Lección 1: Señales y Espectros. Parte I

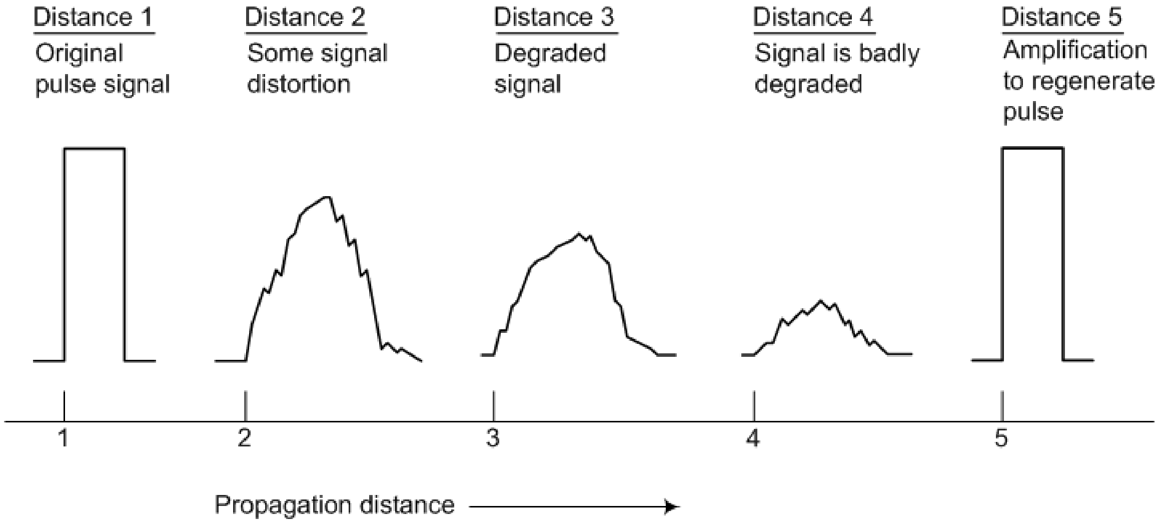
Gianluca Cornetta, Ph.D.
Dep. de Ingeniería de Sistemas de Información y Telecomunicación
Universidad San Pablo-CEU

Contenido

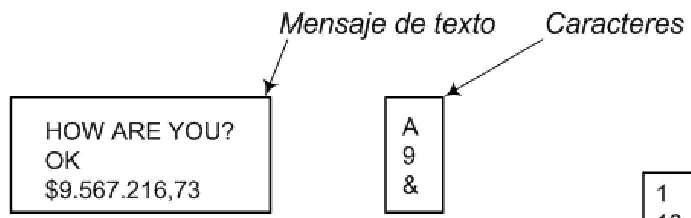
- Las Comunicaciones Digitales
- Clasificación de Señales
- Densidad Espectral
- Autocorrelación
- Señales Aleatorias

Las Comunicaciones Digitales

- Una forma de onda que se propaga a través de un medio de transmisión es afectada por dos tipos de no idealidades:
  - Los medios de transmisión no son ideales y exhiben una función de transferencia que distorsiona un pulso ideal
  - Ruido eléctrico u otras interferencias que distorsionan ulteriormente el pulso ideal
- Las señales digitales (al contrario de las analógicas) tienen la ventaja:
  - De tener sólo dos estados por lo que pueden ser fácilmente regeneradas
  - De poder reducir los errores en recepción mediante técnicas de detección y corrección de error
- Los circuitos digitales son más baratos y flexibles que los analógicos
- Distintos tipos de señales digitales pueden ser tratados como señales idénticas, es decir como bits de información y manejados en grupos llamados paquetes
- Sin embargo, los sistemas digitales tienen también algunos inconvenientes:
  - Tienden a utilizar de formas intensivas funciones DSP
  - Tienden a dedicar muchos recursos para la sincronización
  - Son afectados por una degradación abrupta de la calidad de la señal (*nongraceful degradation*) cuando la relación señal-ruido va por debajo de cierto umbral

