Lección 8: Demodulación y Detección Paso-Banda. Parte II

Gianluca Cornetta, Ph.D.
Dep. de Ingeniería de Sistemas de Información y Telecomunicación
Universidad San Pablo-CEU

Contenido

- ❑Envolvente Compleja
- ❑Tolerancia al Error de Sistemas Binarios
- ❑Tolerancia al Error de Sistemas M-arios
- ❑Tolerancia al Error de Símbolo de Sistemas M-arios

Envolvente Compleja

- Una cualquiera señal paso-banda $s(t)$ puede representarse con notación compleja:

$$s(t) = \mathrm{Re}\left\{g(t)e^{j\omega_0 t}\right\}$$

- $g(t)$ representa la envolvente compleja de la señal:

$$g(t) = x(t) + jy(t) = |g(t)|e^{j\theta(t)} = R(t)e^{j\theta(t)}$$

- La magnitud de la envolvente compleja es:

$$R(t) = |g(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$

- Mientras que su fase es:

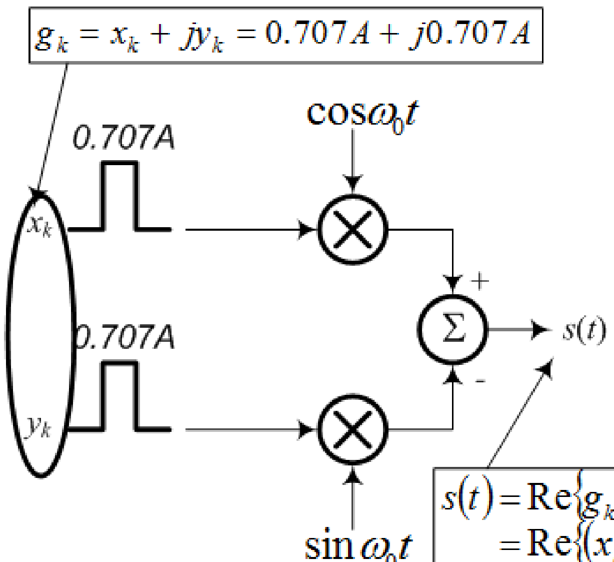
$$\theta(t) = \tan^{-1}\frac{y(t)}{x(t)}$$

- La envolvente $g(t)$ representa el mensaje o el dato con notación compleja, $e^{j\omega_0 t}$ es la portadora expresada en forma compleja
- $s(t)$ puede, por tanto, expresarse como sigue:

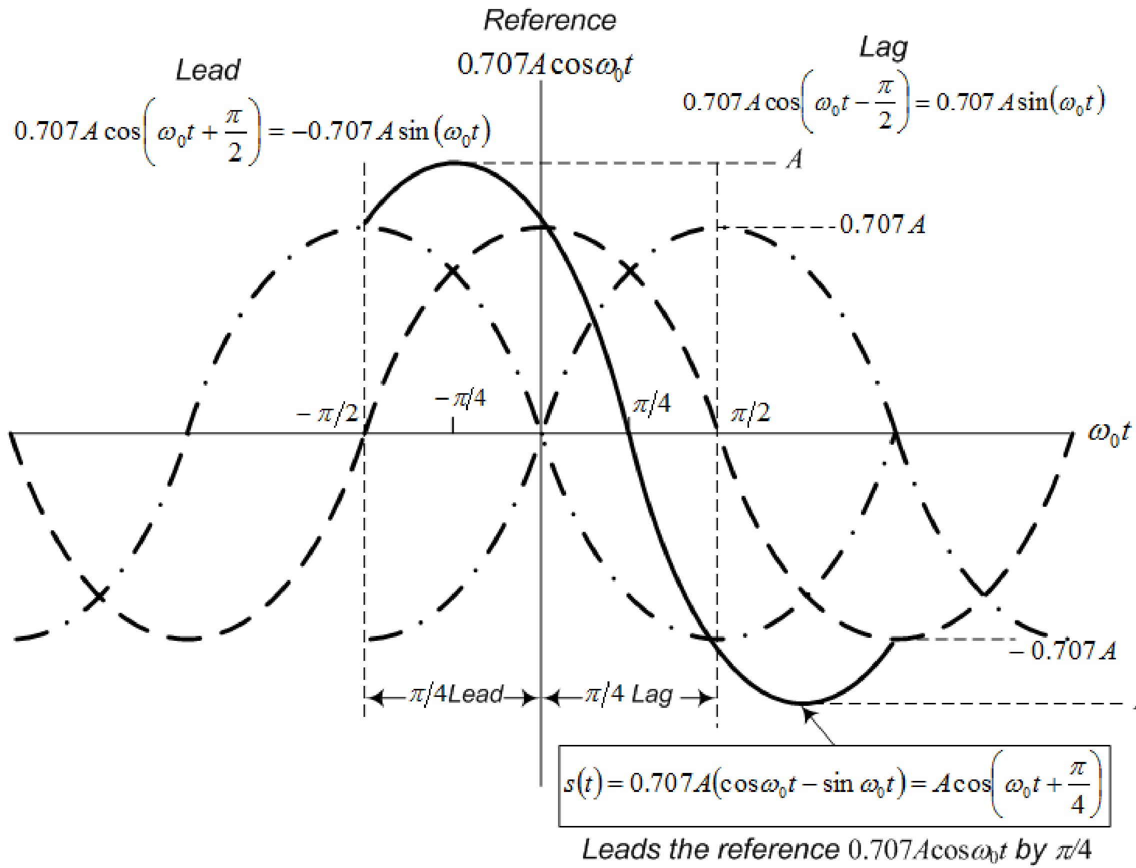
$$s(t) = \mathrm{Re}\{[x(t) + jy(t)][\cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t]\} = x(t)\cos\omega_0 t - y(t)\sin\omega_0 t$$

Envolvente Compleja

La envolvente que modula la portadora $e^{j\omega_0 t}$ es una serie de pulsos g_k de amplitud $0.707A$

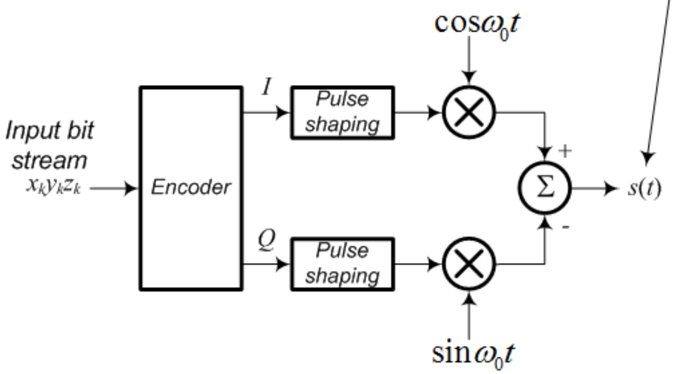


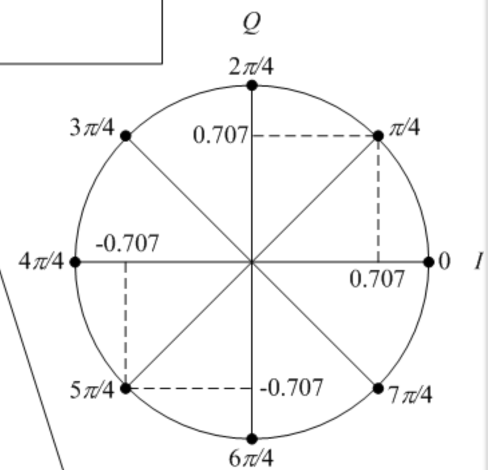
$$
\begin{aligned}
s(t) &= \mathrm{Re}\{g_k e^{j\omega_0 t}\} \\
&= \mathrm{Re}\{(x_k + jy_k)(\cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t)\} \\
&= x_k\cos\omega_0 t - y_k \sin\omega_0 t \\
&= 0.707A\cos\omega_0 t - 0.707A\sin\omega_0 t \\
&= A\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}
$$



Envolvente Compleja

$$
\begin{aligned}
s(t) &= \mathrm{Re}\{(x_k + jy_k)(\cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t)\} \\
&= x_k \cos\omega_0 t - y_k \sin\omega_0 t \\
&= -0.707\ \cos\omega_0 t + 0.707\ \sin\omega_0 t \\
&= \sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}
$$





Data encoding

x_k	y_k	z_k	$\Delta\phi_k$
0	0	0	0
0	0	1	$\pi/4$
0	1	1	$2\pi/4$
0	1	0	$3\pi/4$
1	1	0	$4\pi/4$
1	1	1	$5\pi/4$
1	0	1	$6\pi/4$
1	0	0	$7\pi/4$

Differential data phasor

$\phi_k = \phi_{k-1} + \Delta\phi_k$

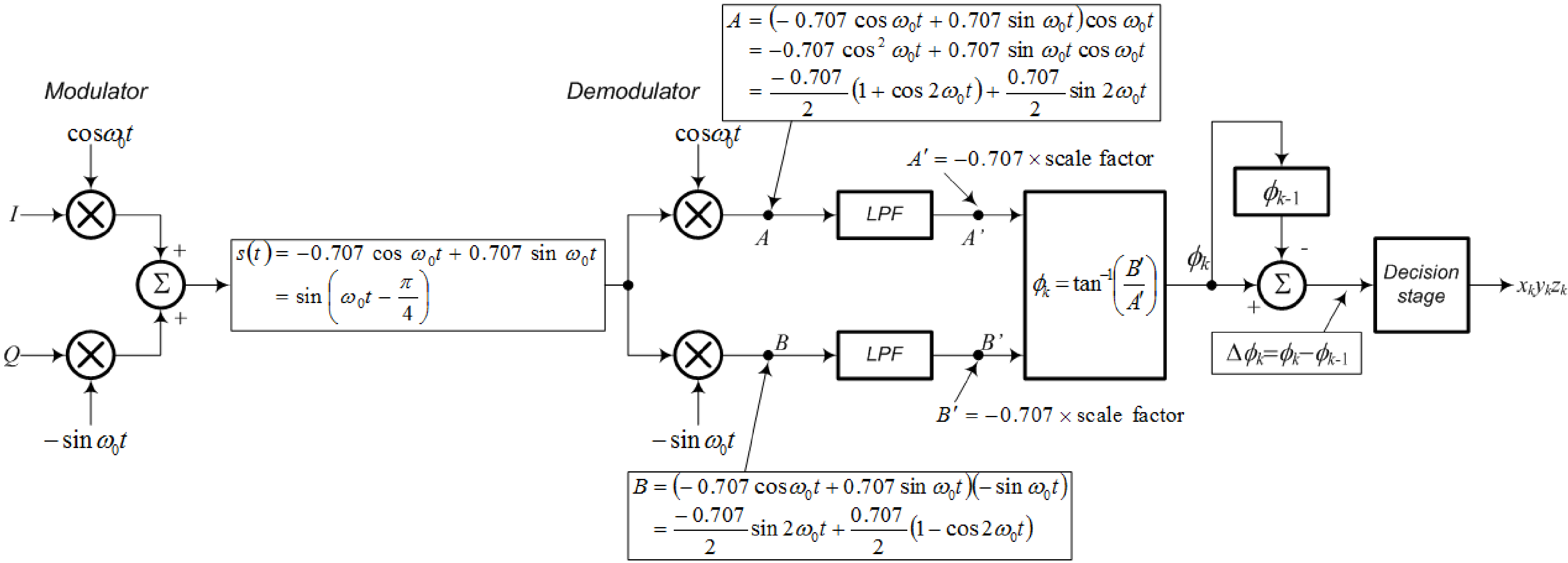
$\phi_0=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$x_k y_k z_k$	110	001	110	010
$\Delta\phi_k$:	π	$\pi/4$	π	$3\pi/4$
ϕ_k:	π	$5\pi/4$	$\pi/4$	π
I:	-1	-0.707	0.707	-1
Q:	0	-0.707	0.707	0

