# Lección 2: Señales y Espectros. Parte II

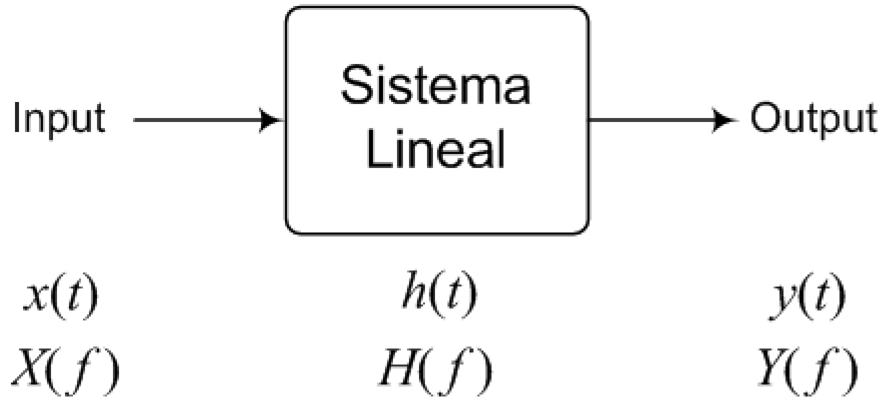
Gianluca Cornetta, Ph.D.
Dep. de Ingeniería de Sistemas de Información y Telecomunicación
Universidad San Pablo-CEU

# Contenido

- Transmisión de Señales y Sistemas Lineales
- Ancho de Banda de Datos Digitales

# Transmisión de Señales y Sistemas Lineales

- Un sistema puede ser caracterizado tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia
- Caracterizar un sistema equivale a poder analizar su respuesta a una señal de entrada arbitraria $x(t)$
  - En el dominio de la frecuencia, $x(t)$ es sustituida por su *transformada de Fourier* $X(f)$
- En el dominio del tiempo un sistema es caracterizado por su *respuesta al impulso* $h(t)$, mientras que en el dominio de la frecuencia por su *función de transferencia* $H(f)$. Estas funciones se utilizan para determinar respectivamente las respuestas del sistema en el dominio del tiempo $y(t)$ y de la frecuencia $Y(f)$



# Transmisión de Señales y Sistemas Lineales

- Un *sistema lineal invariante por traslaciones temporales* es caracterizado por su respuesta al impulso $h(t)$:

$$y(t) = h(t) \quad \text{cuando } x(t) = \delta(t)$$

- A partir de la respuesta al impulso es posible construir la respuesta para una señal de entrada arbitraria $x(t)$:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

- Donde $*$ denota el operador de convolución
- Para un *sistema causal* el integral de convolución resulta ser:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{0}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{0}^{+\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau$$

# Transmisión de Señales y Sistemas Lineales

- La salida en el dominio de la frecuencia $Y(f)$ se obtiene realizando la transformada de Fourier del producto de convolución:

$$Y(f) = X(f)H(f) \Rightarrow H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

- Donde $H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ y $X(f) \neq 0$ para todas las frecuencias $f$
- En general $H(f)$ es una función compleja que puede expresarse como:

$$H(f) = |H(f)| e^{j\theta(f)}$$

- Donde $|H(f)|$ es el módulo (magnitud de la respuesta) y la fase $\theta$ puede definirse como:

$$\theta(f) = \tan^{-1} \frac{\mathrm{Im}\{H(f)\}}{\mathrm{Re}\{H(f)\}}$$

# Transmisión de Señales y Sistemas Lineales

- Si la entrada de un sistema lineal e invariante por traslaciones temporales es un proceso aleatorio, también la salida del sistema será un proceso aleatorio
- La densidad espectral de potencia en entrada $G_X(f)$, y en salida $G_Y(f)$, estarán relacionadas de la siguiente manera:

$$G_Y(f) = G_X(f)\left|H(f)\right|^2$$

# Transmisión de Señales y Sistemas Lineales

- El objetivo de diseño es que *la transmisión de una señal a través de una red aproxime lo más posible el caso ideal*
- La salida $y(t)$ de una línea de transmisión ideal es <u>una réplica exacta y sin distorsiones de la señal de entrada $x(t)$ que puede diferir de $x(t)$ sólo por un retardo y un eventual cambio de escala</u>, es decir:

$$y(t) = Kx(t - t_0)$$

- Donde $K$ y $t_0$ son constantes
- En el dominio de Fourier se obtiene:

$$Y(f) = KX(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

- Por tanto, resulta que, para que la transmisión sea sin distorsiones, <u>un sistema debe tener una respuesta con magnitud constante y una fase con una dependencia lineal de la frecuencia</u>:

$$H(f) = Ke^{-j2\pi f t_0}$$

- <u>Todas las componentes a las distintas frecuencias deben experimentar un retardo de propagación idéntico a través de la línea de manera que se puedan sumar correctamente en la salida</u>