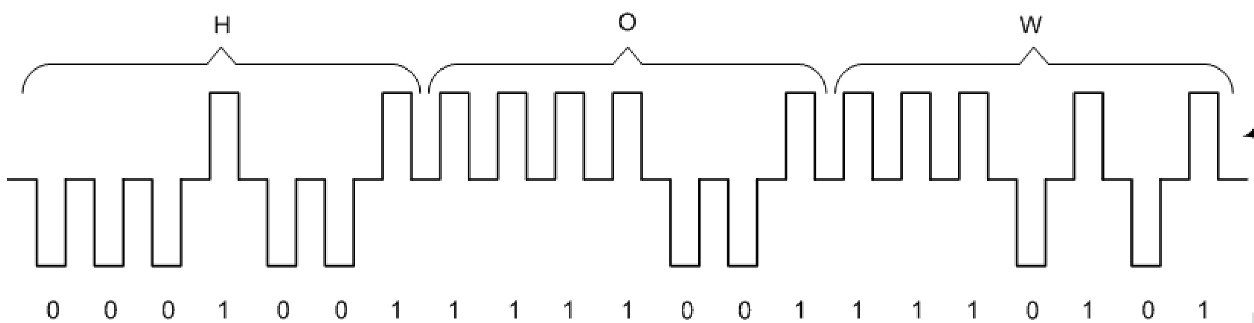


Las Comunicaciones Digitales

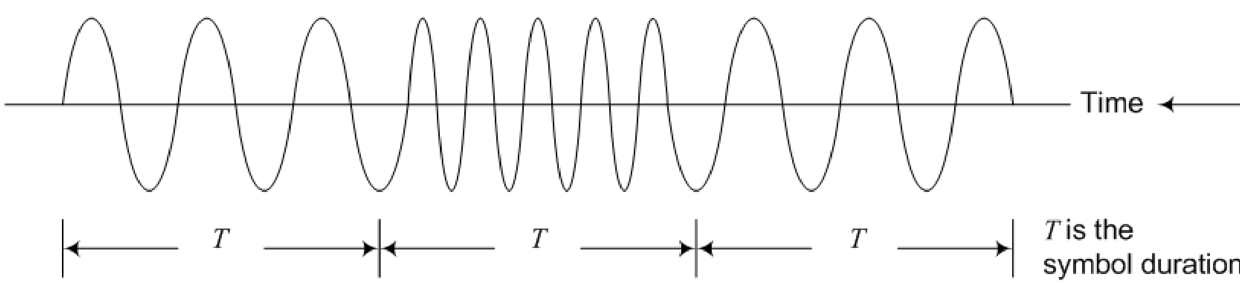


Un símbolo es un grupo de k bits considerados como un mensaje unitario m_i dentro de un alfabeto de M símbolos. Para expresar la velocidad de transmisión de un símbolo (*symbol rate*) se suele utilizar el *Baud* como unidad de medida.

1	Binary Symbol (k= 1 M=2^K=2)
10	Quaternary Symbol (k= 2 M=2^K=4)
011	8-ary Symbol (k= 3 M=2^K=8)



Un *bit stream* es una secuencia de dígitos binarios (0 y 1). Se trata de una señal en banda base por lo que su contenido espectral se extiende de DC hasta pocos MHz. En la práctica la secuencia de pulsos de dos niveles transmitidos no están separados por espacios ya que un espacio no contiene información útil y aumenta el ancho de banda necesario para transmitir la información y el tiempo para decodificar el mensaje.



Una *forma de onda digital* es una secuencia de pulsos en banda base o una sinusoide en banda de paso. Las características de la forma de onda (anchura, amplitud y posición para los pulsos; amplitud, frecuencia y fase para la sinusoide) permiten identificar el símbolo transmitido dentro del alfabeto. Aunque la forma de onda sinusoidal es de tipo analógico, se trata de una señal digital ya que la información está codificada digitalmente como una serie de símbolos de duración T que representan una particular secuencia binaria. La tasa de transmisión de datos (*Data Rate*) se mide en bits/s y es R=(k/T)=(1/T)$\log_2 M$.