Modulador D8PSK. Se trata de una modulación 8-aria en la que cada símbolo es codificado con un *código Gray* de 3 bits. Los bits transmitidos codifican la diferencia de fase $\Delta\phi_k$ entre símbolos consecutivos. La fase del símbolo se calcula a partir de la anterior como:

$$\phi_k = \Delta\phi_k + \phi_{k-1}$$

Se asume $\phi_0 = 0$.

Envolvente Compleja



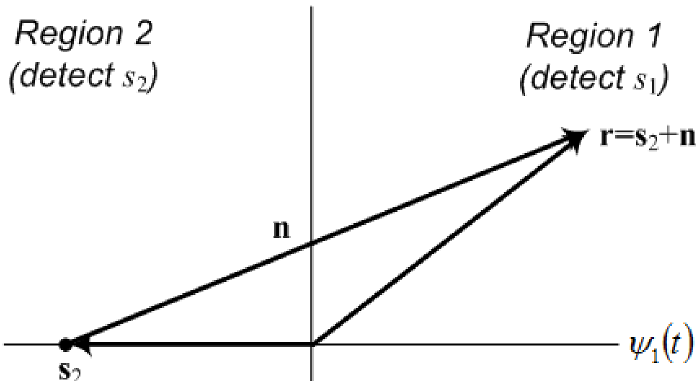
Demodulador D8PSK. La demodulación es el proceso inverso de la modulación.

Tolerancia al Error de Sistemas Binarios

$$\left.\begin{aligned} s_1(t) &= \sqrt{E}\,\psi_1(t) \\ s_2(t) &= -\sqrt{E}\,\psi_1(t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le T$$

Coherent BPSK

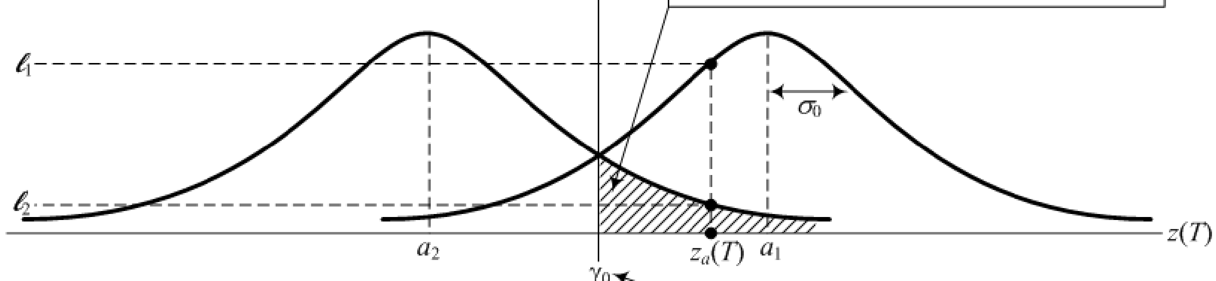
Las prestaciones de un sistema de comunicación se miden en términos de probabilidad de error de símbolo (P_E). De todas maneras, incluso con modulaciones M-arias conviene expresar las prestaciones en términos de probabilidad de error de bit P_B. En el caso de modulaciones binarias $P_E=P_B$



$$\begin{array}{ll} s_1(t) & \text{if } z(T) > \gamma_0 = 0 \\ s_2(t) & \text{otherwise} \end{array}$$

$$P_B = \int_{(a_1-a_2)/2\sigma_0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{u^2}{2}\right)} du = Q\left(\frac{a_1-a_2}{2\sigma_0}\right)$$

$$u = \frac{z-a_2}{\sigma_0}$$

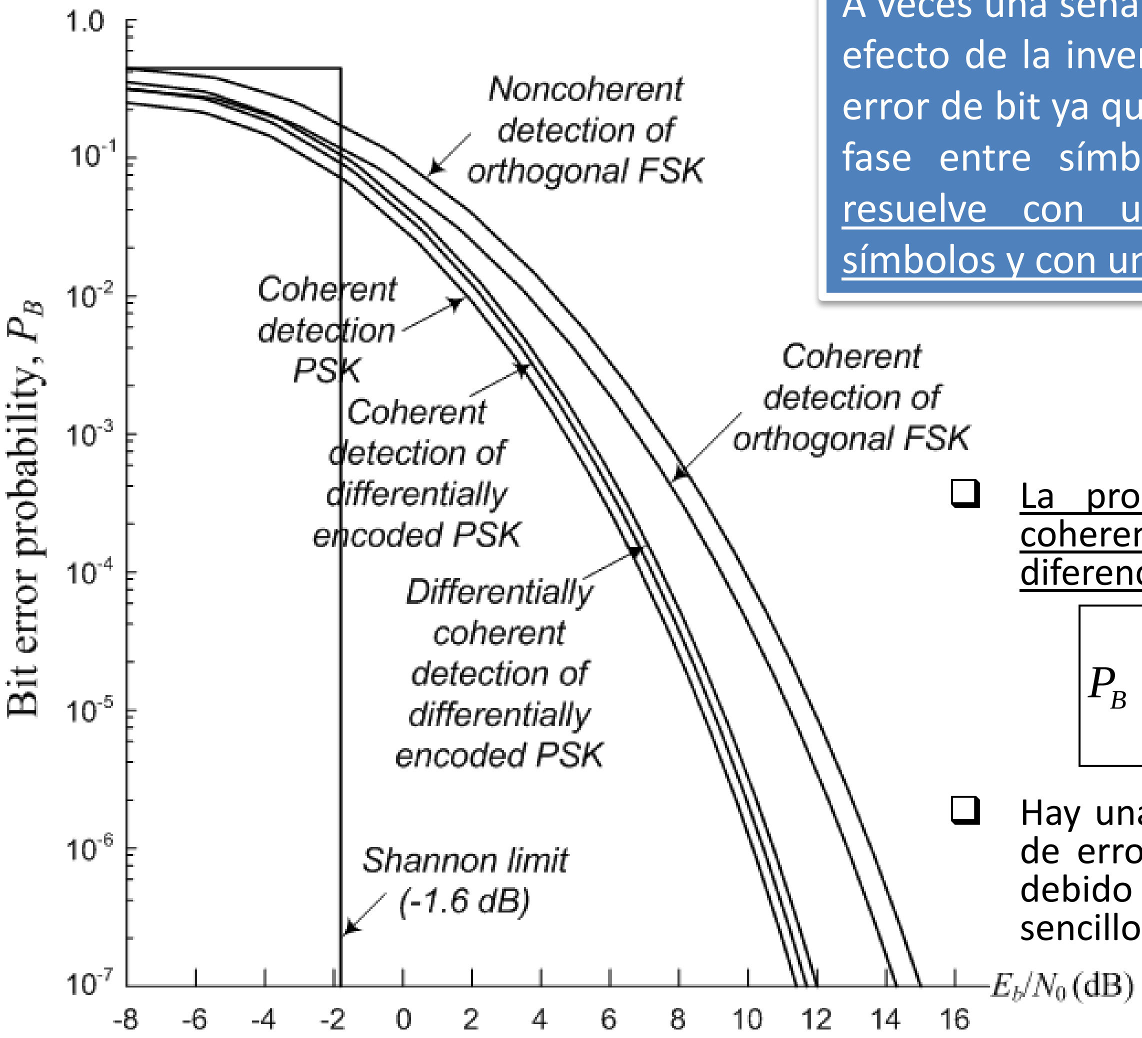


$$\gamma_0 = \frac{a_1+a_2}{2} \Rightarrow \gamma_0 = 0 \text{ for antipodal signals } (a_1 = -a_2)$$

- Para señales antipodales y de igual energía $a_1=-a_2=\sqrt{E_b}$
- En el caso de ruido AWGN la varianza σ^2_0 del ruido en la salida del correlator es $N_0/2$, por tanto:

$$P_B = \int_{\sqrt{2E_b/N_0}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

Tolerancia al Error de Sistemas Binarios



A veces una señal puede sufrir una inversión de fase. El efecto de la inversión en un demodulador DPSK es un error de bit ya que lo que se codifica es la diferencia de fase entre símbolos adyacentes. Este problema se resuelve con una codificación diferencial de los símbolos y con una detección coherente.