# Transmisión de Señales y Sistemas Lineales

- El retardo $t_0$ está relacionado con la rotación de fase $\theta$ y la frecuencia angular $\omega$=$2\pi f$:

$$\theta(f) = 2\pi f t_0 \Rightarrow t_0 = \frac{\theta}{2\pi f}$$

- La rotación de fase debe ser proporcional a la frecuencia para que el retardo de todos los componentes sea idéntico
- La figura de mérito que mide la distorsión de retardo de una señal se denomina *retardo de envolvente* o *retardo de grupo* $\tau(f)$:

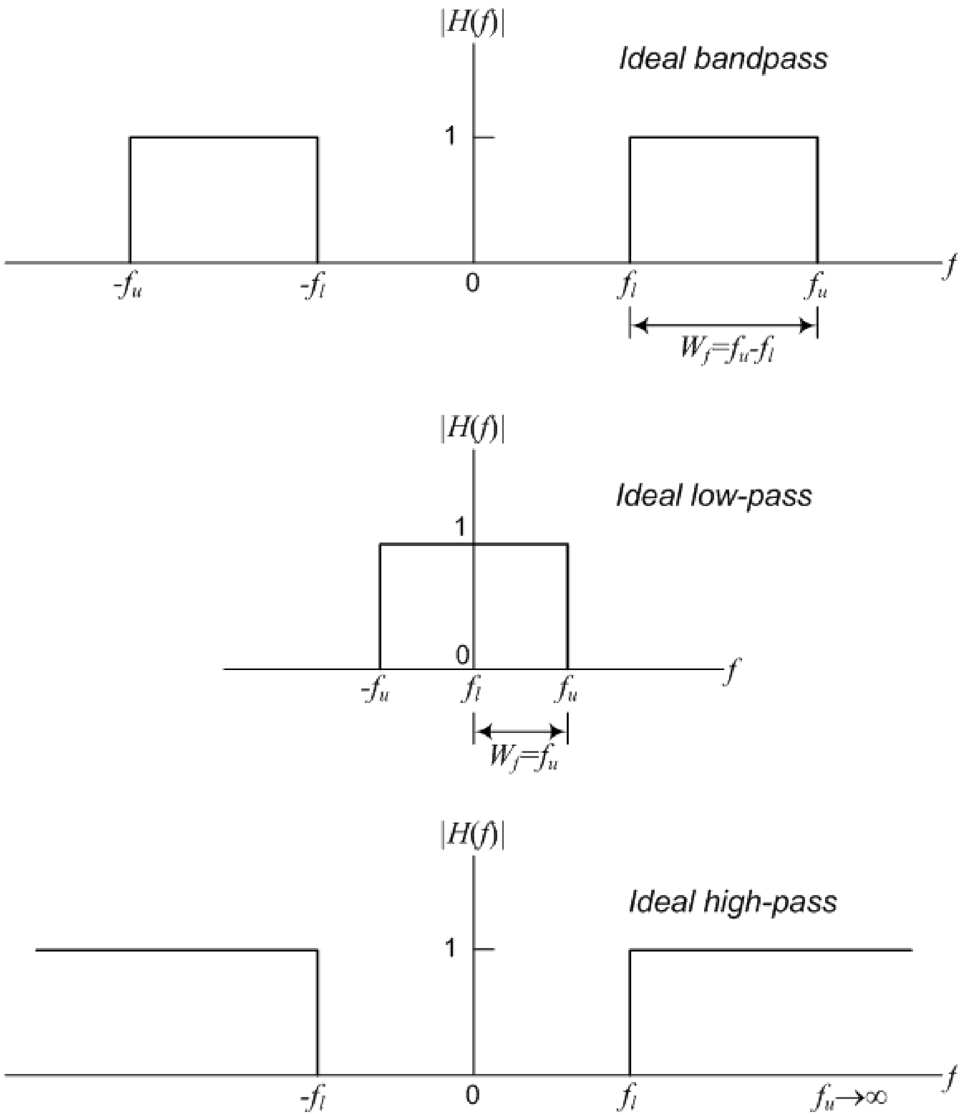
$$\tau(f) = -\frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(f)}{df}$$

