Lección 6: Demodulación y Detección en Banda Base. Parte II

Gianluca Cornetta, Ph.D.
Dep. de Ingeniería de Sistemas de Información y Telecomunicación
Universidad San Pablo-CEU

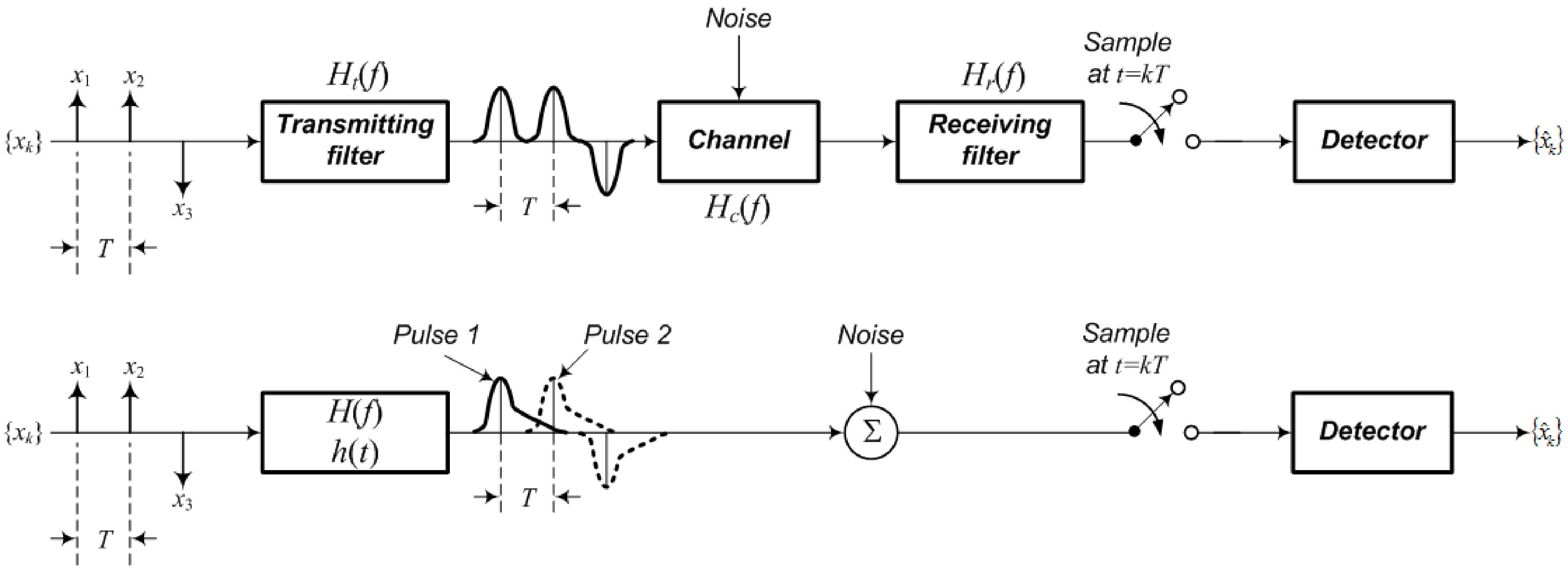
Contenido

- Interferencia Intersímbolo (ISI)
- Ecualización

Interferencia Intersímbolo (ISI)

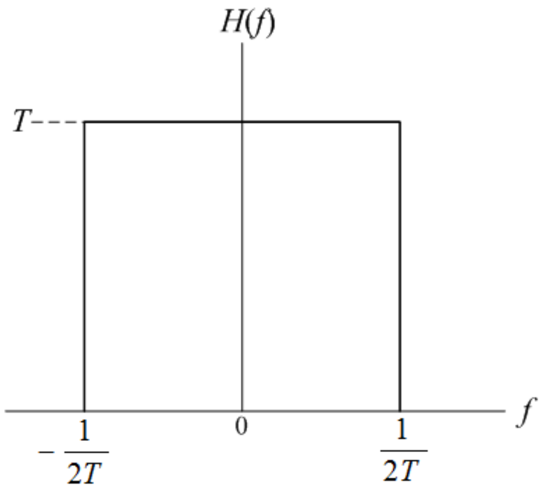
- *Transmisión*:
  - Es el proceso que consiste en codificar los símbolos como pulsos o niveles de tensión
  - Los pulsos codificados modulan unos pulsos que son oportunamente filtrados para cumplir con algunas restricciones sobre el ancho de banda
- *En banda base* el canal (es decir, el cable) presenta unas reactancias distribuidas que distorsionan la señal
- *En sistemas paso-banda* (por ej. sistemas inalámbricos) la distorsión es generada por efecto de desvanecimiento (fading) introducido por el canal
- Los efectos del canal sobre la señal transmitida pueden modelarse mediante una función de transferencia $H_c(f)$
- <u>Por consiguiente la señal recibida es sometida a una transformación que depende de la respuesta en frecuencia del filtro de transmisión, del canal y del filtro de recepción, es decir</u>: $H(f)=H_t(f)H_c(f)H_r(f)$
- El efecto de la distorsión es una expansión temporal del pulso que va invadiendo los marcos de temporales de los símbolos adyacentes provocando ISI (incluso en ausencia de ruido de canal)

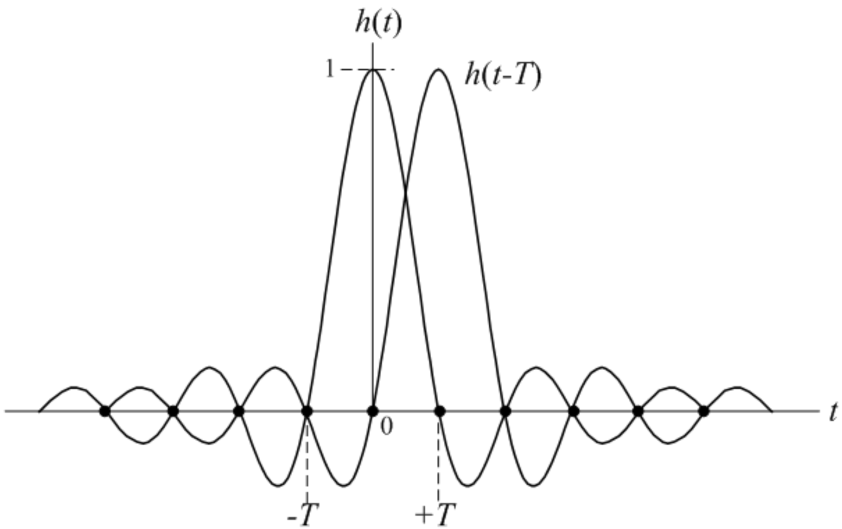
Interferencia Intersímbolo (ISI)



