Tema 1: Matrices. Sistemas de ecuaciones. Determinantes

José M. Salazar

Septiembre de 2020

Tema 1: Matrices. Sistemas de ecuaciones. Determinantes

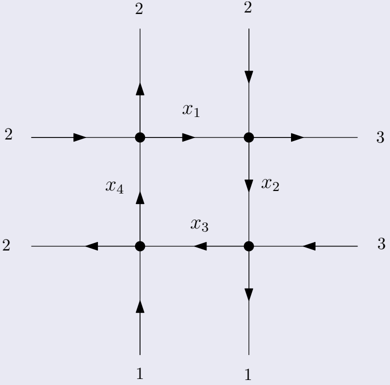
- Lección 1. Matrices. Sistemas de ecuaciones. Determinantes

Índice

Ejemplo

Ejemplo (Redes)

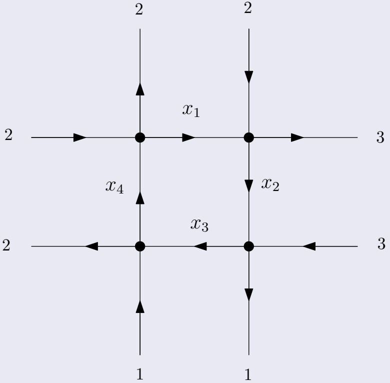
El tráfico de vehículos que entra y sale en la red de la figura cada minuto se reparte del modo en que se detalla:



Se desea conocer la calle con menor flujo de tráfico para realizar en ella unas obras. ¿Qué calle se debe elegir?

Ejemplo

Ejemplo



$x_1 + 2 = x_2 + 3, \quad x_2 + 3 = x_3 + 1,$
$x_3 + 1 = x_4 + 2, \quad x_4 + 2 = x_1 + 2.$
Resolviendo, $x_1 = \lambda$, $x_2 = -1 + \lambda$, $x_3 = 1 + \lambda, x_4 = \lambda$.
Dado que $\lambda \geq 1$ $(0 \leq x_2 = -1 + \lambda)$, x_2 es menor que x_1, x_3 y x_4.

Ecuación lineal

Definición

Una expresión de la forma

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b,$$

con $a_i \in \mathbb{R}$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$, *y* $b \in \mathbb{R}$ *se llama* ecuación lineal *con* n incógnitas *o variables (las* x_i*). Los elementos* a_i *son los* coeficientes *de la ecuación y* b *es el* término independiente.

Definición

Una solución *de una ecuación lineal como la de arriba es una lista* $(s_1, \ldots, s_n)$, *con* $s_i \in \mathbb{R}$ *para todo* i, *tal que al sustituir en los* x_i *de la ecuación, se satisface la igualdad.*

Sistema de ecuaciones lineales

Definición

Una expresión de la forma

$$(I)\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

donde los a_{ij} (coeficientes) y los b_i (términos independientes) son números reales se denomina sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$. *Una* solución *de (I) es una lista de n números reales $(s_1, \ldots, s_n)$ tales que al sustituir por $(x_1, \ldots, x_n)$, se cumplen las igualdades de (I).*

Ecuación matricial

Definición

El sistema (I) se escribe matricialmente como $AX = \bar{b}$ *donde*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

A las matrices A, X *y* $\bar{b}$ *se las llama* matriz de coeficientes, matriz de incógnitas y matriz de términos independientes *de* (I), *respectivamente. A la matriz*

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

se la llama matriz ampliada de coeficientes *de (I).*

Cuerpo

Definición (Cuerpo)

Un conjunto no vacío $\mathbb{K}$ acompañado de dos operaciones internas, $+$ y $\cdot$ (suma y multiplicación):

$$+, \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$

tiene estructura de cuerpo si verifica las propiedades:

1. $(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{K}$
2. $\exists 0 \in \mathbb{K} : \forall x \in \mathbb{K}$ *se verifica* $0 + x = x = x + 0$. *A* 0 *se le llama cero del cuerpo.*
3. $\forall x \in \mathbb{K} \quad \exists y \in \mathbb{K} : x + y = y + x = 0$. *El elemento* y *se llama elemento opuesto de* x *y se denota por* $-x$.
4. $\forall x, y \in \mathbb{K}$ *se tiene* $x + y = y + x$.

Cuerpo

Definición (Cuerpo)

5. $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$ *se tiene* $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
6. $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$ *se tiene* $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.
7. $\forall x, y \in \mathbb{K}$ *se tiene* $x \cdot y = y \cdot x$.
8. $\exists 1 \in \mathbb{K} : \forall x \in \mathbb{K}$ *se tiene* $1 \cdot x = x = x \cdot 1$. *Al elemento* 1 *se le llama uno del cuerpo.*
9. $\forall x \in \mathbb{K}$, $x \neq 0$, $\exists y \in \mathbb{K} : x \cdot y = y \cdot x = 1$. *El elemento* y *es el elemento inverso de* x *denotándose por* x^{-1}.