Las Comunicaciones Digitales

- La diferencia fundamental entre comunicaciones analógicas y digitales es la forma con la que se miden sus prestaciones:
  - En las comunicaciones analógicas las formas de onda son continuas y forman un conjunto infinito, por tanto las figuras de mérito se basan sobre fidelidad entre señal recibida y transmitida: *relación señal-ruido, porcentaje de distorsión, error cuadrático medio esperado*
  - En las comunicaciones digitales se transmiten señales que representan dígitos binarios que forman parte de un alfabeto finito conocido a priori por el receptor, por tanto la figura de mérito que se suele utilizar en sistemas digitales es la *probabilidad de detectar de forma incorrecta un dígito* (P_E)

Clasificación de Señales

- *Señales deterministas y aleatorias*
  - Una ***señal es determinista*** si no hay ninguna incertidumbre sobre su valor en un instante de tiempo determinado y puede expresarse mediante una cualquiera función matemática del tiempo (ej. $x(t)=5\cos 10t$)
  - Una ***señal aleatoria*** (o también *proceso aleatorio*) tiene cierto grado de incertidumbre en su valor por lo que no es posible expresarla con una función matemática; no obstante una señal aleatoria presenta ciertas regularidades que pueden ser descritas mediante probabilidades y medias estadísticas
- *Señales periódicas y aperiódicas*
  - Una **señal** $x(t)$ es ***periódica en el tiempo*** t si existe una constante $T_0 > 0$ tal que $x(t)=x(t+T_0)$ para $-\infty< t <+\infty$. El valor más pequeño de T_0 que satisface esta expresión se denomina el *periodo de* $x(t)$. Si no existe ningún valor de que cumpla con este requerimiento, ***la señal se define aperiódica***
- *Señales analógicas y discretas*
  - Una ***señal analógica*** $x(t)$ es una función continua del tiempo y es definida de forma unívoca para todos los valores de t. Por el contrario, una ***señal discreta*** $x(kT)$ existe sólo durante intervalos de tiempo discretos y es caracterizada por una secuencia de números definida en cada instante kT, donde k es un entero y T un intervalo de tiempo fijo

Clasificación de Señales

- *Señales de potencia y energía*
  - Una señal eléctrica puede representarse mediante una tensión $v(t)$ o una corriente $i(t)$ con una potencia instantánea $p(t)$ disipada a través de una resistencia $\mathcal{R}$

$$p(t) = \frac{v^2(t)}{\mathcal{R}} = i^2(t)\mathcal{R}$$

  - En los sistemas de telecomunicación, la potencia es a menudo *normalizada* respecto a una resistencia unitaria (es decir $\mathcal{R}=1\Omega$). Si es necesario utilizar el valor real de la resistencia del sistema, es necesaria una operación de *denormalización* de la potencia
  - La ventaja de la forma normalizada es la de poder expresar de la misma forma tanto señales de tensión como de corriente $p(t)=x^2(t)$

Clasificación de Señales

- *Señales de potencia y energía (cont.)*
  - La ***energía disipada*** durante el intervalo de tiempo $(-T/2,+T/2)$ por una señal con potencia instantánea normalizada es:

$$E_x^T = \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t)\,dt$$

  - La ***potencia media disipada*** por la señal durante el mismo intervalo de tiempo es:

$$P_x^T = \frac{1}{T} E_x^T = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t)\,dt$$

  - *Las prestaciones de un sistemas de telecomunicación dependen de la energía de la señal recibida* (más elevada es la energía de la señal, menor es la probabilidad de error de recepción)
  - *La potencia representa la velocidad con la que la energía es entregada*. La potencia es importante ya que determina las tensiones que deben ser aplicadas al transmisor y la intensidad del campo electromagnético necesario para transmitir la señal en el medio deseado

Clasificación de Señales

- *Señales de potencia y energía (cont.)*
  - En el análisis de sistemas de telecomunicación conviene utilizar ***señales de energía***. $x(t)$ puede considerarse una ***señal de energía***, si y solo si tiene energía finita y no nula ($0 < E_x < \infty$) durante todo el tiempo, siendo E_x :

$$E_x = \lim_{T \to \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t)dt = \int_{+\infty}^{-\infty} x^2(t)dt$$