Interferencia Intersímbolo (ISI)

- Nyquist demostró que la banda mínima teórica necesaria para detectar correctamente R_s símbolos/s sin ISI es $R_s/2$ Hz
- Esta condición se cumple cuando $H(f)$ tiene forma rectangular (*filtro ideal de Nyquist*)
- La respuesta al impulso del filtro ideal de Nyquist es $h(t)=\mathrm{sinc}(t/T)$ (*pulso ideal de Nyquist*)
- Estos pulsos se pueden detectar sin errores si se realiza el muestreo en instantes múltiplos enteros del tiempo de símbolo T ya que las colas de $h(t\text{-}kT)$ con $k=\pm1, \pm2\ldots$,pasan por cero en los instantes de tiempo $t=kT$





Interferencia Intersímbolo (ISI)

- El ancho de banda necesaria para detectar $1/T$ pulsos (símbolos) por segundo es $1/2T$:
  - Un sistema con ancho de banda $W=1/2T=R_s/2$ Hz puede soportar una tasa de transmisión máxima de $2W=1/T=R_s$ símbolos/s sin ISI
  - La máxima tasa de transmisión de símbolos per Hz (*symbol-rate packing*) es $2W=R_s \Rightarrow R_s/W=2$ símbolos/s/Hz
- El pulso de Nyquist es ideal y no realizable físicamente; sin embargo, existen buenas aproximaciones de este tipo de pulso
- Un filtro de Nyquist es una clase de filtros cuya respuesta al impulso se obtiene multiplicando el pulso ideal ($\mathrm{sinc}(t/T)$) por otra función del tiempo
  - La respuesta en el dominio de la frecuencia se obtiene realizando la convolución de la respuesta en frecuencia del filtro ideal con una cualquier función real y par de la frecuencia
  - Algunos pulsos de Nyquist muy utilizados en sistemas prácticos son:
    - *Pulso de tipo coseno alzado*
    - *Pulso de tipo raíz de coseno alzado*

Interferencia Intersímbolo (ISI)

- La figura de mérito que se utiliza para medir la bondad de un esquema de transmisión es la <u>eficiencia de banda</u> R/W; es decir, *el throughput por Hz de banda*
- <u>No hay que confundir la eficiencia de banda con el symbol-rate packing que representa la máxima tasa de transmisión de símbolos por Hz</u> (es decir, 2 símbolos/s/Hz)
- Por otro lado R/W se mide en símbolos/s/Hz
  - Por ejemplo, en una modulación 64-PAM cada símbolo se codifica con 6 bits por lo tanto la máxima eficiencia de banda alcanzable con este esquema es $R/W=2\times6=12$ bits/s/Hz

Interferencia Intersímbolo (ISI)

- La mayor parte de las veces, el objetivo de diseño es maximizar la eficiencia espectral reduciendo los requerimientos de banda
- Reducir el ancho de banda por debajo de la frecuencia de Nyquist provocaría una expansión del pulso en el tiempo y, por tanto, ISI
- En la práctica se utiliza un filtro de forma para procesar los pulsos a transmitir y limitarlos en banda a una frecuencia razonablemente superior a la de Nyquist
- La eficiencia espectral puede relacionarse al *roll-off* del filtro de forma, es decir a la pendiente de la zona de transición entre banda de paso y banda de corte
  - <u>*Roll off pequeño*</u>: elevada eficiencia espectral pero expansión temporal del pulso
  - <u>Ni siquiera un pulso de Nyquist ideal podría garantizar en la práctica ausencia de ISI ya que esta condición se alcanzaría sólo si el tiempo de muestreo fuese ideal</u>

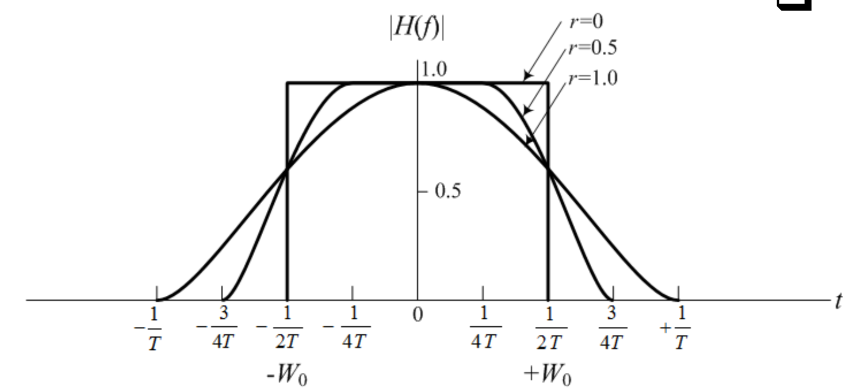
Interferencia Intersímbolo (ISI)

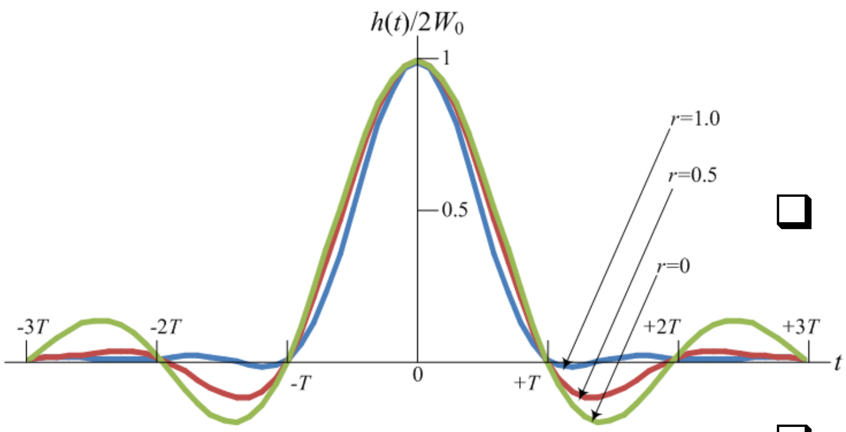
- Si el filtro de recepción está diseñado para compensar la distorsión introducida por transmisor y canal se denomina ecualizador
- Un ecualizador es diseñado para optimizar la función de transferencia compuesta $H(f)$ del sistema:

$$H(f)=\begin{cases} 1 & \text{for } |f| < 2W_0 - W \\ \cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}\dfrac{|f|+W-2W_0}{W-W_0}\right) & \text{for } 2W_0 - W < |f| < W \\ 0 & \text{for } |f| > W \end{cases}$$

- Una $H(f)$ muy utilizada en la práctica y que pertenece a la clase de los pulsos de Nyquist es el *filtro de coseno alzado* (*raised cosine*)
- W es la banda absoluta mientras que $W_0 = 1/2T$ es la banda de Nyquist mínima del espectro rectangular, es decir la banda de -6 dB (banda de media amplitud) para el espectro de coseno alzado
- W-W_0 es el *exceso de banda*, es decir la banda adicional ocupada por encima de la banda de Nyquist mínima W_0