Ejemplos

Ejemplos habituales de cuerpos que se utilizan son $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *y* $\mathbb{C}$. *Nosotros trabajaremos casi exclusivamente con* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Definición de matriz y tipos

Definición (Matriz)

Llamamos matriz de orden $m \times n$ *sobre un cuerpo* $\mathbb{K}$ *a una tabla con m filas y n columnas integrada por elementos de* $\mathbb{K}$*:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Escribiremos $A = (a_{i,j})$*. Al conjunto de las matrices sobre* $\mathbb{K}$ *de orden* $m \times n$ *lo denotamos por* $M_{m\times n}(\mathbb{K})$*. Una* submatriz *de A es una matriz obtenida de eliminar filas o columnas (o ambas) de A. La* diagonal principal *de A está constituida por los elementos* a_{ii}*.*

Tipos de matrices

Definición (Tipos de matrices)

- *Matriz fila*: $m = 1$. *Matriz columna*: $n = 1$.
- *Matriz cuadrada*: $m = n$. Se denota $A \in M_n(\mathbb{K})$.
- *Matriz triangular superior*: A cuadrada y $a_{ij} = 0 \ \forall i > j$. *Matriz triangular inferior*: A cuadrada y $a_{ij} = 0 \ \forall i < j$.
- *Matriz diagonal*: $A \in M_n(\mathbb{K})$ y $a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$.
- *Matriz identidad*: $A \in M_n(\mathbb{K})$ diagonal con $a_{ii} = 1 \ \forall i$. Se denota por I_n.
- *Matriz nula*: $a_{ij} = 0 \ \forall i, j$. Se escribe $A = \bar{0}$
- *Matriz traspuesta*: Si $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, la traspuesta de A es $A^t = (a_{ji}) \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$.
- *Matriz simétrica*: $A = A^t$.
- *Matriz antisimétrica*: $A = -A^t$.

Operaciones con matrices

Definición (Suma y producto por escalar)

Dadas $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, *se define:*

- *Suma de A y B*: $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$.
- *Producto por un escalar*: *dado* $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda A = (\lambda a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$

Definición (Producto de matrices)

Dadas $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ *y* $B = (b_{ij}) \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$, *se define el producto de A por B como* $C = (c_{ij}) \in M_{m\times p}(\mathbb{K})$ *donde*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Escribimos $C = AB$.

Propiedades de la suma y el producto por un escalar

Propiedades (Suma y producto por escalar)

Dadas A, B, C matrices de tamaños adecuados para llevar a cabo las operaciones correspondientes y dados $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

- $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- $A + \bar{0} = \bar{0} + A$ *con* $\bar{0}$ *la matriz nula.*
- $A + (-A) = (-A) + A = \bar{0}$.
- $A + B = B + A$.
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.
- $1A = A$.

Propiedades del producto

Propiedades (Producto)

Dadas A, B, C matrices de los tamaños adecuados:

- $A(BC) = (AB)C$.
- $AI_n = I_nA = A$ con $A \in M_n(\mathbb{K})$.
- $A(B + C) = AB + AC$.

Definición (Matriz inversa)

La matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ es invertible si existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $AB = BA = I_n$. La matriz B es inversa *de A y se denota por A^{-1}.*

Propiedades de la inversa y la traspuesta

Propiedades (Propiedades de la inversa y la traspuesta)

- *Si A es invertible, la inversa es única e invertible con $(A^{-1})^{-1} = A$.*
- *Si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ son invertibles, AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*
- *Si A es invertible, A^t es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.*
- $(A^t)^t = A$.
- $(\lambda A)^t = \lambda A^t$.
- $(A + B)^t = A^t + B^t$.
- $(AB)^t = B^t A^t$.

Definición

$A \in M_n(\mathbb{K})$ *es* ortogonal *si* $AA^t = I_n$, *esto es, si* $A^t = A^{-1}$.

Matrices escalonadas

Definición

Una matriz es escalonada *si:*

1. *Todas las filas nulas, si las hay, están en la parte inferior de la matriz.*
2. *El número de ceros al comienzo de una fila no nula es estrictamente menor que el número de ceros al comienzo de la fila inferior.*

El primer elemento no nulo de cada fila, en caso de tenerlo, se llama cabecera *de la fila.*

Matrices escalonadas

Definición

Si la matriz escalonada cumple, además:

3. *Todas las cabeceras de filas son unos.*
4. *En las columnas en las que están las cabeceras de las filas, todos los demás elementos son nulos,*

entonces se dice que es escalonada reducida.