- La probabilidad de error de un detector coherente de señales con codificación diferencial (DPSK) es:

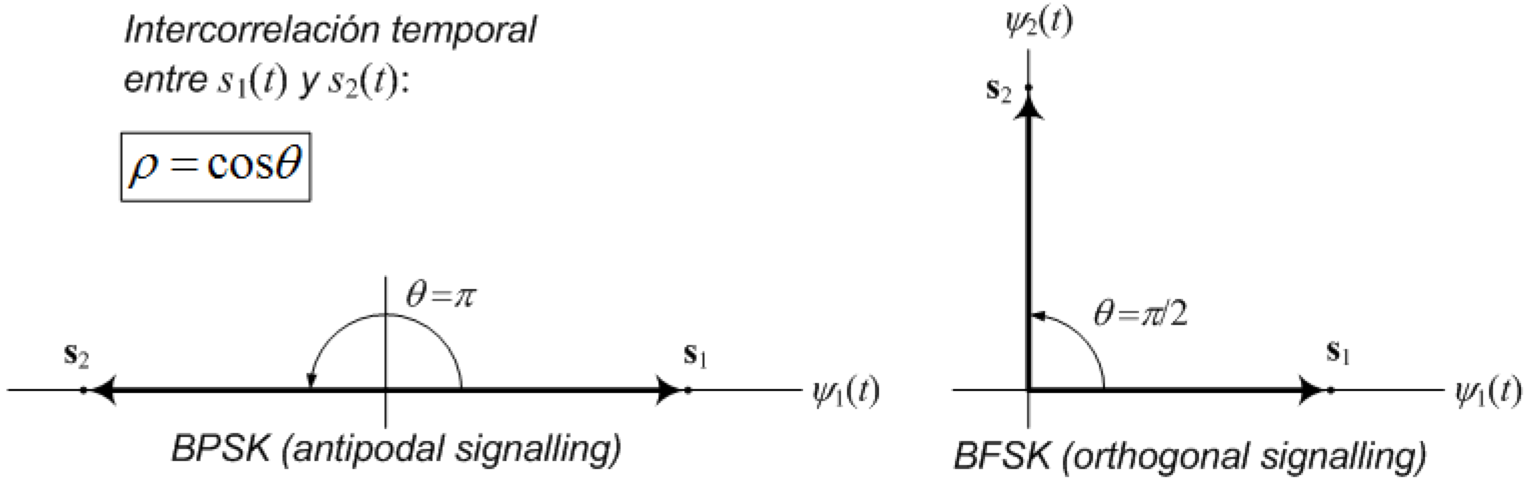
$$\boxed{P_B = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)\left[1-Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)\right]}$$

- Hay una ligera degradación de la probabilidad de error respecto a una señal PSK coherente debido al hecho que un error de detección sencillo resultará en dos errores de decisión

Tolerancia al Error de Sistemas Binarios

Intercorrelación temporal entre $s_1(t)$ y $s_2(t)$:

$$\boxed{\rho = \cos\theta}$$



- Una expresión general para P_B es la siguiente:

$$\boxed{P_B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{(1-\rho)E_b/N_0}}^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du}$$

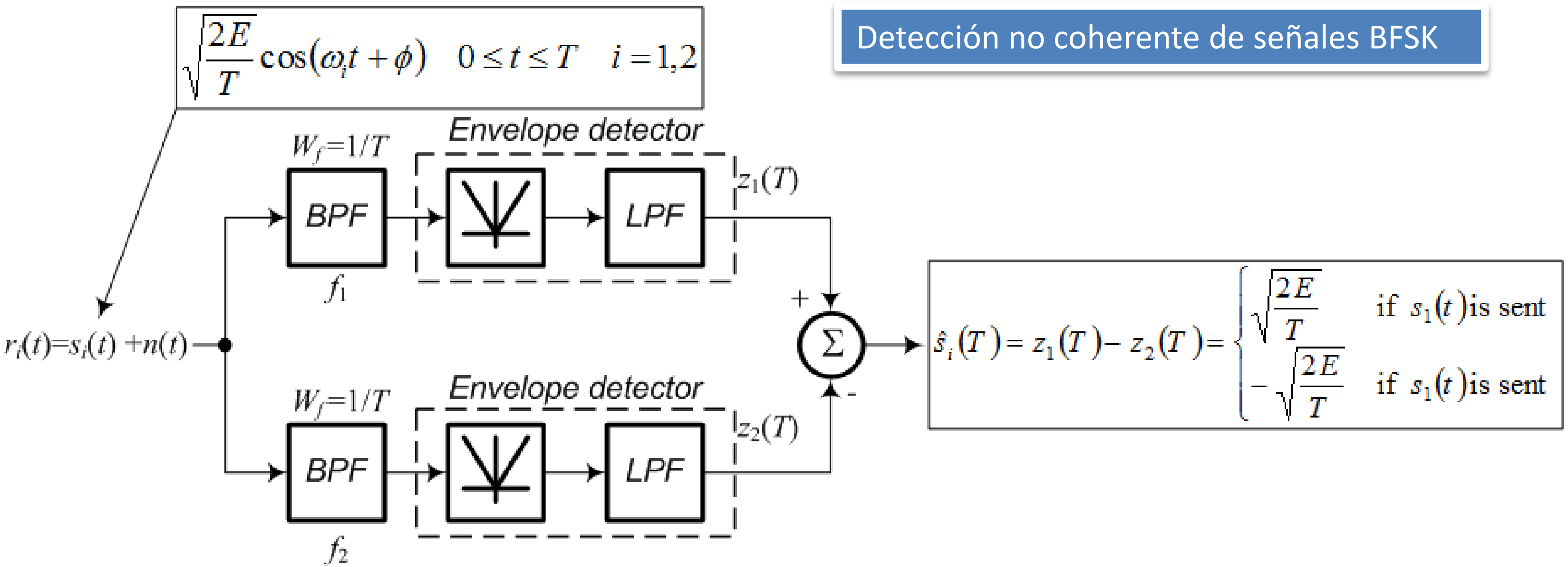
- Para una modulación ortogonal como la BFSK (o la OOK) para la que $\rho = 0$ resulta:

$$\boxed{P_B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{E_b/N_0}}^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)}$$

- <u>Observe que una modulación BFSK necesita una relación señal ruido E_b/N_0 superior de 3 dB a la de una modulación BPSK para alcanzar las mismas prestaciones de ésta</u>

Tolerancia al Error de Sistemas Binarios

Detección no coherente de señales BFSK



- Debido a la simetría entre las $\{z_i(T)\}$ el umbral óptimo de decisión es $\gamma_0=0$
- La probabilidad de error de bit P_B es:

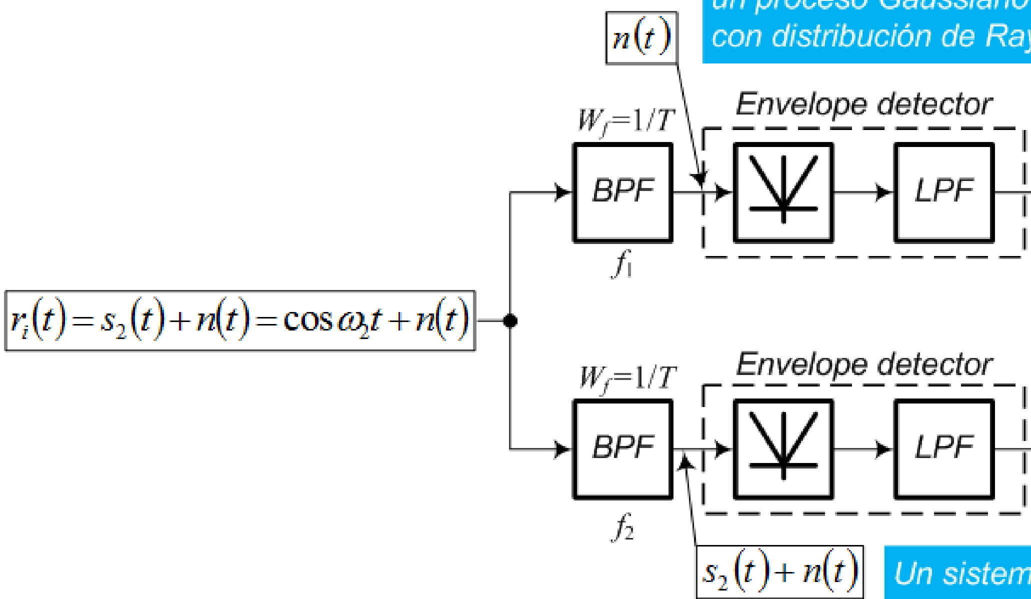
$$P_B=\frac{1}{2}P(H_2\,|\,s_1)+\frac{1}{2}P(H_1\,|\,s_2)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}p(z\,|\,s_1)dz+\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}p(z\,|\,s_2)dz$$

- Pero:

$$p(z\,|\,s_1)=p(-z\,|\,s_2)\Rightarrow P_B=P(z_1>z_2\,|\,s_2)=\int_{0}^{+\infty}p(z\,|\,s_2)dz$$

Tolerancia al Error de Sistemas Binarios

Un sistema no lineal transforma un proceso Gaussiano en uno con distribución de Rayleigh



$$p(z_1 \mid s_2)=\begin{cases}\dfrac{z_1}{\sigma_0^2}\exp\left(-\dfrac{z_1^2}{2\sigma_0^2}\right) & z_1\geq 0\\ 0 & z_1<0\end{cases}$$

$$p(z_2 \mid s_2)=\begin{cases}\dfrac{z_2}{\sigma_0^2}\exp\left[-\dfrac{\left(z_2^2+A^2\right)}{2\sigma_0^2}\right]I_0\left(\dfrac{z_2 A}{\sigma_0^2}\right) & z_2\geq 0\\ 0 & z_2<0\end{cases}$$

Un sistema no lineal transforma la suma de una sinusoide y ruido Gaussiano en un proceso con distribución Riciana

σ_0^2 (potencia de ruido en la salida del filtro)

$A=\sqrt{\dfrac{2E}{T}}$

$I_0(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\exp(x\cos\theta)d\theta$ es la función de Bessel modificada de orden 0

Tolerancia al Error de Sistemas Binarios

- La probabilidad de error de bit P_B resulta ser:

$$\boxed{\begin{aligned} P_B &= P(z_1 > z_2 \mid s_2) \\ &= \int_0^{+\infty} p(z_2 \mid s_2)\left[\int_{z_2}^{+\infty} p(z_1 \mid s_2)\,dz_1\right]dz_2 \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{z_2}{\sigma_0^2}\exp\left[-\frac{\left(z_2^2 + A^2\right)}{2\sigma_0^2}\right] I_0\left(\frac{z_2 A}{\sigma_0^2}\right)\left[\int_{z_2}^{+\infty} \frac{z_1}{\sigma_0^2}\exp\left(-\frac{z_1^2}{2\sigma_0^2}\right)dz_1\right]dz_2 \\ &= \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{A^2}{4\sigma_0^2}\right) \end{aligned}}$$