Interferencia Intersímbolo (ISI)





- Para una W_0 dada, el *roll-off* r expresa el exceso de banda en función de W_0; es decir, $r=(W-W_0)/W_0$ (con $0 \leq r \leq 1$)
  - *Caso* $r=1$(<u>máxima extensión de banda</u>): exceso de banda del 100%, cola del pulso pequeña y *symbol-rate packing* de 1 símbolo/s/Hz (R_s símbolos/s utilizando una banda de R_s Hz)
  - *Caso* $r=0$(<u>mínima extensión de banda</u>): exceso de banda del 0%, cola del pulso infinita y *symbol-rate packing* de 2 símbolos/s/Hz (R_s símbolos/s utilizando una banda de $R_s/2$ Hz)
- La respuesta al impulso de $H(f)$ es:

$$h(t) = 2W_0(\text{sinc } 2W_0 t)\frac{\cos[2\pi(W-W_0)t]}{1-[4(W-W_0)t]^2}$$

- <u>Un pulso de coseno alzado sólo puede ser aproximado en la práctica ya que tal y como la sinc se trata de un pulso no causal y de duración infinita</u>

Interferencia Intersímbolo (ISI)

- A partir del requerimiento mínimo de banda W para poder alcanzar una tasa de transmisión sin ISI de R_s símbolos/s utilizando una banda de $R_s/2\,\mathrm{Hz}$ es posible determinar una expresión más general para W en función del *roll-off* del filtro utilizado:
  - Para señales en banda base:

$$W = \frac{1}{2}(1+r)R_s$$

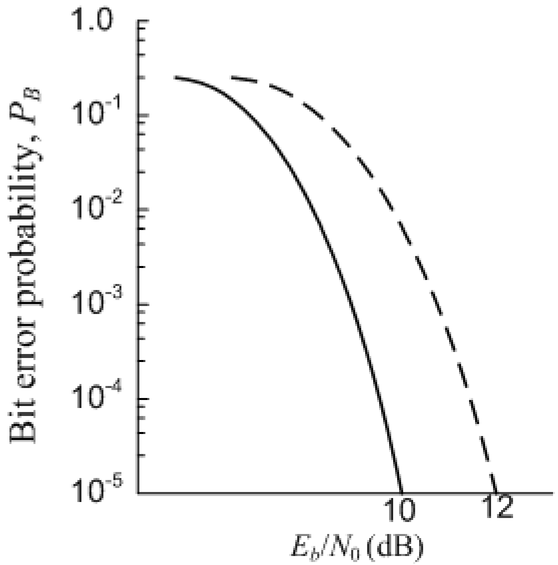
  - Para señales paso-banda (que ocupan el doble de una señal en banda base):

$$W_{DSB} = (1+r)R_s$$

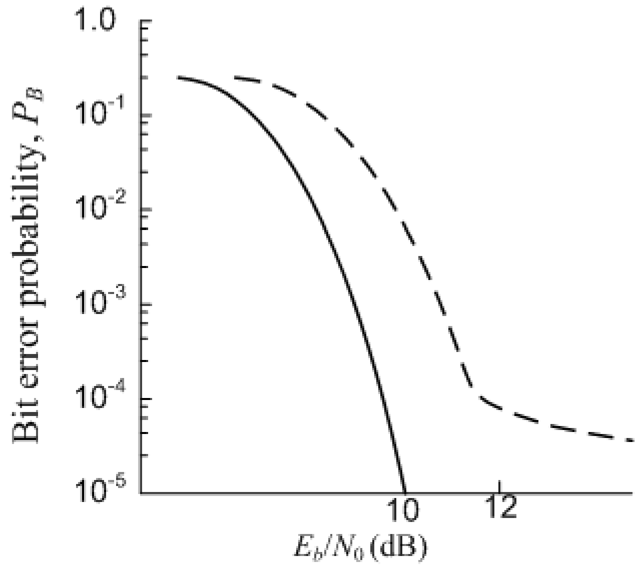
- $H(f)$ es una función global que incorpora las contribuciones de filtro de transmisión, canal y filtro de recepción
- Despreciando los efectos de canal, $H(f)=H_t(f)H_r(f)$, por tanto, en el caso de filtrado adaptado (*matched filtering*) las respuestas al impulso de los filtros de transmisión y recepción son idénticas e iguales a la raíz cuadrada del coseno alzado

Interferencia Intersímbolo (ISI)

Deterioro del E_b/N_0 debido a interferencias



Deterioro del E_b/N_0 debido a ISI



Dos son las causas de la degradación de la relación señal ruido o del E_b/N_0:

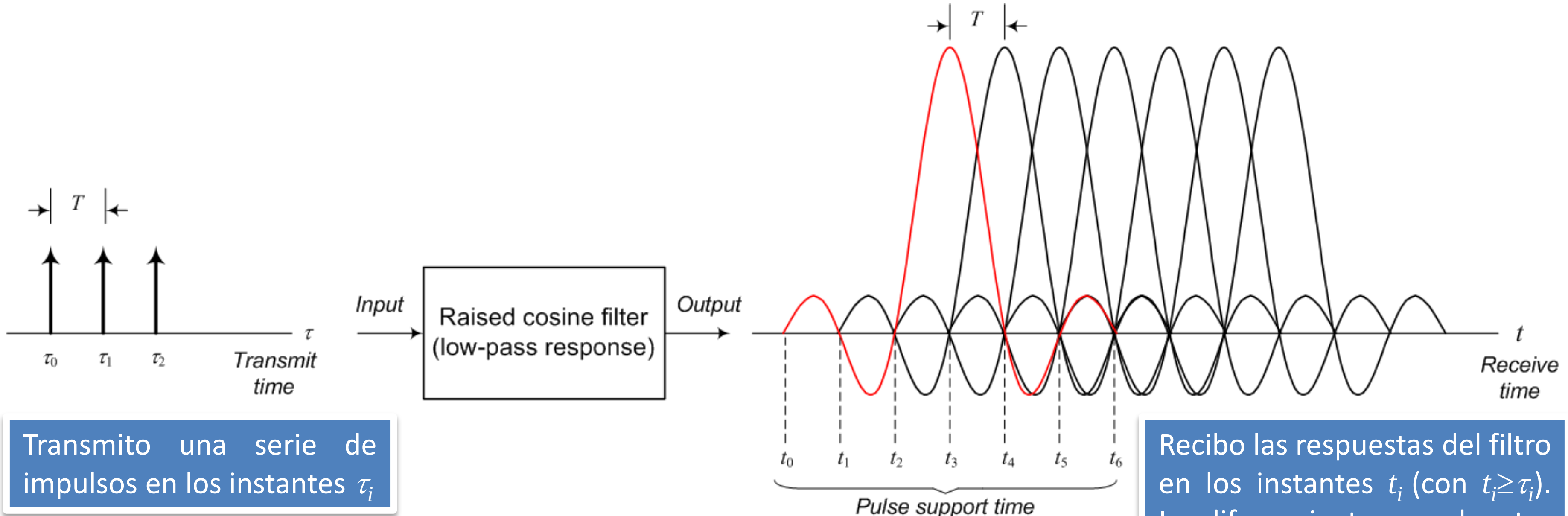
1. Interferencias externas o atenuación de la potencia de la señal transmitida
2. ISI