- <u>Para que la transmisión sea sin distorsión $\tau(f)$ debe ser constante</u>

# Transmisión de Señales y Sistemas Lineales

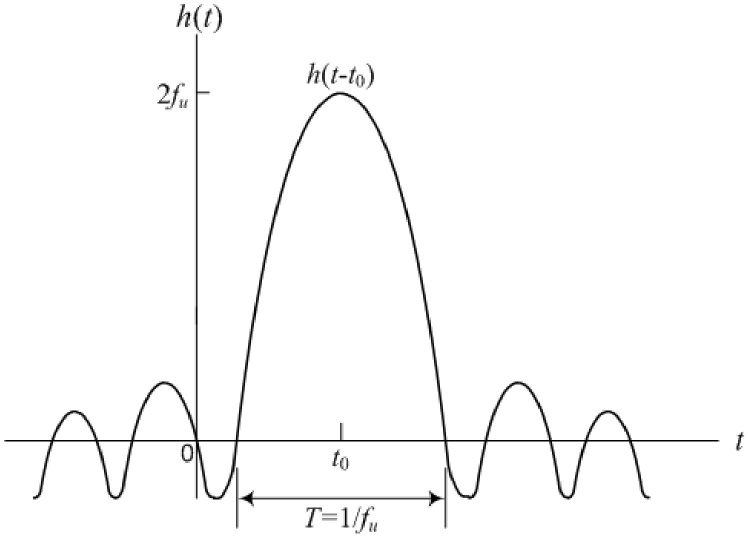
- La red que garantiza una transmisión ideal de la información no es realizable en la realidad ya que requeriría un ancho de banda infinito
- El ancho de banda de un sistema es definido como el intervalo de frecuencias para las que la magnitud $|H(f)|$ se mantiene constante
- Una red de transmisión sin distorsión se aproxima con un filtro ideal
  - Un filtro ideal es un circuito selectivo que deja pasar sin distorsiones todas las componentes de frecuencia incluidas entre un límite inferior $f_l$ y uno superior $f_u$
  - $f_l$ es la *frecuencia de corte inferior*, $f_u$ es la *frecuencia de corte superior*
  - El rango de frecuencias $f_l < f < f_u$ se denomina *banda de paso*. El *ancho de banda efectivo* $W_f$ de la banda de paso es $W_f = (f_u - f_l)$

# Transmisión de Señales y Sistemas Lineales




- *Filtro paso-banda*: $f_l \neq 0$ y $f_u \neq \infty$
- *Filtro paso-bajo*: $f_l = 0$ y $f_u$ finito
- *Filtro paso-alto*: $f_l \neq 0$ y $f_u \rightarrow \infty$

# Transmisión de Señales y Sistemas Lineales




- Asumiendo $K=1$, en el caso de un filtro paso-bajo ideal con ancho de banda $W_f = f_u$ Hz, la función de transferencia puede expresarse de La siguiente manera:

$$H(f) = |H(f)| e^{-j\theta(f)}$$

- Donde:

$$|H(f)| = \begin{cases} 1 & \text{para } |f| < f_u \\ 0 & \text{para } |f| \geq f_u \end{cases}$$

$$e^{j\theta(f)} = e^{-j2\pi f t_0}$$

- La respuesta al impulso del filtro paso-pajo ideal es:

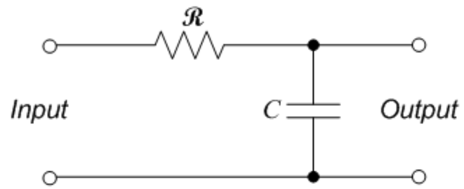
$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-f_u}^{+f_u} e^{-j2\pi f t_0} e^{j2\pi f t} df =$$

