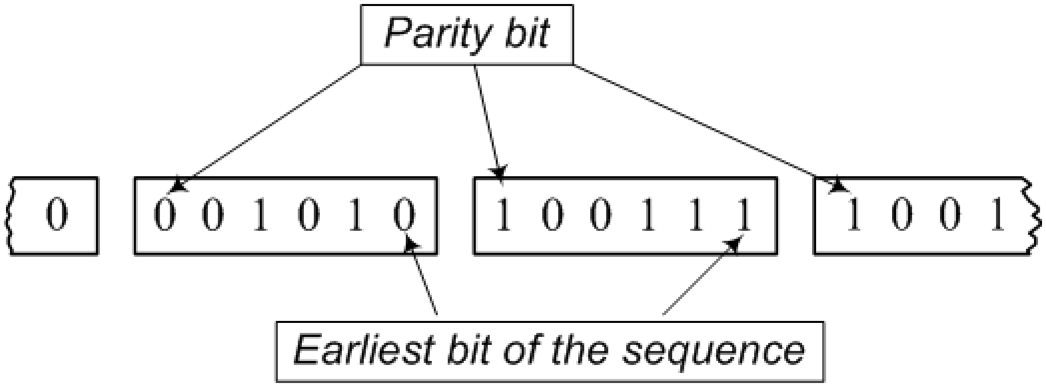
- La <u>relación de código</u> (*code rate*), que representa la porción de código que es efectivamente información, es definida como:

$$\boxed{\frac{k}{n}}$$

Secuencias Estructuradas



La forma más sencilla de detectar un error consiste en añadir un bit de paridad (par o impar) a la secuencia a transmitir. La operación de generación y detección se puede implementar mediante sumas módulo-s (XOR). La relación de código es $k/(k+1)$.



Secuencias Estructuradas

- La probabilidad que j errores puedan ocurrir de forma independiente en un bloque de n símbolos es:

$$P(j,n)=\binom{n}{j}p^{j}(1-p)^{n-j}$$

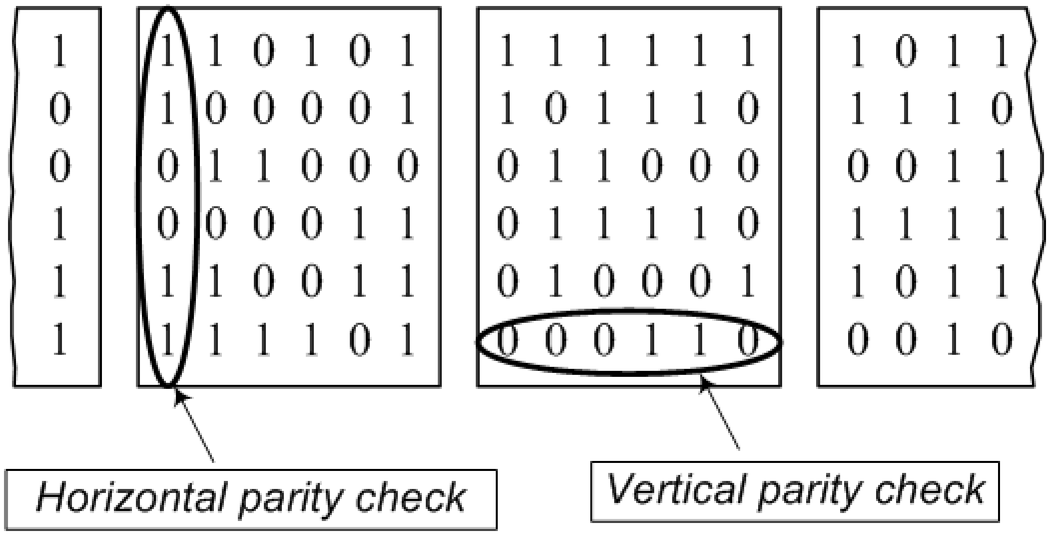
- Donde p es la probabilidad que un símbolo de canal sea erróneo y:

$$\binom{n}{j}=\frac{n!}{j!(n-j)!}$$

- es el número de formas en las que j bits sobre n puedan ser erróneos:
- Un bit de paridad sencillo sólo puede detectar un número impar de errores. Si se invierten un número par de bits el error no se detecta y la probabilidad P_{nd} de error no detectado es:

$$P_{nd}=\sum_{j=1}^{\substack{n/2 \text{ for } n \text{ even} \\ n-1/2 \text{ for } n \text{ odd}}}\binom{n}{2j}p^{2j}(1-p)^{n-2j}$$

Secuencias Estructuradas



Un <u>código rectangular</u> o <u>código producto</u> es una estructura bidimensional $(M+1)\times(N+1)$ obtenida a partir un mensaje de bits de M filas y N columnas añadiendo por cada fila y por cada columna un bit de paridad. Un error sencillo provoca un doble fallo de detección en la fila y la columna correspondientes por lo que *<u>este código identifica unívocamente el error y puede corregirlo</u>*.