<u>El primer caso es problemático sólo en el caso de restricción de consumo ya que puede solucionarse fácilmente aumentando la potencia en transmisión. El segundo caso no tiene remedio.</u>

Interferencia Intersímbolo (ISI)

- Un filtro es un circuito selectivo diseñado para eliminar las componentes espectrales fuera de la banda de paso preservando (dentro ciertos límites) las características temporales de una señal
- Un filtro suele ser diseñado para cumplir con las siguientes propiedades:
  - Una ganancia uniforme y una fase lineal en la banda de paso
  - Una atenuación mínima en la banda de corte
- Un filtro convencional es aplicado a señales aleatorias definidas sólo en su ancho de banda, por otro lado los objetivos de diseño de un filtro adaptado son distintos:
  - <u>Un filtro adaptado (*matched filter*) se aplica a señales conocidas pero con parámetros aleatorios (por ejemplo amplitud y tiempo de llegada)</u>
  - <u>El objetivo de un filtro adaptado es el de maximizar el SNR para una señal dada en presencia de ruido AWGN</u>
  - Un filtro adaptado no conserva la estructura espectral o temporal de la señal sino que captura su energía generando en la salida un pico que depende del nivel de correlación entre la señal recibida y la esperada
- Los sistemas de telecomunicación utilizan ambos tipos de filtros:
  - *Filtro convencional*, <u>para eliminar interferencias fuera de banda preservando la forma de la señal</u>
  - *Filtro adaptado*, <u>para demodular la señal recibida</u>

Interferencia Intersímbolo (ISI)

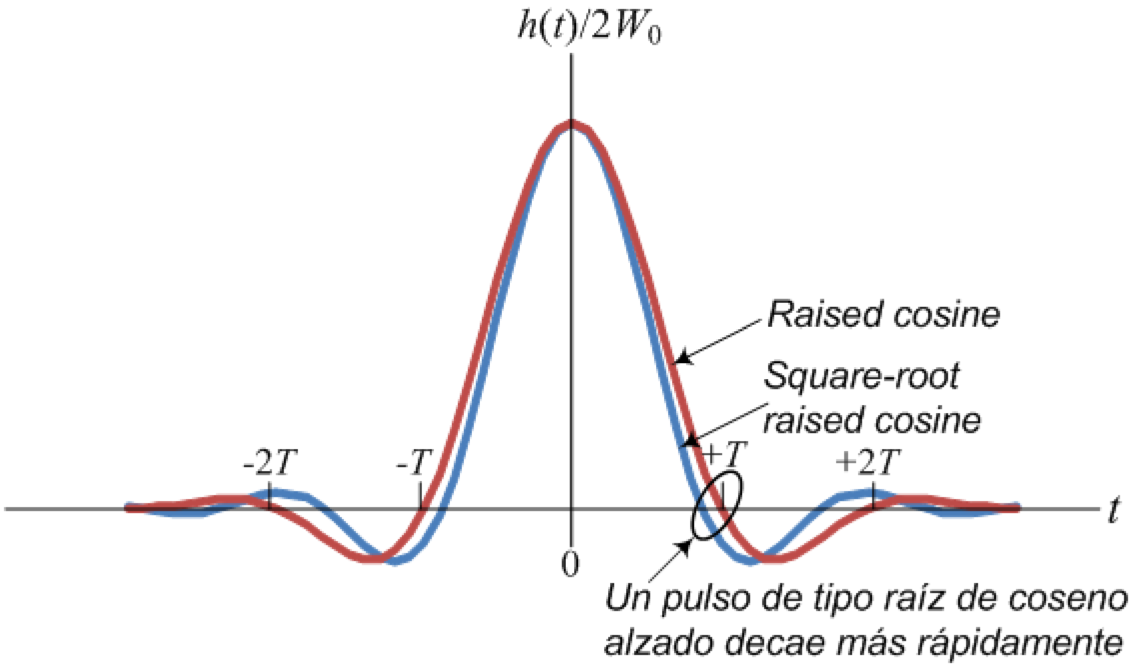


Transmito una serie de impulsos en los instantes τ_i

Recibo las respuestas del filtro en los instantes t_i (con $t_i \geq \tau_i$). La diferencia temporal entre tiempos de recepción y transmisión representa el retardo de propagación del sistema