  - En el mundo real todas las señales tienen energía finita; sin embargo, para describir señales periódicas que por definición existen durante todo el tiempo y por tanto tienen energía infinita, y señales aleatorias, ellas también con energía infinita, es conveniente definir otra clase de señales llamada ***señales de potencia***. $x(t)$ puede considerarse una ***señal de potencia***, si y solo si tiene potencia finita y no nula ($0 < P_x < \infty$) durante todo el tiempo, siendo P_x :

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t)dt$$

  - Las clasificaciones de energía y potencia son mutuamente exclusivas. *Una **señal de energía** tiene energía finita pero potencia media nula*, mientras que *una **señal de potencia** tiene potencia media finita pero energía infinita*
  - ***Señales periódicas y señales aleatorias*** son tratadas como señales de potencia, mientras que ***señales deterministas y aperiódicas*** son tratadas como señales de energía

Clasificación de Señales

- *La función de impulso unitario*
  - Es conocida también como <u>*delta de Dirac*</u> $\delta(t)$ y se trata de una función muy utilizada en las telecomunicaciones
  - Más que de una función se trata de <u>una abstracción matemática que representa un pulso de amplitud infinitamente grande, anchura nula y peso (área por debajo del pulso) unitaria</u>
  - La función goza de las siguientes propiedades:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

$$\delta(t) = 0 \quad \text{para}\; t \neq 0$$

$$\delta(t)\;\text{es ilimitada en}\; t = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t - t_0)\,dt = x(t_0)$$

  - Cuando se opera con $\delta(t)$ la convención a seguir es la de interpretarla como un pulso de área unitaria de amplitud finita y duración no nula, pasando al límite cuando la duración se acerca a cero
  - $\delta(t\text{-}t_0)$ se interpreta como un impulso en $t=t_0$ y altura igual al área de su integral. Por tanto $A\delta(t\text{-}t_0)$ representa un impulso de altura A que es cero en todos los puntos excepto en $t=t_0$

Densidad Espectral

- La densidad espectral de una señal representa la distribución de la energía (ESD) o de la potencia (PSD) de la señal en el dominio de la frecuencia
- Aplicando el *teorema de Parseval* es posible relacionar la energía de una señal en el dominio del tiempo con la energía de una señal en el dominio de la frecuencia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \Rightarrow E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_x(f)df$$

- Donde $X(f)$ es la transformada de Fourier de una señal aperiódica $x(t)$ y $\psi_x(f)=|X(f)|^2$ es la densidad espectral de energía (ESD) de la señal y representa la energía de la señal sobre un ancho de banda unitario (expresada en Julios/Hz)
- Para una señal real $x(t)$, $|X(f)|$ es una función par de la frecuencia. Por tanto la densidad espectral de energía es una función simétrica respecto al origen y la energía total de $x(t)$ puede expresarse como:

$$E_x = 2\int_{0}^{+\infty} \psi_x(f)df$$

Densidad Espectral

- La potencia media P_x de una señal real periódica $x(t)$ de periodo puede T_0 calcularse realizando la media sobre un periodo:

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x^2(t)dt$$

- Aplicando el teorema de Parseval a una señal real y periódica en el tiempo se obtiene:

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x^2(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$$

- Donde los c_n son los coeficientes complejos de la serie de Fourier de la señal periódica
- La densidad espectral de potencia (PSD) $G_x(f)$ de una señal periódica $x(t)$ es una función real, par y no negativa de la frecuencia que expresa la distribución de la potencia de $x(t)$ en el dominio de la frecuencia

$$G_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2\delta(f - nf_0)$$

- $G_x(f)$ es una función discreta de la frecuencia formada por una sucesión de funciones delta ponderadas. La potencia media normalizada de una señal real periódica resulta pues:

$$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f)df = 2\int_0^{+\infty} G_x(f)df$$