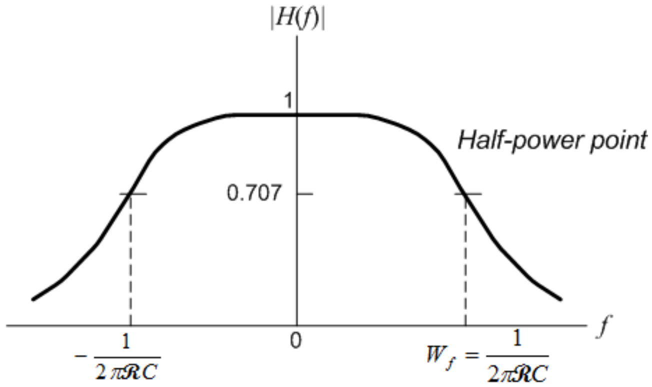
$$\int_{-f_u}^{+f_u} e^{j2\pi f(t-t_0)} df = 2 f_u \frac{\sin 2\pi f_u (t-t_0)}{2\pi f_u (t-t_0)} = 2 f_u \text{sinc} 2 f_u (t-t_0)$$

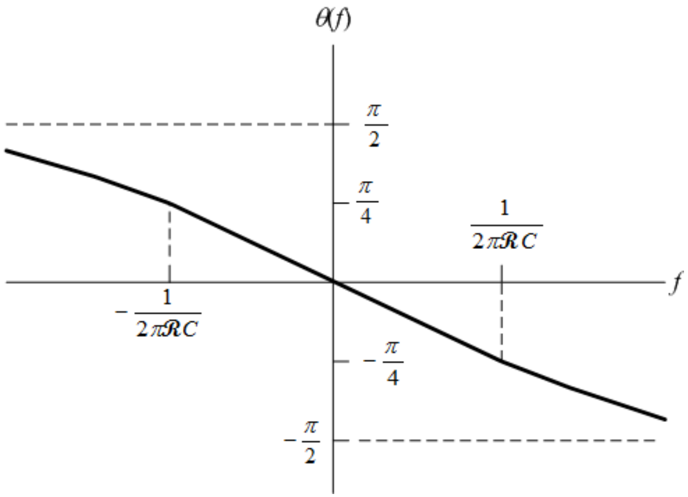
- <u>La respuesta al impulso del filtro paso-bajo ideal es no causal por lo que el filtro no es realizable en la práctica</u>

# Transmisión de Señales y Sistemas Lineales




- El filtro realizable más sencillo es el filtro paso-bajo , cuya función de transferencia es:

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f\mathcal{R}C} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f\mathcal{R}C)^2}} e^{-j\theta(f)}$$

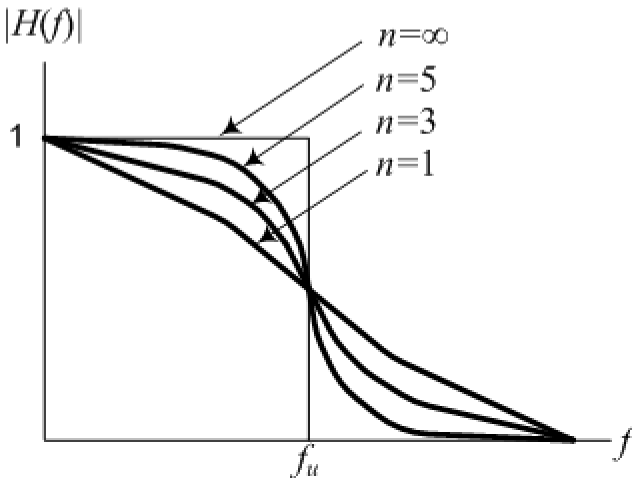
- Donde $\theta(f) = \tan^{-1} 2\pi f\mathcal{R}C$
- La banda de -3 dB del filtro paso-bajo es definida como la <u>frecuencia a la que la potencia de la señal ha disminuido de un factor 2</u> (o su tensión de pico de un factor $1/\sqrt{2}$ )
- Por definición:

$$\text{number of dB} = 10\log_{10}\frac{P_2}{P_1} = 10\log_{10}\frac{V_2^2/\mathcal{R}_2}{V_1^2/\mathcal{R}_1}$$

- Normalmente se suelen manejar potencias normalizadas para las que $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = 1\Omega$, por tanto:

$$\text{number of dB} = 10\log_{10}\frac{P_2}{P_1} = 10\log_{10}\frac{V_2^2}{V_1^2}$$