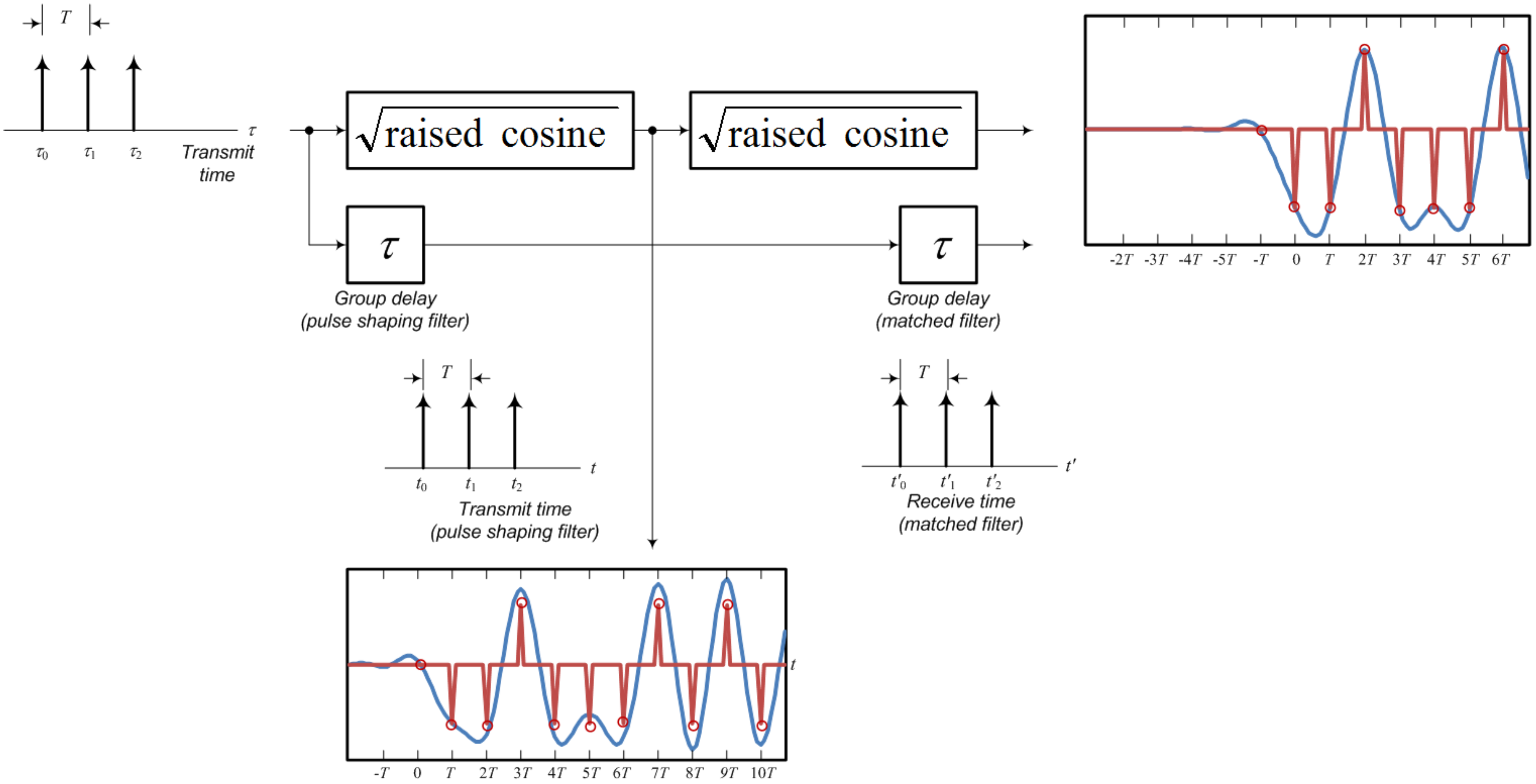
El lóbulo principal de una respuesta es precedido (y seguido) por una serie de lóbulos secundarios. La cola del pulso demodulado que precede el lóbulo principal se denomina *precursor*. El primer pulso demodulado llega en el instante t_0, el primer lóbulo principal llega después de un tiempo $t_3=3T$ (la duración de tres pulsos transmitidos). Las respuestas se van solapando pero no hay ISI ya que en los instantes de muestreo las colas de los otros pulsos cruzan el cero. Un pulso recibido se extingue completamente después de 6 intervalos de pulso. Este intervalo se conoce como el *soporte del pulso*

Interferencia Intersímbolo (ISI)



Una diferencia muy importante entre los pulsos de tipo coseno alzado y raíz de coseno alzado es que éste último genera ISI; sin embargo, se puede utilizar tanto en transmisión como en recepción realizando filtrado adaptado. La función de transferencia total será de tipo coseno alzado por lo que el sistema global no exhibirá ISI

Interferencia Intersímbolo (ISI)



Ecualización

- Muchos canales de comunicación pueden ser caracterizados como filtros limitados en banda con una respuesta al impulso $h_c(t)$ y una respuesta en frecuencia

$$H_c(f) = |H_c(f)| e^{j\theta_c(f)}$$

- $|H_c(f)|$ es la amplitud de la respuesta del canal y $\theta_c(f)$ es la fase de la respuesta del canal
- Un canal ideal (sin distorsión) debe cumplir en la banda W de la señal con las siguientes condiciones:
  - $|H_c(f)|$ debe ser constante
  - $\theta_c(f)$ debe ser una función lineal de la frecuencia (es decir, todas las componentes espectrales de la señal deben tener un retardo constante)
- Si las condiciones anteriores no se cumplen se habla de distorsión de amplitud o de fase
- Estos dos tipos de distorsión suelen ocurrir a la vez en canales con desvanecimiento y producen ISI

Ecualización

- La técnica más popular de ecualización (*corrección de fase*) es la ecualización mediante filtros
- Un ecualizador puede clasificarse de acuerdo con:
  - El tipo de filtro utilizado: lineal (*ecualizadores transversales*) o no lineal (*ecualizadores con decisión retroalimentada* –***Decision Feedback Equalizer***)
  - La forma de operar: preprogramados (*preset*) o adaptativos (*adaptive*)
  - La resolución del filtro o la frecuencia de actualización de la estimación: una muestra por símbolo (*symbol spaced*), múltiples muestras por símbolo (*fractionally spaced*)
- La función de transferencia $H_e(f)$ del ecualizador modifica la función de transferencia global del sistema; no obstante la respuesta al impulso global $H_{RC}(f)$ debe seguir siendo de tipo coseno alzado:

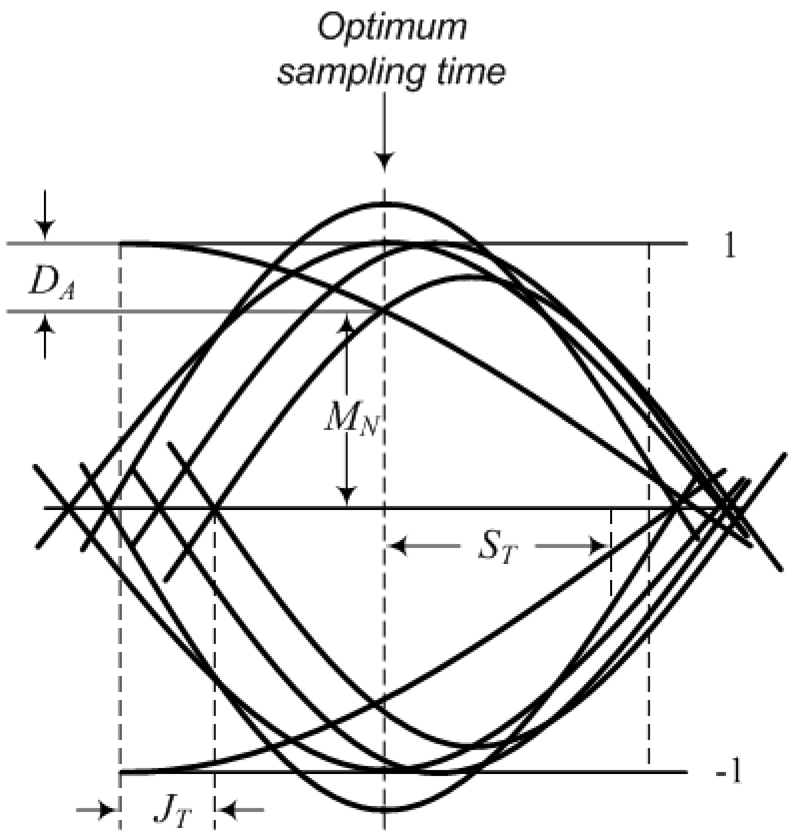
$$H_{RC}(f)=H_t(f)H_c(f)H_r(f)H_e(f)$$

- En sistemas prácticos los filtros de transmisión y recepción son adaptados y realizan un pulso de tipo coseno alzado; es decir: $H_{RC}(f)=H_t(f)H_r(f)$
- Afortunadamente la función de transferencia del canal es sabida lo que permite diseñar para obtener un pulso global de tipo coseno alzado:

$$H_e(f)=\frac{1}{H_c(f)}=|H_c(f)|e^{-j\theta_c(f)}$$

- Cuando se desea una elevada eficiencia espectral se utilizan pulsos de tipo Gaussiano (que desafortunadamente introducen ISI), en este caso el ecualizador debe compensar también el ISI introducida por el filtrado imperfecto