- La potencia de ruido en la salida del filtro resulta:

$$\sigma_0^2 = 2\left(\frac{N_0}{2}\right)W_f$$

- Donde $G_n(f)=N_0/2$ y W_f es el ancho de banda del filtro
- Por tanto P_B se vuelve:

$$\boxed{P_B = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{A^2}{4N_0 W_f}\right)}$$

- La prestación del demodulador depende del ancho de banda W_f del filtro. <u>P_B mejora a medida que se disminuye W_f</u>

Tolerancia al Error de Sistemas Binarios

- El valor mínimo de W_f que garantiza ausencia de ISI para una señal de banda lateral doble (es decir, paso-banda) es $W_f = R$ bits/s$=1/T$ (el filtro tiene *roll-off* $r=0$), por tanto P_B resulta:

$$\boxed{P_B = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{A^2T}{4N_0}\right) = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{E_b}{2N_0}\right)}$$

- Donde $A=\sqrt{2E/T} \Rightarrow E_b = (1/2)A^2T$ representa la energía por bit:
- Una demodulación FSK no coherente requiere una relación señal-ruido E_b/N_0 de 1 dB superior a una FSK coherente para alcanzar el mismo P_B de ésta (para $P_B \leq 10^{-4}$)
- Un demodulador no coherente es más fácil de implementar que su homólogo de tipo coherente, por tanto, casi todas las implementaciones prácticas son de tipo no coherente
- Finalmente un demodulador FSK no coherente, a paridad de P_B, tiene una relación señal ruido E_b/N_0 peor de 3 dB respecto a un DPSK no coherente

Tolerancia al Error de Sistemas Binarios

- Un conjunto de señales BPSK es definido como sigue:

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= \sqrt{\frac{2E}{T}}\cos(\omega_0 t + \phi) && 0 \le t \le T \\
x_2(t) &= \sqrt{\frac{2E}{T}}\cos(\omega_0 t + \phi \pm \pi) && 0 \le t \le T
\end{aligned}
$$

- La peculiaridad de un esquema DPSK es que no existen regiones de decisión fijas en el espacio ya que la decisión sobre el símbolo recibido depende de la diferencia de fase entre dos señales

$$
\begin{aligned}
s_1(t) &= (x_1, x_1) \,\mathrm{or}\, (x_2, x_2) && 0 \le t \le 2T \\
s_2(t) &= (x_1, x_2) \,\mathrm{or}\, (x_2, x_1) && 0 \le t \le 2T
\end{aligned}
$$

- Los primeros T segundos de cada señal corresponden a los último T segundos de la señal anterior
- La correlación entre las señales $s_1(t)$ y $s_2(t)$ puede escribirse como:

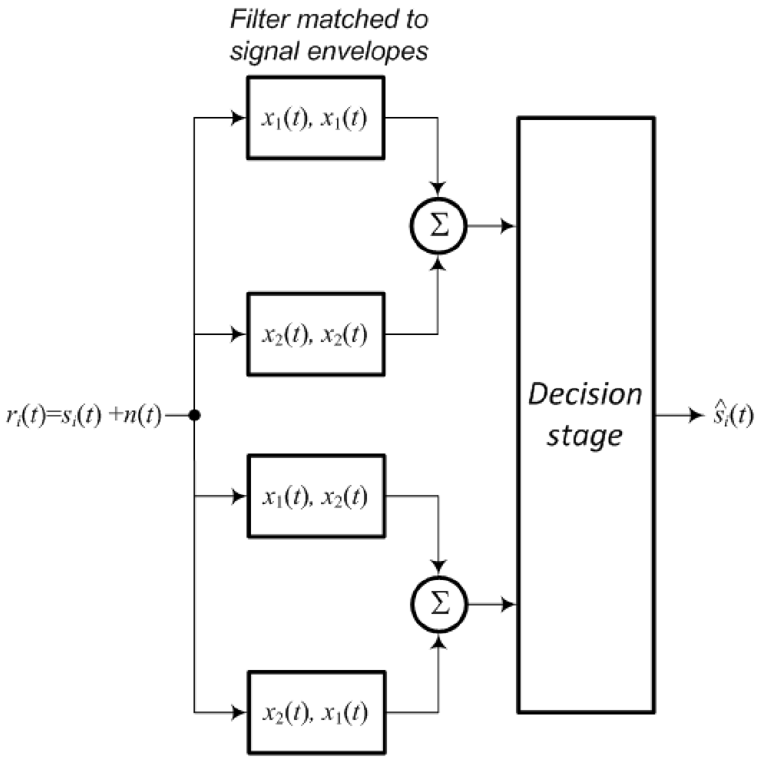
$$
z(2T) = \int_0^{2T} s_1(t)s_2(t)dt = \int_0^{T} x_1(t)x_1(t)dt + \int_0^{T} x_1(t)x_2(t)dt
$$

- Teniendo en cuenta que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son señales antipodales se obtiene:

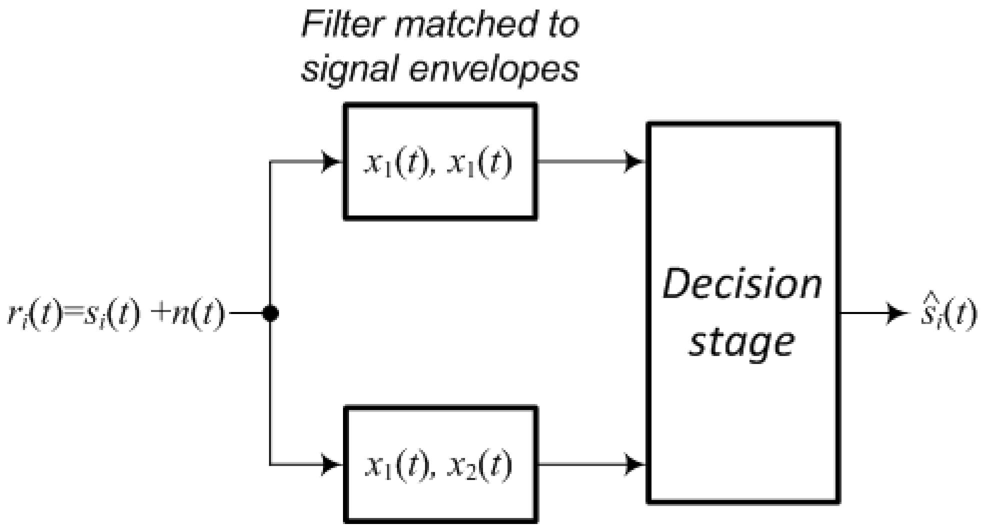
$$
z(2T) = \int_0^{T} [x_1(t)]^2 dt - \int_0^{T} [x_1(t)]^2 dt = 0
$$

- Por tanto $s_1(t)$ y $s_2(t)$ forman un conjunto de señales ortogonales en un intervalo de $2T$ segundos

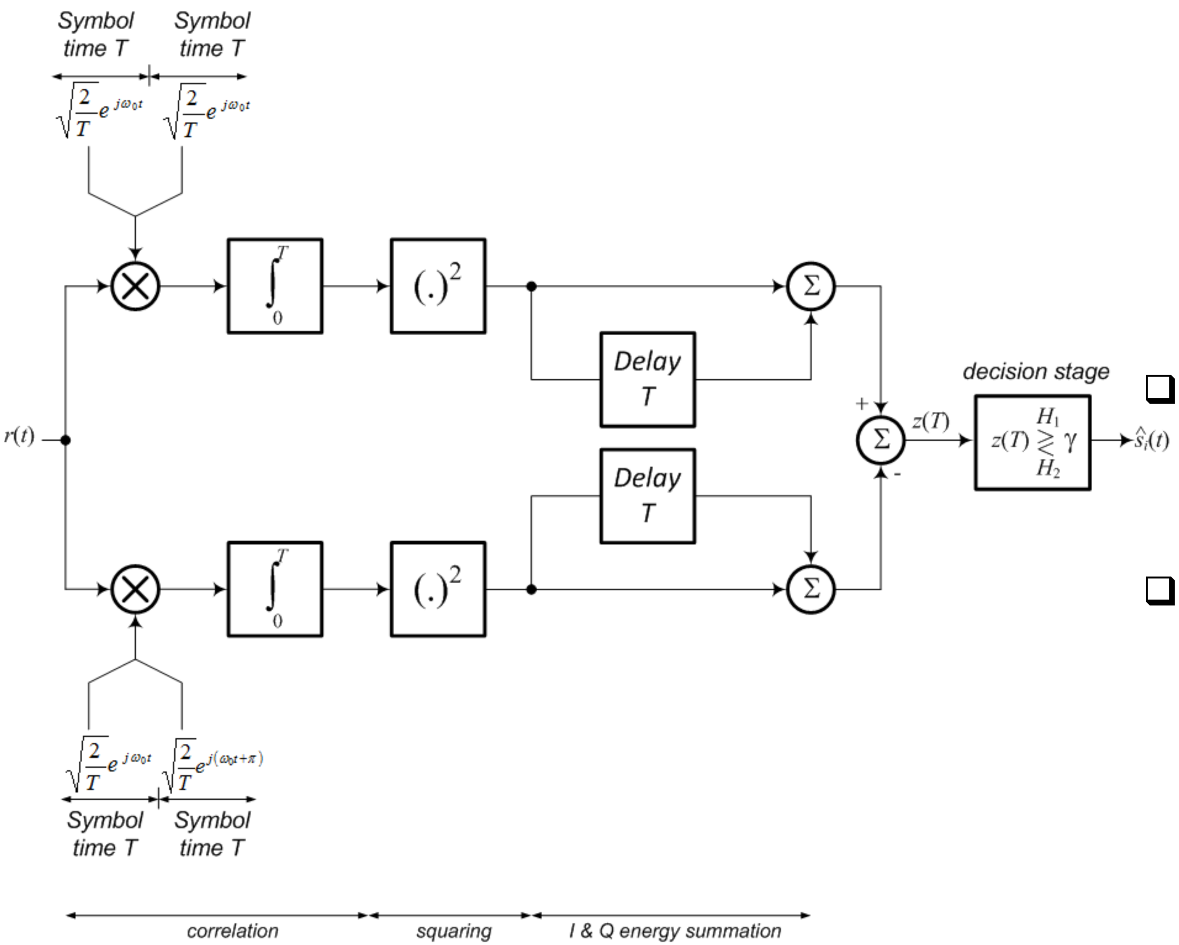
Tolerancia al Error de Sistemas Binarios



El demodulador de una señal DPSK no coherente puede realizarse con una cadena de filtros adaptados diseñados para detectar la envolvente de las 4 posibles combinaciones de señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ que codifican $s_1(t)$ y $s_2(t)$.
Ya que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son señales antipodales (x_1, x_1) y (x_2, x_2), y (x_1, x_2) y (x_2, x_1)tendrán la misma envolvente por lo que la tarea de detección puede llevarse a cabo utilizando dos canales.