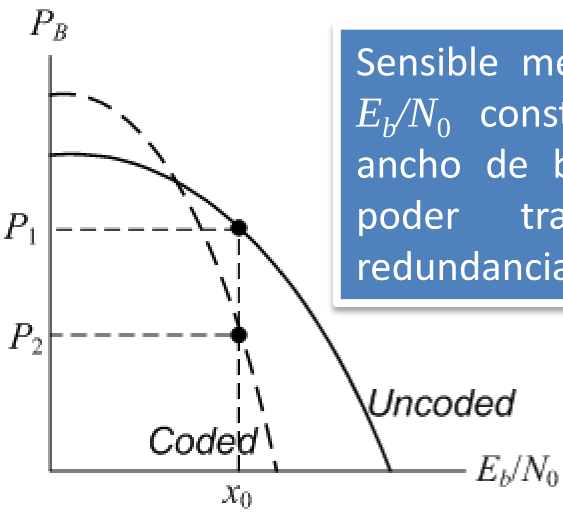
- La relación de código para un código rectangular es:

$$\boxed{\frac{k}{n} = \frac{MN}{(M+1)(N+1)}}$$

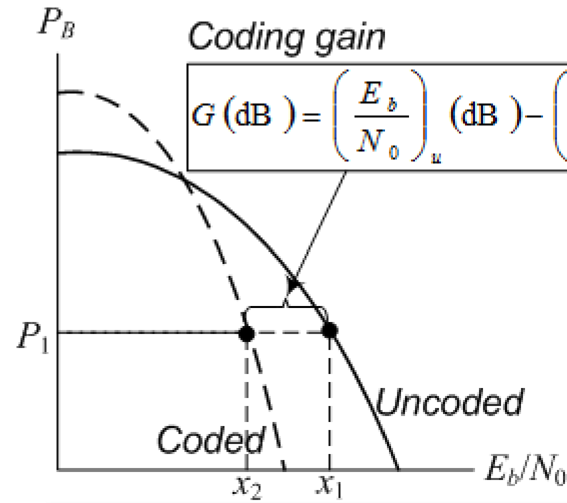
- La probabilidad de error de mensaje para un código que puede corregir un número $m \leq t$ de errores puede calcularse a partir de la probabilidad $P(j,n)$:

$$\boxed{P_M = \sum_{j=t+1}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}}$$

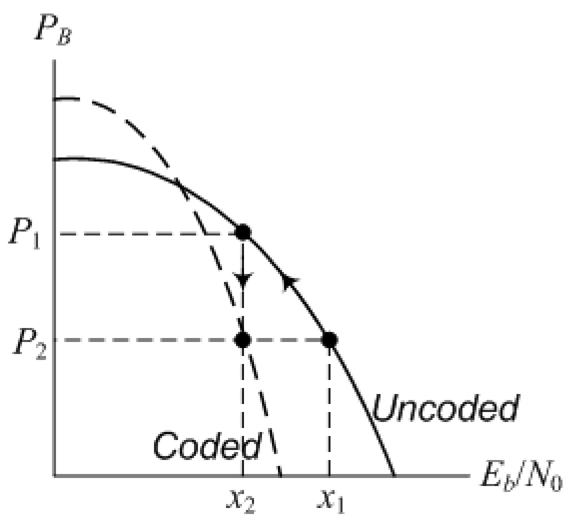
Secuencias Estructuradas



Sensible mejora de P_B manteniendo E_b/N_0 constante en detrimento del ancho de banda que aumenta para poder transmitir los bits de redundancia.



Sensible reducción de E_b/N_0 manteniendo constante P_B en detrimento del ancho de banda que aumenta para poder transmitir los bits de redundancia.

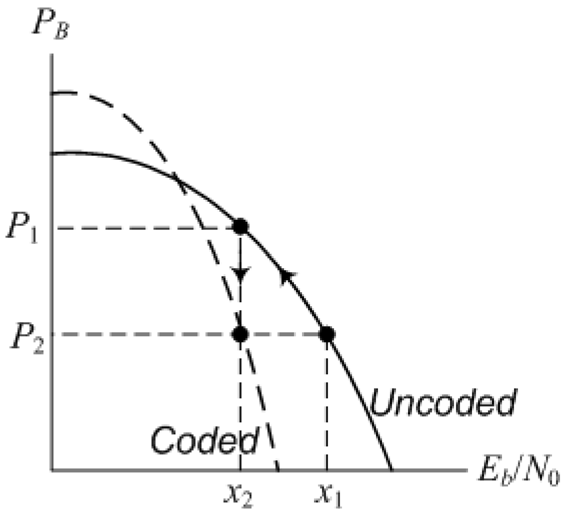


Recuerde que:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{P_r}{N_0}\left(\frac{1}{R}\right)$$

Por tanto si se desea aumentar el data-rat R, E_b/N_0 se reduce y P_B empeora. La codificación permite aumentar R y reducir E_b/N_0 manteniendo P_B constante.

Secuencias Estructuradas



La capacidad máxima de un canal (es decir, el número de usuarios que pueden transmitir a la vez) es inversamente proporcional a E_b/N_0. Reducir E_b/N_0 implica aumentar la capacidad en detrimento de P_B. Utilizar códigos permite aumentar la capacidad manteniendo P_B bajo.

Cuando E_b/N_0 decrece hasta alcanzar un umbral dado en el que la dos curvas se cruzan, el P_B de la curva codificada es peor que el de la curva no codificada. En esta situación la tasa de errores es tan elevada que el código es incapaz de corregirlos, por tanto los bits de redundancia consumen energía pero no aportan ningún beneficio.