Ecualización

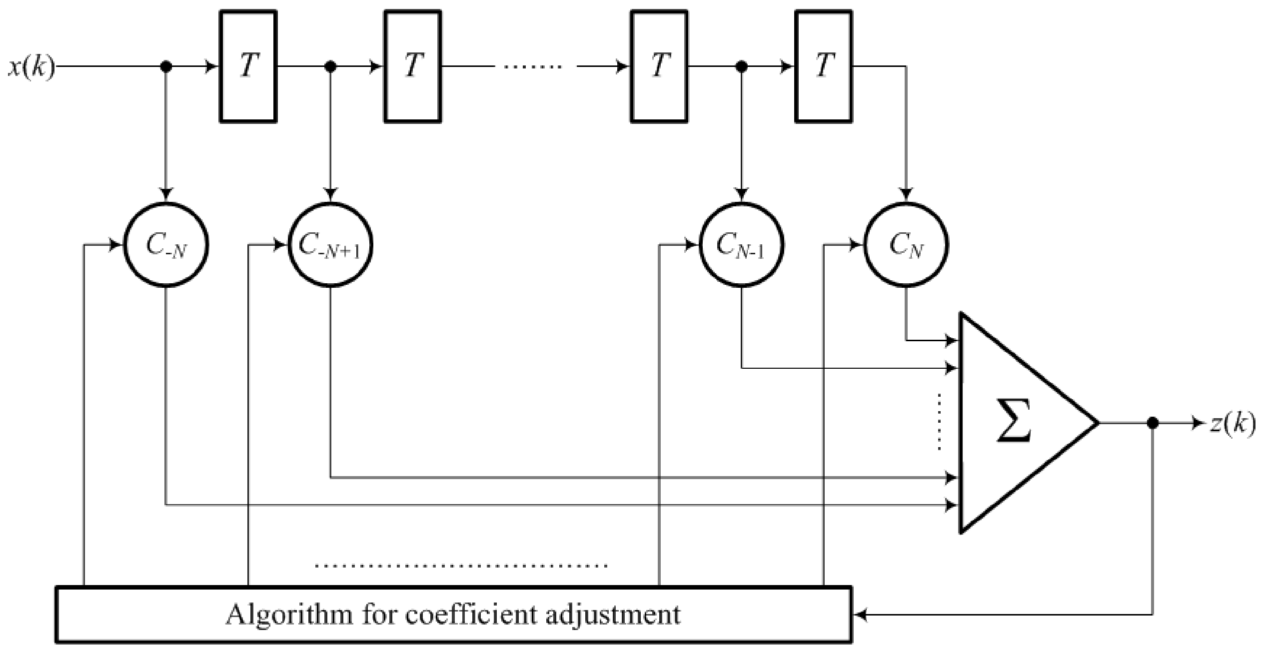


- El tiempo óptimo de muestreo de pulso se obtiene observando el diagrama de ojo del pulso recibido
- Un diagrama de ojo representa los pulsos recibidos superimpuestos durante el tiempo de pulso T
- Un sistema real limitado en banda provoca distorsión en los pulsos
- D_A mide la distorsión causada por ISI
- J_T mide el *jitter*, es decir la diferencia de los tiempos de cruce por cero real e ideal
- M_N representa el margen de ruido
- S_T representa la sensibilidad a errores de sincronización

Ecualización

- El proceso de ecualización se basa en una estimación de la función de transferencia de canal determinada enviando una secuencia pseudoaleatoria
- El efecto de la distorsión de canal es la generación de una serie de ecos que hacen que el pulso de tipo coseno alzado no cruce el cero en los tiempos múltiplos del tiempo de símbolo T
- El diseño del filtro resulta simplificado por el hecho que para la detección sólo se precisan pocas muestras de la señal ecualizada

T es la duración de un símbolo



$$z(k)=\sum_{n=-N}^{N} x(k-n)c_n \quad k=-2N,\ldots,2N \quad n=-N,\ldots,N$$

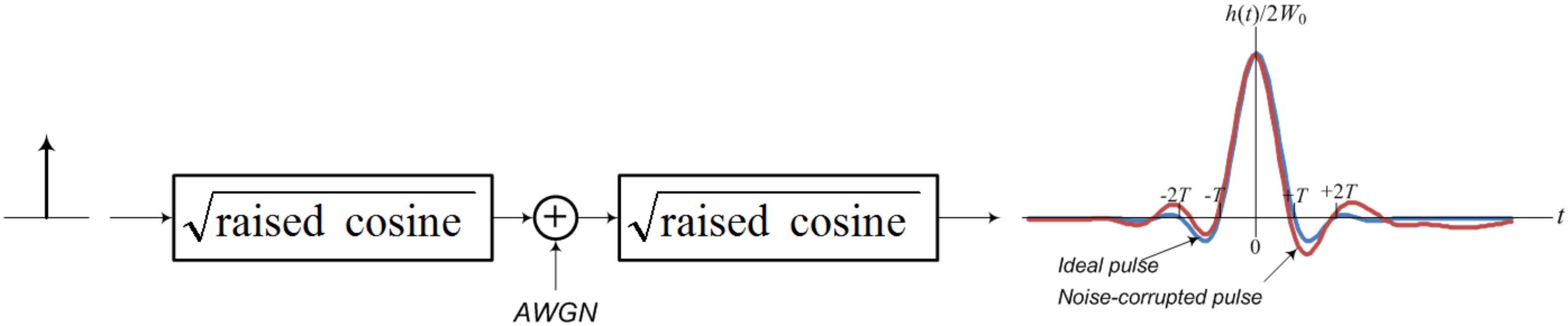
Ecualización

Secuencia de muestras de un pulso (vector) desplazadas en el tiempo.