Tolerancia al Error de Sistemas Binarios



- Las señales DPSK son ortogonales por lo que las prestaciones de un modulador DPSK son parecidas a las de un demodulador BFSK, sólo que el tiempo de bit es $2T$ por lo que la energía detectada (<u>en el caso de detector óptimo</u>) es el doble y P_B resulta:

$$\boxed{P_B = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{E_b}{N_0}\right)}$$

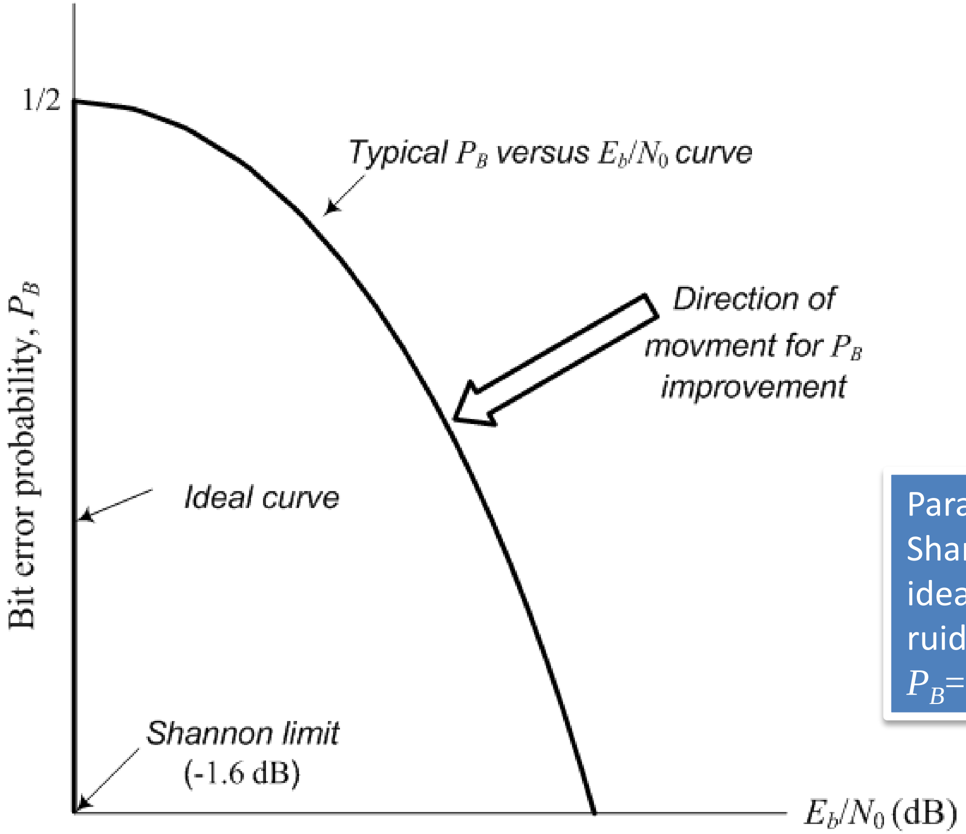
- Una demodulación DPSK requiere una relación señal-ruido E_b/N_0 de 1 dB superior a una BPSK coherente para alcanzar el mismo P_B de ésta (para $P_B \leq 10^{-4}$)
- También el caso de una modulación PSK, un demodulador no coherente es más fácil de implementar que su homólogo de tipo coherente (<u>porque no requiere sincronismo de fase</u>), por tanto, casi todas las implementaciones prácticas son de tipo no coherente

Tolerancia al Error de Sistemas Binarios

Modulation	P_B
PSK (coherent)	$Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$
DPSK (differentially coherent)	$\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{E_b}{N_0}\right)$
Orthogonal FSK (coherent)	$Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$
Orthogonal FSK (noncoherent)	$\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{E_b}{2N_0}\right)$

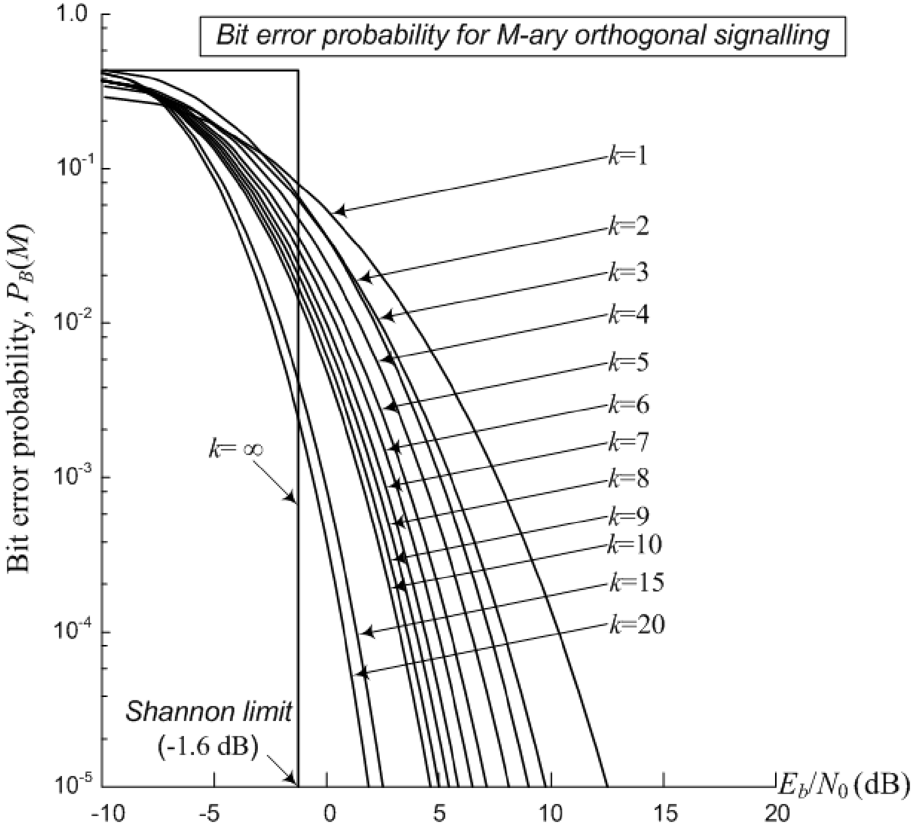
Entre el esquema mejor (PSK coherente) y el peor (FSK ortogonal no coherente) existe una diferencia de 4 dB (para P_B=10^{-4}). En este caso es preferible la sencillez de implementación de un esquema no coherente en detrimento de la relación señal ruido E_b/N_0. En otros casos incluso una mejora de tan sólo 1 dB es preferible.
En el caso de canales con desvanecimiento aleatorio en los que es muy difícil mantener el sincronismo es más efectiva una demodulación no coherente.

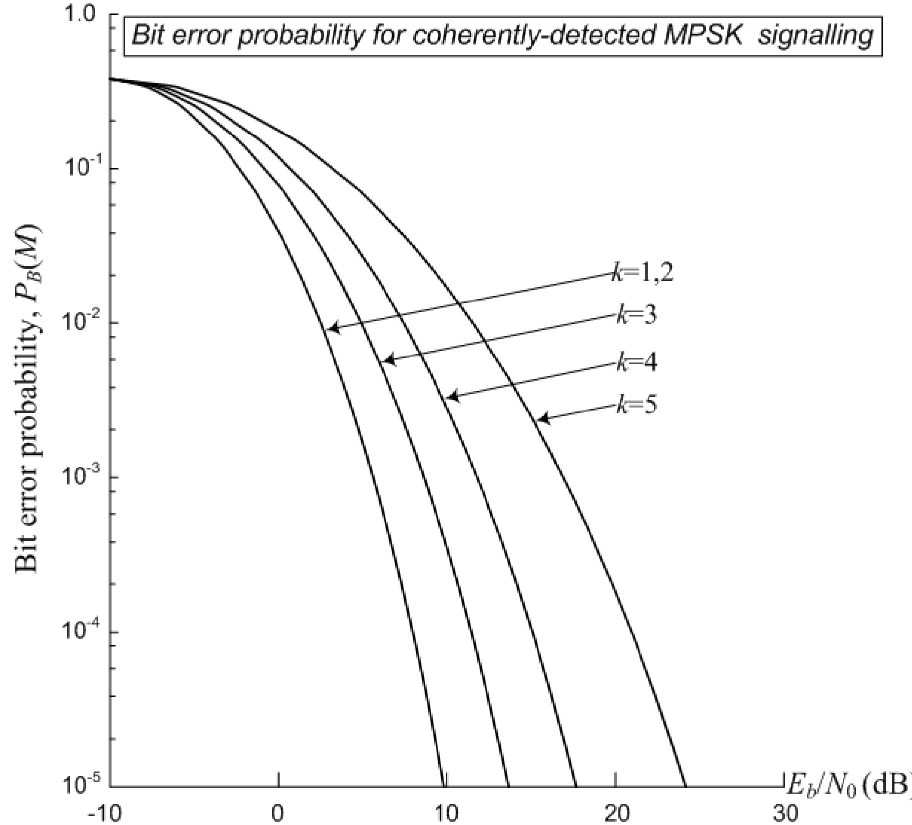
Tolerancia al Error de Sistemas M-arios



Para los valores de E_b/N_0 por encima del límite de Shannon (-1.6 dB), la probabilidad de error en el caso ideal es nula, es decir P_B=0. Cuando la relación señal ruido alcanza el límite de Shannon, en el caso peor P_B=1/2. *¿Por qué en el caso peor no es P_B=1?*