# Transmisión de Señales y Sistemas Lineales




- La amplitud de la respuesta puede expresarse en dB:

$$\left|H(f)\right|_{\mathrm{dB}} = 20\log_{10}\frac{V_2}{V_1} = 20\log_{10}\left|H(f)\right|$$

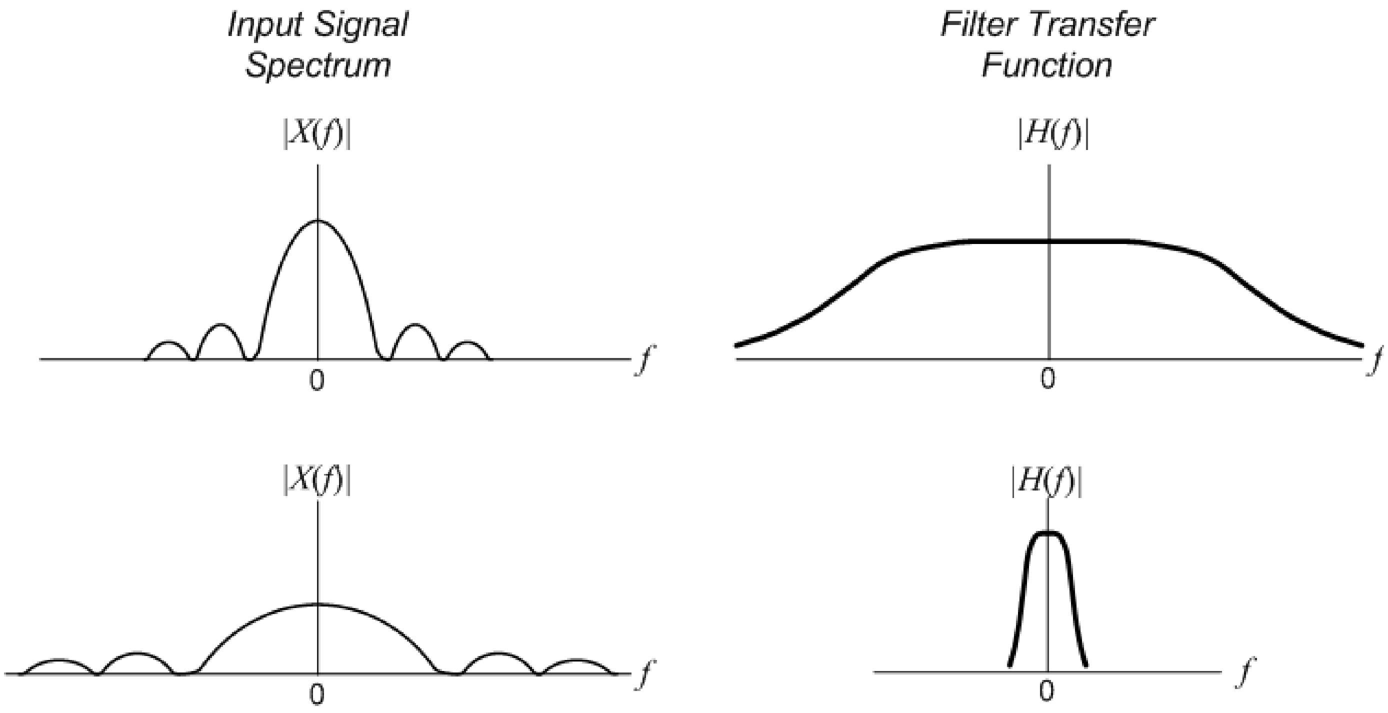
- El punto de media potencia (*half-power point*) del filtro $\mathcal{R}C$ paso-bajo es $\omega = 1/\mathcal{R}C$ rad/s o $f=1/(2\pi\mathcal{R}C)$ Hz. Por tanto la banda $W_f$ en Hz es $1/(2\pi\mathcal{R}C)$.
- El factor de forma del filtro (*shape factor*) es un indicador de cuanto efectivamente un filtro es realizable y es la relación entre las bandas del filtro en los puntos cuyas amplitud de respuesta valen -60 dB y -6 dB respectivamente (cuanto más pequeño es el factor de forma, más abrupta es la respuesta y más difícil es la implementación)
- Hay varias aproximaciones matemáticas de la respuesta de un filtro, una de éstas es el *filtro de Butterworth* (o filtro de respuesta máximamente plana –*maximal flatness*)
- La respuesta de Butterworth aproxima el comportamiento de un filtro paso-bajo con:

$$\left|H_n(f)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(f/f_u\right)^{2n}}} \qquad \text{con } n \geq 1$$