$$\mathbf{z}=\mathbf{x}\mathbf{c}\Rightarrow\begin{bmatrix} z(-2N) \\ \vdots \\ z(0) \\ \vdots \\ z(2N) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x(-N) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ x(N) & x(N-1) & \cdots & x(-N+1) & x(-N) \\ 0 & 0 & \cdots & x(N) & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x(N) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{-N} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}$$

El número de columnas de la matriz representa el número de muestras tomadas por cada pulso (y el número de coeficientes del filtro ecualizador). El número de coeficientes depende del nivel de precisión deseada ya que determinan hasta que instante queremos considerar los efectos de la cola de un pulso sobre los pulsos adyacentes. Las dimensiones del vector $\mathbf{z}$ y el número de filas de la matriz $\mathbf{x}$ son arbitrarios. La matriz $\mathbf{x}$ es $(4N+1)\times(2N+1)$. Si la matriz es cuadrada los coeficientes pueden calcularse como: $\mathbf{c}=\mathbf{x}^{-1}\mathbf{z}$

Ecualización



Se transforma el sistema de ecuaciones sobredeterminado en un conjunto determinista de $(2N+1)$ ecuaciones de $(2N+1)$ variables. Un ecualizador de tipo *zero-forcing* minimiza los picos del ISI seleccionando unos coeficientes c_n de manera que la salida del ecualizador es forzada a cero durante las N muestras que preceden y las N que siguen el pulso deseado.

$$z(k)=\begin{cases}1 & \text{for } k=0\\ 0 & \text{for } k=\pm1,\pm2,\ldots,\pm N\end{cases}$$

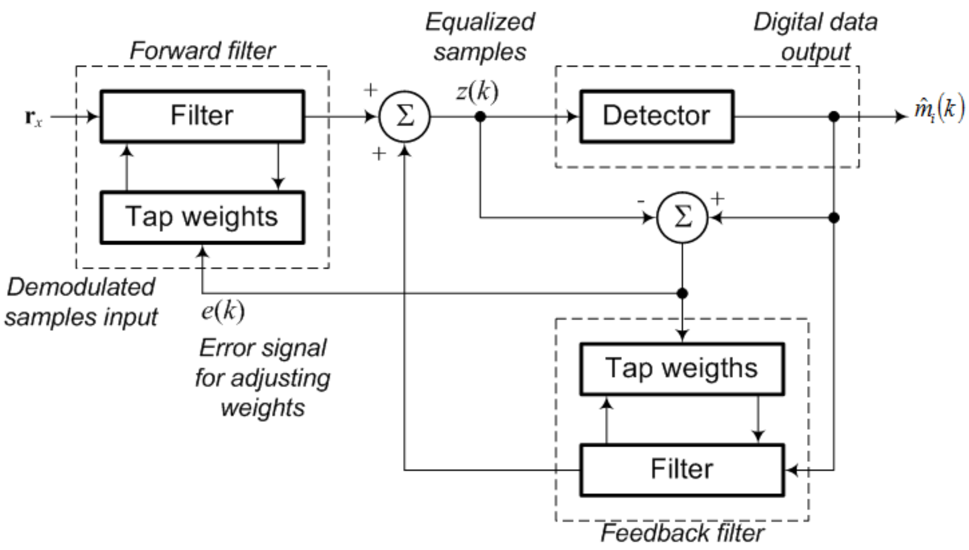
Ecualización

- Un ecualizador *zero-forcing* no es siempre la mejor solución porque desprecia los efectos del ruido
- Una estimación más robusta se obtiene calculando los coeficientes del filtro de manera que se minimice el error cuadrático medio (*Mean-Square Error* –MSE) de la suma entre todos los términos que generan ISI y la potencia de ruido en la salida del ecualizador
- El MSE es definido como el valor esperado del cuadrado de la diferencia entre el símbolo deseado y el símbolo estimado
- La solución MSE se obtiene a partir de sistema sobredeterminado realizando la siguiente transformación:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{z} = \mathbf{x}^T\mathbf{x}\mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{R}_{xz}\mathbf{z} = \mathbf{R}_{xx}\mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{c} = \mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{R}_{xz}$$

- Donde $\mathbf{R}_{xz}=\mathbf{x}^T\mathbf{z}$ es el *vector de intercorrelación* y $\mathbf{R}_{xx}=\mathbf{x}^T\mathbf{x}$ la *matriz de autocorrelación*