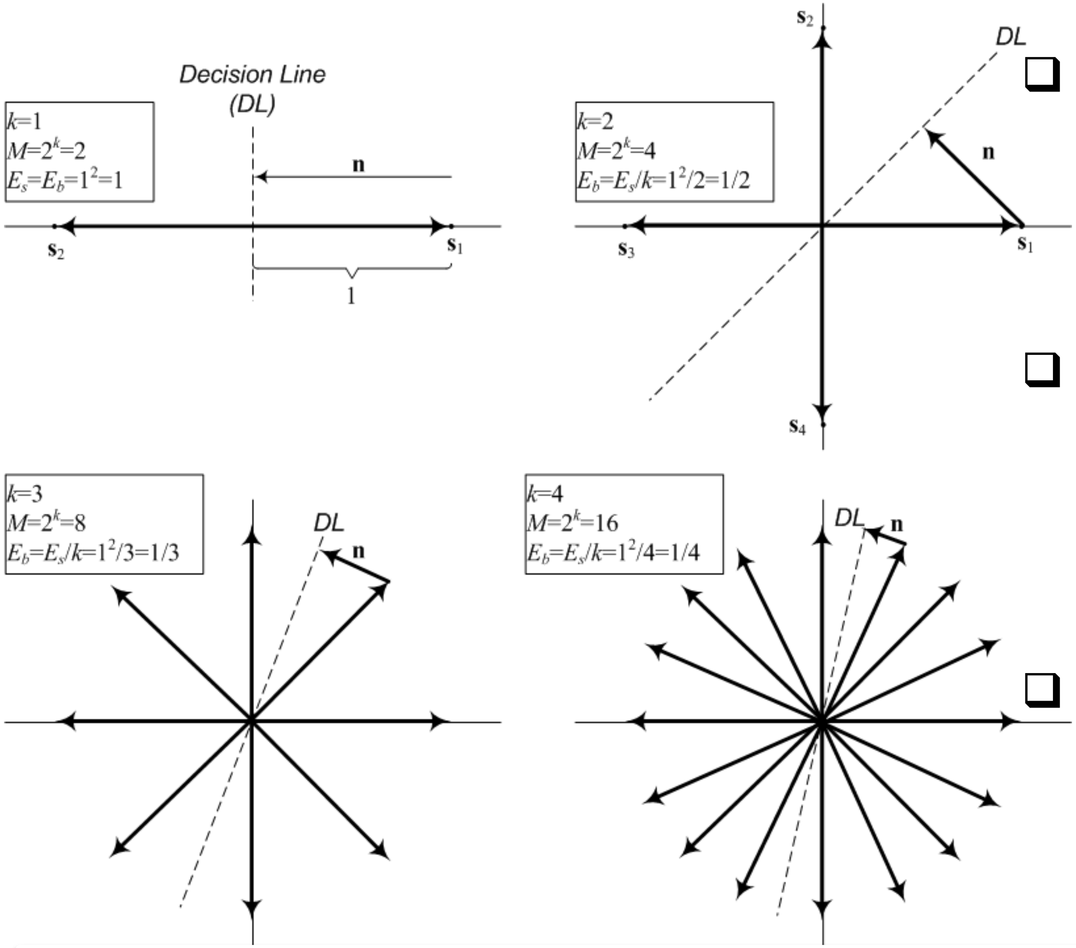
Tolerancia al Error de Sistemas M-arios





La probabilidad de error $P_B(M)$ de una modulación M-aria en un canal AWGN mejora al aumentar del número k de bits por símbolo en el caso de un esquema ortogonal y empeora en el caso de un esquema MPSK. ¿Por qué, entonces, se utilizan modulaciones de fase M-arias?

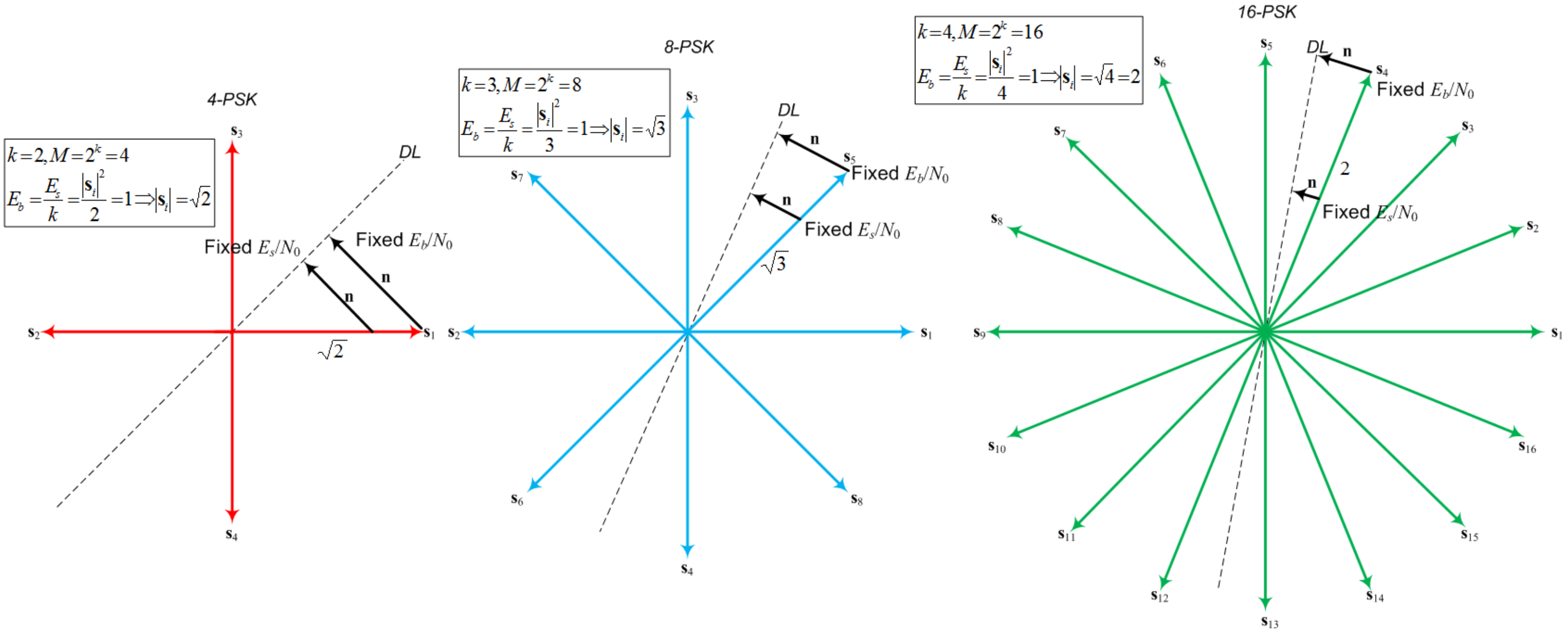
Tolerancia al Error de Sistemas M-arios



- Además de E_b/N_0 hay otras figuras de mérito como:
  - Ancho de banda
  - *Throughput*
  - Complejidad
  - Coste
- Para señales ortogonales si k aumenta, aumenta también el ancho de banda necesario para la transmisión
  - *La excelente tolerancia al error es alcanzada en detrimento del ancho de banda*
- Para señales MPSK si k aumenta el ancho de banda de transmisión se mantiene constante
  - *El excelente ancho de banda es alcanzado en detrimento de la tolerancia al error*

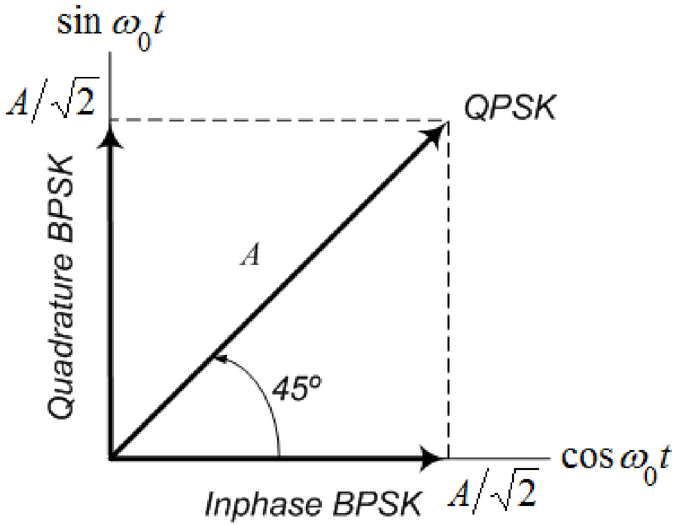
A medida de que $M=2^k$ aumenta, la modulación se hace más vulnerable al error (es decir, el margen de ruido disminuye) porque estamos concentrando en el mismo espacio más vectores de señal. Para mejorar el margen de ruido es posible aumentar la potencia de transmisión hasta que $\mathbf{n}$ alcanza la longitud del caso binario (BPSK).