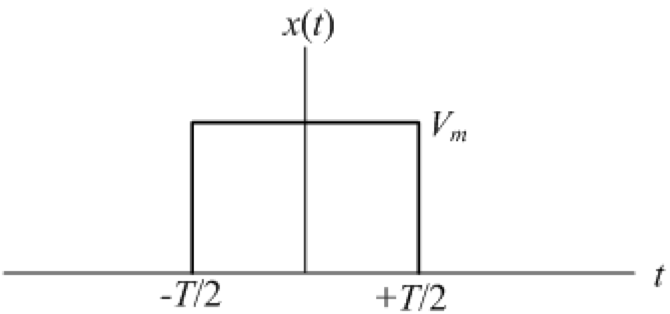
- Donde $f_u$ es la frecuencia de corte superior a -3 dB y $n$ representa el orden del filtro. Más grande es el orden, más complejo y difícil de implementar es el filtro

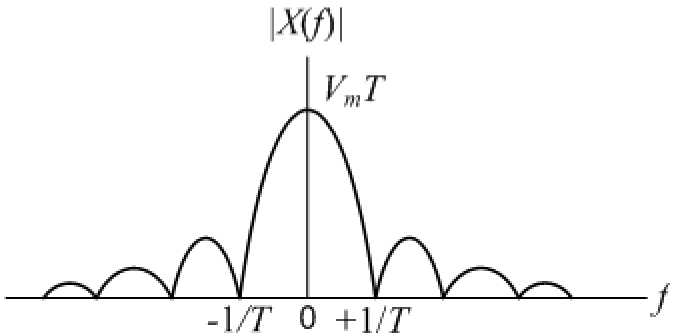
# Transmisión de Señales y Sistemas Lineales

- Las señales se caracterizan por su espectro, los circuitos o sistemas por su función de transferencia de frecuencia
- La respuesta de un sistema será el producto entre los espectros de señal y función de transferencia y será dominada por la contribución con el menor ancho de banda



# Transmisión de Señales y Sistemas Lineales



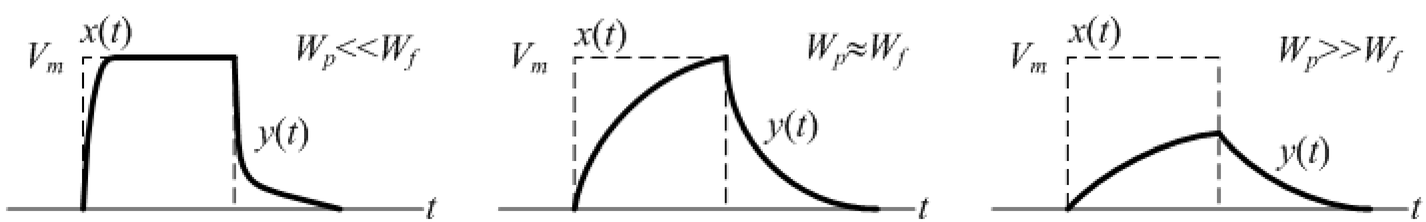




- El efecto del filtro sobre una señal puede estudiarse también en el dominio del tiempo. En este caso la respuesta $y(t)$ se obtiene realizando la convolución entre el pulso ideal $x(t)$ (de amplitud $V_m$ y duración $T$) y la respuesta al impulso del filtro paso-bajo $\mathcal{R}C$:

$$y(t) = \begin{cases} V_m\left(1-e^{-t/\mathcal{R}C}\right) & \text{para } 0 \le t \le T \\ V'_m e^{-(t-T)/\mathcal{R}C} & \text{para } t > T \end{cases}$$