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Operaciones elementales

Definición

Dada una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, llamamos operaciones elementales *sobre las filas de A a las siguientes manipulaciones:*

- *Intercambiar la posición de dos filas.*
- *Sustituir la fila i-ésima por k veces ella más k' veces la j-ésima, con $k \neq 0$.*

Observación

Toda matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ se puede transformar en escalonada E o en una escalonada reducida R efectuando operaciones elementales sobre sus filas. La matriz E no es única, mientras R sí lo es.

Algoritmo para escalonar matrices

Procedimiento (Obtención de matriz escalonada)

Dada una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, reduzcámosla mediante operaciones elementales sobre las filas a forma escalonada y a forma escalonada reducida.

1. *Si A^{j_1} es la primera columna de A con una entrada no nula, intercambiamos, si es necesario, filas para que $a_{1j_1} \neq 0$.*
2. *Utilizamos a_{1j_1} como pivote para obtener ceros bajo él.*
3. *Se repiten los pasos 1 y 2 con la submatriz obtenida de quitar la primera fila.*
4. *Se repite el proceso hasta que la matriz queda en la forma escalonada E.*

Algoritmo para escalonar matrices

Procedimiento (Obtención de matriz escalonada reducida)

Si, además, buscamos obtener la matriz escalonada reducida, continuamos con los pasos siguientes:

5. *Se multiplica la última fila no nula A_r (con cabecera a_{rj_r}) por $1/a_{rj_r}$ de forma que la cabecera se convierta en 1.*
6. *Se utiliza $a_{rj_r} = 1$ como pivote para obtener ceros sobre él.*
7. *Se repiten los pasos 5 y 6 para las filas $A_{r-1}, A_{r-2}, \ldots, A_2$.*
8. *Se multiplica A_1 por $1/a_{1j_1}$ (a_{1j_1} es la cabecera de la fila A_1). Así se obtiene la matriz escalonada reducida R.*

Tipos de sistemas lineales

Definición

Decimos que $AX = \bar{b}$ es compatible determinado si tiene una única solución, compatible indeterminado si tiene más de una, e incompatible si no tiene ninguna.
Discutir un sistema $AX = \bar{b}$ consiste en determinar a cuál de los tipos mencionados pertenece.

Definición

Un sistema es homogéneo si $\bar{b} = \bar{0}$. Lo denotaremos por $AX = \bar{0}$.
Si $\bar{b} \neq \bar{0}$, el sistema se dice no homogéneo.

Observación

Todo sistema homogéneo es compatible (siempre existe la solución trivial $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$).

Sistemas equivalentes

Definición

Dos sistemas de ecuaciones lineales se dicen equivalentes *si tienen las mismas soluciones.*

Observación

Dado $(I)\ AX = \bar{b}$, *si* $\bar{A}'$ *se obtiene de* $\bar{A}$ *mediante operaciones elementales sobre sus filas,* $\bar{A} \to \bar{A}'$, *entonces el sistema* (II) *asociado a* $\bar{A}'$ *es equivalente a* (I).

Métodos de resolución de Gauss y Gauss-Jordan

Procedimiento (Métodos de resolución de Gauss y Gauss-Jordan)

Para resolver $(I)\ AX = \bar{b}$ *se siguen los siguientes pasos:*

- *Se escalona* $\bar{A} \to \bar{E}$ *mediante operaciones elementales en filas.*
- *Se resuelve el sistema* (II) *asociado a* $\bar{E}$*, al que llamamos* sistema escalonado*, y que es equivalente a* (I)*. Se procede así:*
  - *Llamamos incógnitas principales a las asociadas a las cabeceras de* $\bar{E}$ *y parámetros al resto.*
  - *Se despejan las incógnitas principales en función de los parámetros empezando por la última ecuación y siguiendo el proceso de susittución hacia arriba.*

  Éste es el método de eliminación de Gauss*.*
- *Si escalonamos* $\bar{A} \to \bar{R}$*, con* $\bar{R}$ *escalonada reducida, y resolvemos el sistema asociado a* $\bar{R}$*, estamos utilizando el* método de eliminación de Gauss-Jordan*.*

Cálculo de matrices inversas con operaciones elementales

Teorema

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ regular. La matriz inversa de A se obtiene de transformar en escalonada reducida la matriz $(A|I_n)$. Se obtendrá:

$$(A|I_n) \rightarrow (I_n|B)$$

siendo $B = A^{-1}$.

Definición de determinante

Definición (Determinante)

Dada una matriz $A = (a_{11}) \in M_1(\mathbb{R})$, *el determinante de* A *es* $det(A) = a_{11}$. *Supuesto conocido el valor* $det(A)$ *para las matrices* $A \in M_{n-1}(\mathbb{R})$, *el determinante para*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se define del siguiente modo

$$det(A) = a_{11}\alpha_{11} + a_{21}\alpha_{21} + \cdots + a_{n1}\alpha_{n1}$$

siendo $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} det(A_{ij})$, *donde* $A_{ij} \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ *es la submatriz de* A *obtenida al quitar la fila* i *y la columa* j. *Al elemento* α_{ij} *se le llama* adjunto ij-ésimo *de* A.