Tolerancia al Error de Sistemas M-arios



- Si aumentamos el tamaño M de un conjunto de señales MPSK caben dos posibilidades:
    - Una mejora del ancho de banda en detrimento de la probabilidad de error
    - Aumentar E_b/N_0 de manera que $P_B(M)$ no se degrade manteniendo invariado el ancho de banda

Tolerancia al Error de Sistemas M-arios



- Una modulación QPSK (4-PSK) con señales de amplitud A y *bitrate* R puede verse como la combinación de 2 modulaciones BPSK ortogonales con una amplitud $A/\sqrt{2}$ y un *bitrate* $R/2$
  - Los bits pares son transmitidos en el canal I, mientras que los bits impares son transmitidos en el canal en cuadratura Q
- La relación entre E_b/N_0 y S/N es:

$$\boxed{\frac{E_b}{N_0} = \frac{S}{N}\left(\frac{W}{R}\right)}$$

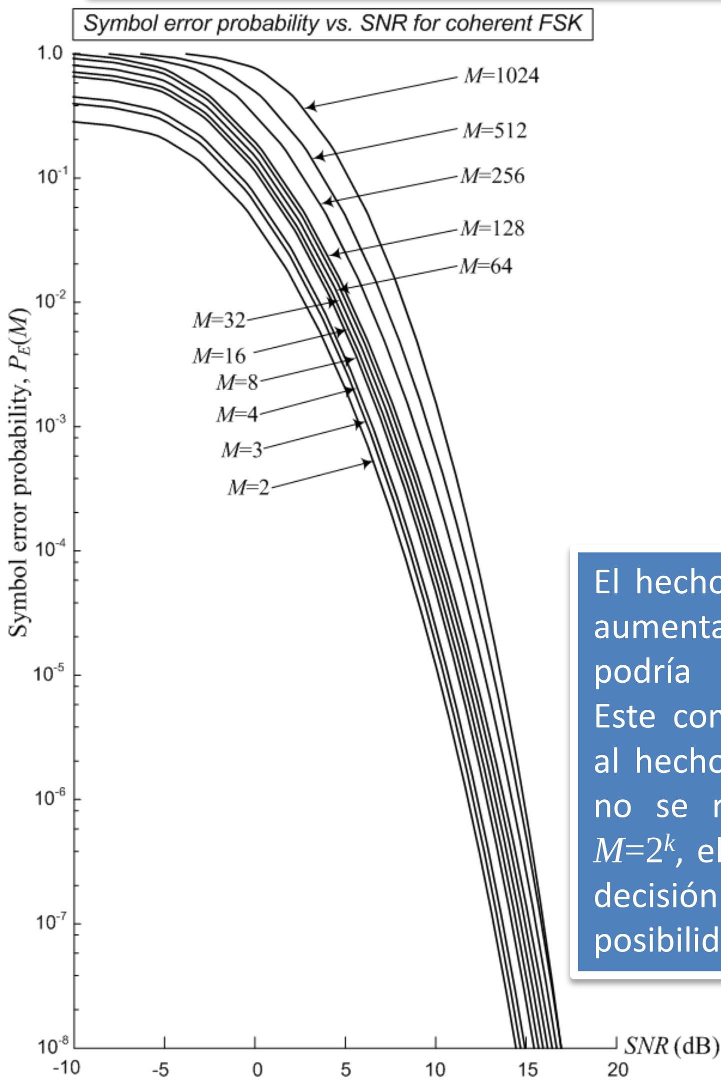
- Cada una de las modulaciones BPSK tiene una potencia media de $S/2$ vatios, por tanto:

$$\boxed{\frac{E_b}{N_0} = \frac{S/2}{N}\left(\frac{W}{R/2}\right) = \frac{S}{N}\left(\frac{W}{R}\right)}$$

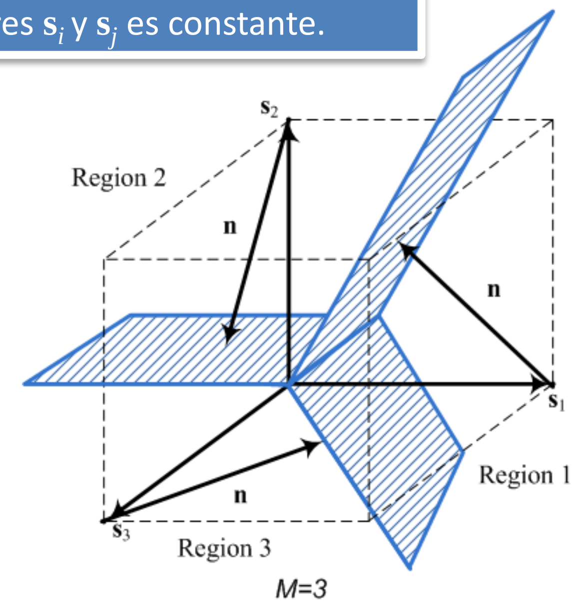
  - *Cada una de las modulaciones BPSK tiene la misma relación señal ruido de la QPSK y, por tanto el mismo P_B*

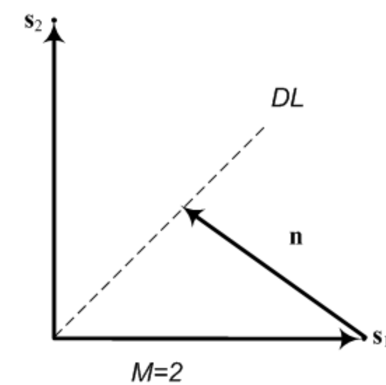
Tolerancia al Error de Sistemas M-arios

En una modulación MFSK el vector $\mathbf{n}$ no se reduce al aumentar de $M=2^k$ y del número de regiones de decisión porque en un espacio ortogonal M-ario la distancia entre dos vectores $\mathbf{s}_i$ y $\mathbf{s}_j$ es constante.



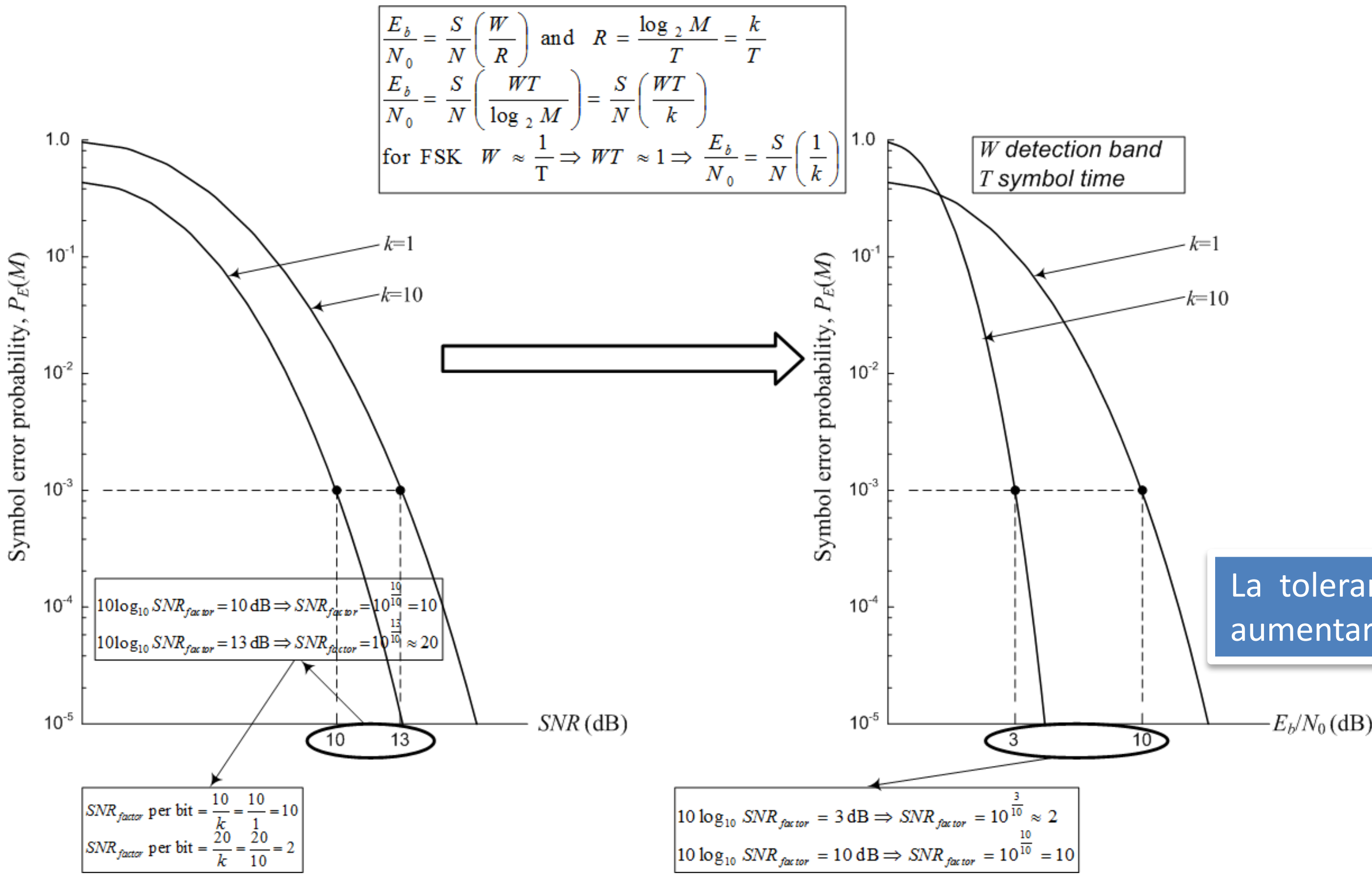
El hecho que $P_E(M)$ aumenta al aumentar de M (y por tanto de k) podría parecer contradictorio. Este comportamiento es debido al hecho que, a pesar de que $\mathbf{n}$ no se reduce al aumentar de $M=2^k$, el número de regiones de decisión aumenta y hay M-1 posibilidades de realizar un error.