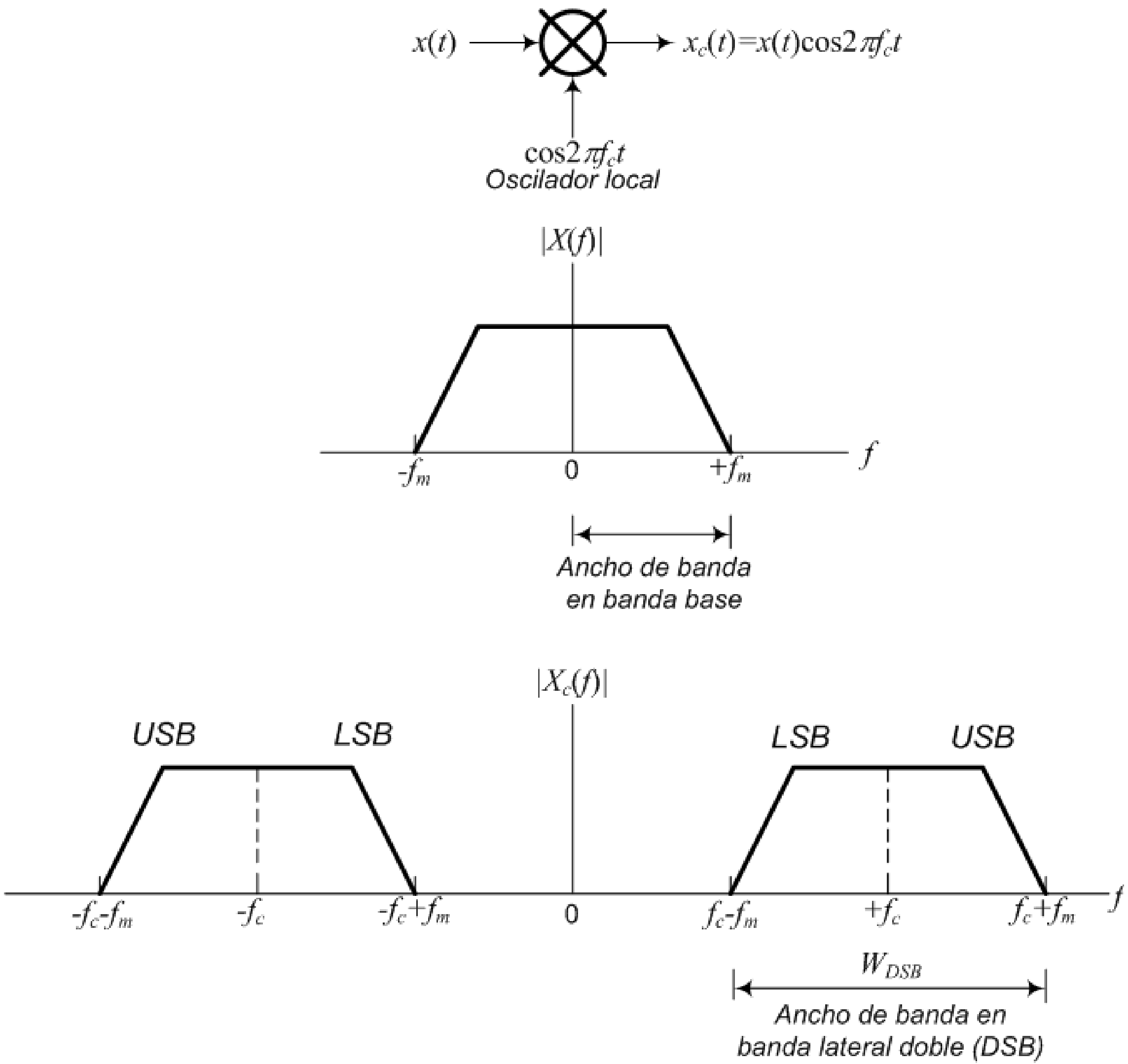
$$\text{donde } \; V'_m = V_m\left(1-e^{-T/\mathcal{R}C}\right)$$

- El ancho de banda del pulso es $W_p=1/T$, mientras que la del filtro es $W_f=1/(2\pi\mathcal{R}C)$
- Pueden verificarse tres casos:
  - $W_p \ll W_f$ $(T \gg 2\pi\mathcal{R}C)$ *buena fidelidad*
  - $W_p \approx W_f$ $(T \approx 2\pi\mathcal{R}C)$ *detectabilidad buena*
  - $W_p \gg W_f$ $(T \ll 2\pi\mathcal{R}C)$ *detectabilidad pobre*