Definición de determinante

Esta definición de determinante es de tipo inductivo y se denomina *desarrollo de Laplace* de $det(A)$ por la primera columna.

Ejemplos

- $det(I_n) = 1$.
- *Si* $A \in M_2(\mathbb{R})$, $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.
- *Si* $A \in M_3(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

Definición (Matriz regular)

Se dice que A es regular *si* $det(A) \neq 0$.

Propiedades de los determinantes

Propiedades (Propiedades de los determinantes)

1. *Dadas $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ iguales, salvo en la i-ésima fila (resp. columna) de A, que es igual a la suma de las i-ésimas filas (resp. columnas) de B y C, entonces:*
$$det(A) = det(B) + det(C)$$
2. *Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ tiene dos filas (resp. columnas) iguales o proporcionales, entonces $det(A) = 0$.*
3. *Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$ y dada B obtenida de intercambiar en A la posición de dos filas (resp. columnas), entonces $det(B) = -det(A)$.*
4. *Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$ y dada B obtenida de multiplicar los elementos de una fila (resp. columna) de A por un escalar k, entonces $det(B) = k\,det(A)$. Si A tiene una fila (resp. columna) de ceros, entonces $det(A) = 0$.*

Propiedades de los determinantes

Propiedades (Propiedades de los determinantes)

5. *Dada* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *y dada* B *obtenida de sumar a una fila (resp. columna) de* A *otra fila (resp. columna) multiplicada por un escalar* k*, entonces* $det(A) = det(B)$.
6. $A \in M_n(\mathbb{R})$ *es invertible si y sólo si* $det(A) \neq 0$.
7. *Dadas* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $det(AB) = det(A)det(B)$.
8. *Dada* $A \in M_n(\mathbb{R})$, $det(A) = det(A^t)$
9. *Dada* $A \in M_n(\mathbb{R})$, $det(A)$ *puede obtenerse desarrollando por cualquiera de sus filas o columnas:*

$$det(A) = a_{i1}\alpha_{i1} + \cdots + a_{in}\alpha_{in} = a_{1j}\alpha_{1j} + \cdots + a_{nj}\alpha_{nj}$$

Métodos de cálculo de determinantes

Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$ con $n > 3$, veamos procedimientos de cálculo de $det(A)$.

Procedimiento

Se elige un elemento no nulo de una fila o columna (la que más ceros tenga) y se hacen ceros el resto de elementos mediante operaciones elementales (aplicando las reglas 3, 4 y 5 anteriores). Finalmente, se desarrolla por esa fila o columna obtenida. El procedimiento se puede repetir con los determinantes de las matrices de orden $n-1$ resultantes.

Procedimiento

Se escalona A con operaciones elementales aplicando las propiedades 3, 4 y 5 anteriores. Resulta $det(A) = e_{11}e_{22}\cdots e_{nn}$ con e_{ii} los elementos de la diagonal principal de la matriz escalonada.

Cálculo de la matriz inversa

Teorema

Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$ regular, se tiene

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Adj(A)^t$$

siendo $Adj(A) = (\alpha_{ij})$ la matriz de adjuntos de A.

Regla de Cramer

Teorema (Regla de Cramer)

Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$ regular y dado el sistema $(I)\ AX = \bar{b}$, entonces (I) es compatible determinado y sus soluciones son de la forma:

$$x_1 = \frac{det(\bar{b}\ A^2 \dots A^n)}{det(A)}, \quad \dots \quad , x_n = \frac{det(A^1 \dots A^{n-1}\ \bar{b})}{det(A)},$$

siendo A^i la columna i-ésima de A para $i = 1, \dots, n$.

Rango

Definición (Rango)

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Se llama menor de orden r *de A al determinante de la matriz formada por la intersección de r filas y r columnas de A. El* rango *de A es r si existe un menor de orden r de A no nulo y todos los menores de orden mayor que r son nulos.*

Observación

El rango de una matriz A es invariante por operaciones elementales sobre sus filas y resulta ser igual al número de filas no nulas de cualquier matriz escalonada asociada a A.

Teorema de Rouché-Frobenius

Teorema (Rouché-Frobenius)

Dado un sistema (I) $AX = \bar{b}$ de m ecuaciones con n incógnitas, se verifica:

- *El sistema es compatible si $r(A) = r(\bar{A})$. Será compatible determinado si $r(A) = r(\bar{A}) = n$ y compatible indeterminado si $r(A) = r(\bar{A}) < n$.*
- *El sistema es incompatible si $r(A) < r(\bar{A})$.*