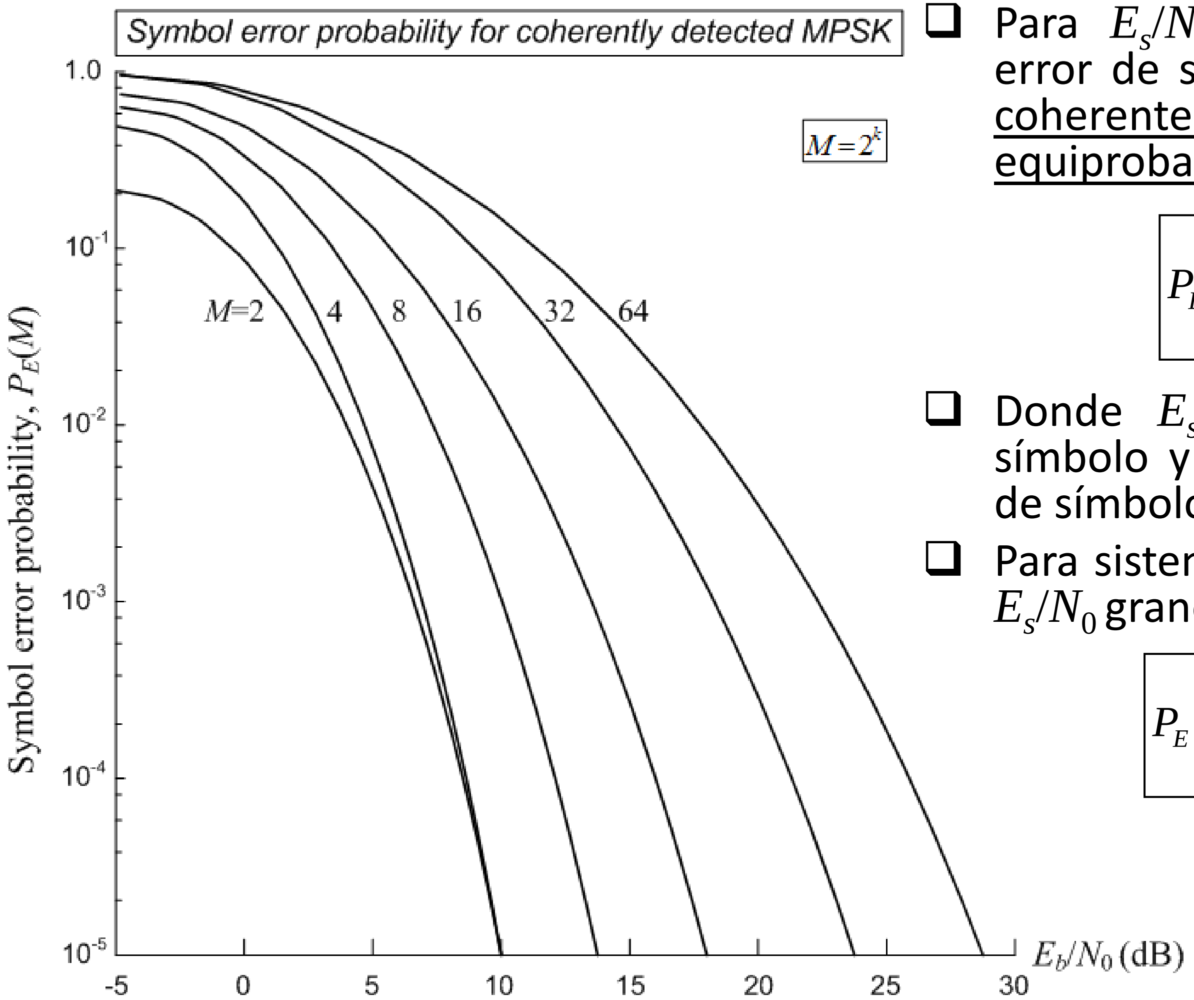
Tolerancia al Error de Sistemas M-arios

- Fijar la relación señal ruido SNR equivale a fijar la energía por símbolo transmitido
  - Cuando aumenta M, la misma energía se distribuye sobre más bits
  - Se necesita más potencia para transmitir (más SNR) pero la potencia por bit (es decir, E_b/N_0) se ve reducida
- Utilizar el SNR como figura de mérito en sistemas digitales es poco efectivo y puede llevar a conclusiones engañosas. En este sentido es más útil utilizar como indicador E_b/N_0
- Hay que mapear $P_E(M)$ vs. SNR en $P_E(M)$ vs. E_b/N_0



La tolerancia al error mejora al aumentar de k.

Tolerancia al Error de Símbolo de Sistemas M-arios



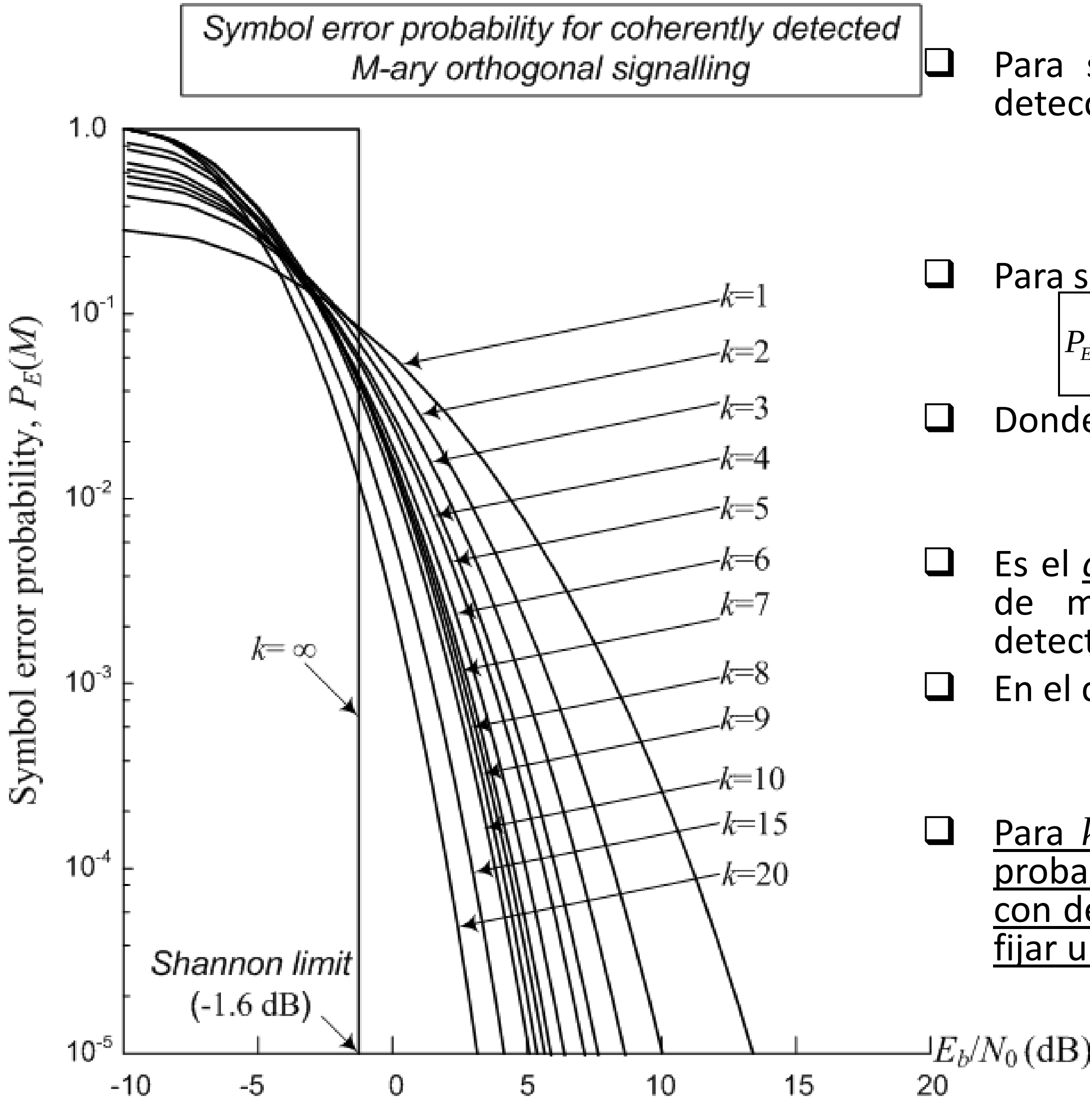
- Para E_s/N_0 grande, la probabilidad de error de símbolo $P_E(M)$ para detectores coherentes de señales M-arias equiprobables es:

$$P_E(M) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\sin\frac{\pi}{M}\right)$$

- Donde $E_s=E_b\log_2 M$ es la energía por símbolo y $M=2^k$ el tamaño del conjunto de símbolos
- Para sistemas coherentes diferenciales (y E_s/N_0 grande) la probabilidad de error es:

$$P_E(M) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\sin\frac{\pi}{\sqrt{2}M}\right)$$

Tolerancia al Error de Símbolo de Sistemas M-arios



- Para sistemas M-arios ortogonales (MFSK) con detección coherente $P_E(M)$ resulta ser:

$$\boxed{P_E(M) \le (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)}$$

- Para sistemas no coherentes es:

$$\boxed{P_E(M) = \frac{1}{M}\exp\left(-\frac{E_s}{N_0}\right)\sum_{j=2}^{M}(-1)^j\binom{M}{j}\exp\left(\frac{E_s}{jN_0}\right)}$$

- Donde :

$$\boxed{\binom{M}{j} = \frac{M!}{j!(M-j)!}}$$

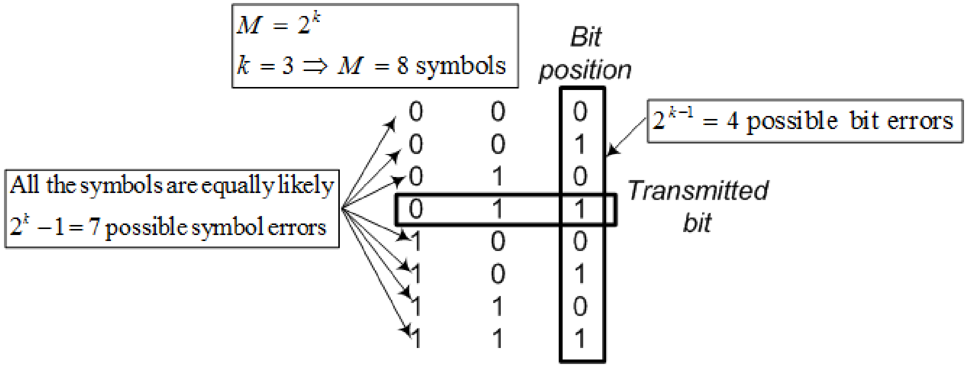
- Es el *coeficiente binomial* que expresa el número de maneras en las que j de M símbolos detectados pueden ser incorrectos
- En el caso binario $P_E(M)$ se reduce a:

$$\boxed{P_B = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{E_b}{2N_0}\right)}$$

- Para k>7 hay una diferencia despreciable entre probabilidad de error con detección coherente y con detección no coherente por lo que es posible fijar un límite superior común:

$$\boxed{P_E(M) \le \frac{(M-1)}{2}\exp\left(\frac{E_s}{2N_0}\right)}$$

Tolerancia al Error de Símbolo de Sistemas M-arios



- La relación entre la probabilidad de error de bit P_B y de símbolo P_E para un sistema M-ario ortogonal es:

$$\frac{P_B}{P_E} = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} = \frac{M/2}{M-1}$$

- Al límite, cuando k aumenta se obtiene:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{P_B}{P_E} = \frac{1}{2}$$

- En el caso de señales MPSK P_B es menor o igual a P_E como en el caso de señales MFSK, sin embargo los vectores no son equidistantes como el en caso de señales MFSK
- Para esquemas no ortogonales como el MPSK, los símbolos se suelen codificar utilizando codificación de Gray de manera que símbolos adyacentes difieran sólo de un bit
- Utilizando codificación de Gray resulta:

$$P_B \approx \frac{P_E}{\log_2 M} \qquad (\text{for } P_E << 1)$$