*Good-fidelity output* *Good-recognition output* *Poor-recognition output*

# Ancho de Banda de Datos Digitales




- Una forma fácil de desplazar una señal paso-bajo o banda base $x(t)$ con un ancho de banda $f_m$, a una frecuencia más elevada consiste en multiplicarla por una portadora sinusoidal $\cos 2\pi f_c t$ con $f_c >> f_m$ (*superheterodinación*) obteniendo una *señal modulada de banda lateral doble* (DSB) $x_c(t)$ :

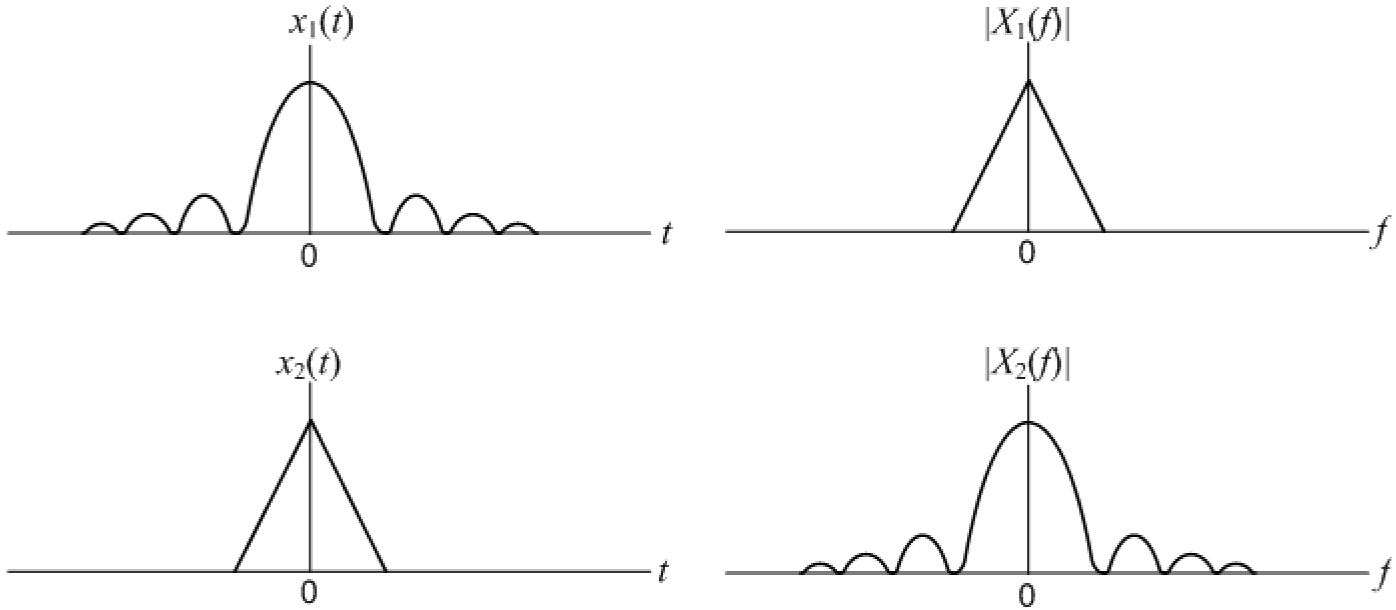
$$x_c(t) = x(t)\cos 2\pi f_c t$$

- En el dominio de la frecuencia se obtiene:

$$X_c(f) = \frac{1}{2}\left[X(f - f_c) + X(f + f_c)\right]$$

- Imágenes de los espectros en las bandas USB y LSB se encuentran en la parte de frecuencias negativas de $|X_c(f)|$
- Para transmitir una señal modulada DSB hace falta un ancho de banda $W_{DSB}=2f_m$ igual al doble de la banda en banda base

# Ancho de Banda de Datos Digitales




- Una señal estrictamente limitada en banda es irrealizable en la práctica ya que es ilimitada en el dominio del tiempo
- Por otro lado, una señal limitada en el tiempo es físicamente realizable pero su implementación no es viable ya que es ilimitada en el dominio de las frecuencias

# Ancho de Banda de Datos Digitales

$$G_x(f) = T\left[\frac{\sin \pi (f - f_c)T}{\pi (f - f_c)T}\right]^2$$