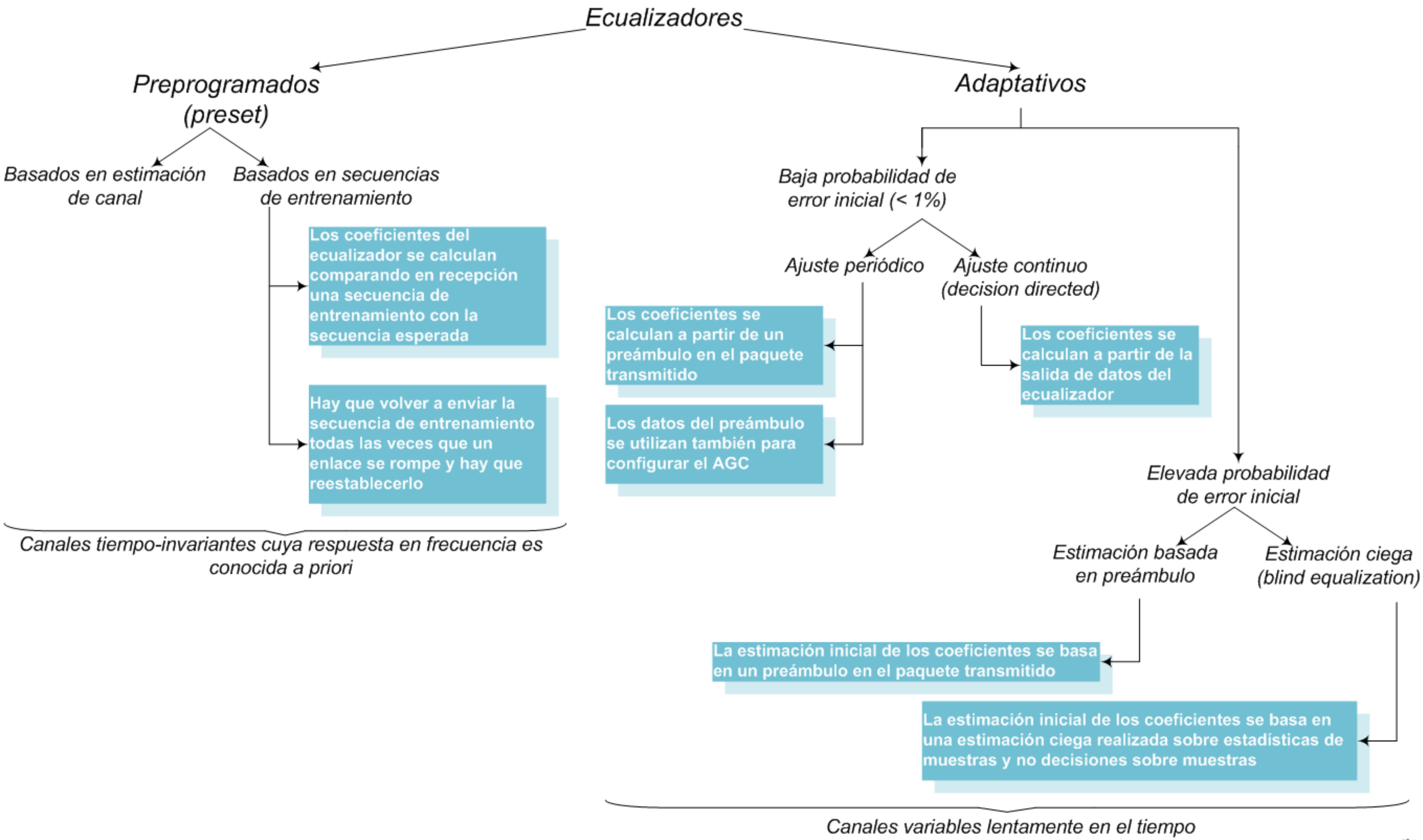
Ecualización



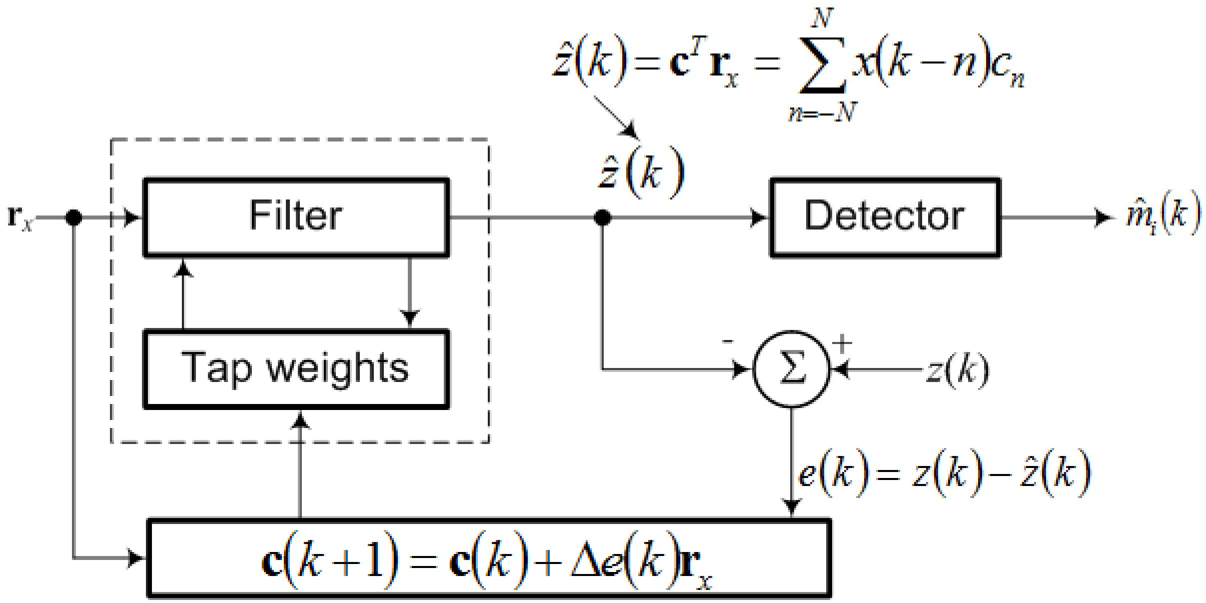
- Un ecualizador lineal tiene prestaciones muy pobres en el caso de canales de transmisión que presentan ceros espectrales (como es el caso de sistemas inalámbricos)
- Un ecualizador de decisión retroalimentada (DFE) es un ecualizador no lineal que utiliza las decisiones tomadas sobre pulsos anteriores para eliminar el ISI sobre el pulso que se está demodulando
  - El ISI que se elimina es el causado por las colas de los pulsos anteriores, por lo que este ecualizador sustrae al pulso actual la distorsión causada por los pulsos anteriores (asumiendo que los pulsos anteriores hayan sido correctamente recibidos)
- <u>La ventaja de un DFE es que el filtro de realimentación (es decir, el que trabaja para eliminar el ISI) opera sobre muestras cuantificadas libres de ruido, por tanto su salida no contiene ruido de canal</u>

<u>Un DFE sustrae al símbolo actual el símbolo anterior multiplicado por unos coeficientes de ponderación</u>. Los coeficientes de ponderación del símbolo actual y del anterior se calculan de forma simultánea y se ajustan a algún criterio de selección como el MSE.

Ecualización



Ecualización



Δ es un coeficiente que limita la variación de los coeficientes del filtro garantizando la estabilidad. La estabilidad del algoritmo de actualización de los coeficientes está asegurada si Δ es más pequeño que el recíproco de la energía de los datos en el filtro. El algoritmo converge en la media a la solución óptima con una varianza Δ. Por tanto, por un lado queremos Δ grande para una convergencia rápida, y por otro Δ pequeño para asegurar la estabilidad y una varianza pequeña en estado estable. Existen soluciones híbridas en las que Δ es grande en las primeras iteraciones para privilegiar la convergencia, y pequeño en las sucesivas para privilegiar la estabilidad.

Los algoritmos para el cálculo de los coeficientes óptimos son iterativos y se basan en un promedio de los datos recibidos. Los más robustos, como el LMS (*Least Mean Square*) utilizan estadísticas de datos con ruido. <u>El LMS se basa en una estimación del gradiente de error para ajustar los coeficientes en la dirección que reduce el error cuadrático medio</u>

Ecualización

- Si la señal de entrada del ecualizador es muestreada a una frecuencia $1/T$ (T es el tiempo de símbolo) se habla de ecualizador con espaciado de símbolo (*symbol-spaced equalizer*)
- Si la señal de entrada no es estrictamente limitada en banda, muestrear la salida del ecualizador a una frecuencia $1/T$ puede provocar *aliasing* (es decir, plegado espectral de las componentes a frecuencias superiores a $1/T$)
- Los ecualizadores de espaciado fraccionario (*fractionally-spaced equalizer*) resuelven este problema muestreando en instantes múltiplos de T':

$$T' \leq \frac{T}{(1+r)}$$

- El ancho de banda W de la señal recibida resulta pues:

$$W \leq \frac{(1+r)}{T}$$

- El objetivo de diseño es escoger T' de manera que la función de transferencia $H_e(f)$ del ecualizador sea lo suficientemente extensa como para acomodar el espectro completo de la señal de entrada