- Una señal aperiódica no puede expresarse mediante serie de Fourier, mientras que una señal de potencia aperiódica (con energía infinita) podría no tener una transformada de Fourier. No obstante una señal de potencia aperiódica $x_T(t)$ truncada en un intervalo ($-T/2,+T/2$) tiene energía finita y admite una transformada de Fourier $X_T(f)$. Por tanto la PSD de una función aperiódica $x(t)$ puede calcularse pasando al límite:

$$G_x(f) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}|X_T(f)|^2$$

Autocorrelación

- La correlación es un proceso de comparación (*matching*). La autocorrelación es la comparación de una señal con su versión retardada
- La autocorrelación R_x de una señal real de energía $x(t)$ es definida como:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt \qquad \text{para} -\infty < \tau < +\infty$$

- $R_x(\tau)$ no es una función del tiempo sino de la diferencia de tiempo τ entre la señal y su copia retardada y proporciona una medida de cuanto la señal se aproxima a su copia retardada de τ unidades de tiempo
- La autocorrelación de una señal de energía real goza de las siguientes propiedades:

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau)$$

$$|R_x(\tau)| \leq R_x(0) \quad \forall \tau$$

$$R_x(\tau) \leftrightarrow \psi_x(f)$$

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt$$

- La última propiedad deriva de la tercera por lo que no es necesario verificarla

Autocorrelación

- La autocorrelación R_x de una señal de potencia real $x(t)$ es definida como:

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)x(t+\tau)dt \qquad \text{para} -\infty < \tau < +\infty$$

- Si la señal $x(t)$ es periódica con periodo T_0 el promedio puede realizarse sobre un periodo sencillo T_0 y la función de autocorrelación puede expresarse como:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)x(t+\tau)dt \qquad \text{para} -\infty < \tau < +\infty$$

- La autocorrelación de una señal de potencia real y periódica goza de las siguientes propiedades:

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau)$$

$$|R_x(\tau)| \le R_x(0) \quad \forall\,\tau$$

$$R_x(\tau) \leftrightarrow G_x(f)$$

$$R_x(0) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x^2(t)dt$$

Señales Aleatorias

- Un receptor no conoce a priori el tipo de mensaje que será transmitido, además los mensajes son corrompidos por ruido de tipo aleatorio, por tanto las señales deben ser descritas como procesos aleatorios
- Una variable aleatoria $X(A)$ es una relación entre un suceso aleatorio A y un número real. Por cuestiones de notación el evento A asociado a la variable X se subentiende
- Una variable aleatoria puede ser discreta o continua
- *La función de distribución* $F_X(x)$ de una variable aleatoria X es

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

- Donde $P(X \leq x)$ es la probabilidad que la variable aleatoria X asuma un valor inferior al número real x
- La función de distribución $F_X(x)$ goza de las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
&0 \leq F_X(x) \leq 1 \\
&F_X(x_1) \leq F_X(x_2) \quad \text{si } x_1 \leq x_2 \\
&F_X(-\infty) = 0 \\
&F_X(+\infty) = 1
\end{aligned}$$

Señales Aleatorias

- Otra función muy útil relacionada con una variable aleatoria es la *función de densidad de probabilidad* (PDF)

$$p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

- La probabilidad de que un evento $x_1 \leq X \leq x_2$ es:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} p_X(x)dx$$

- La probabilidad que una variable aleatoria X asuma un rango de valores en un intervalo muy reducido entre x y $x+\Delta x$ puede aproximarse como:

$$P(x \leq X \leq x + \Delta x) \approx p_X(x)\Delta x$$

- Si, al límite, Δx se acerca a cero, se obtiene:

$$P(X = x) \approx p_X(x)dx$$

- La función de densidad de probabilidad goza de las siguientes propiedades

$$p_X(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)dx = F_X(+\infty) - F_X(-\infty) = 1$$

- La función de densidad de probabilidad es no negativa con un área total de uno. A veces, por sencillez de notación, se omitirá el subíndice X y se denotará simplemente con $p(x)$. Para funciones discretas se utilizará la notación $p(X=x_i)$

Señales Aleatorias

- El *valor medio* m_X o *esperanza* de una variable aleatoria X es definido como:

$$m_X = \mathbf{E}\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x) dx$$

- El *momento de orden* n de una distribución de probabilidad de una variable aleatoria X es definido como:

$$\mathbf{E}\{X^n\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p_X(x) dx$$

- El momento de orden $n=1$ es el valor medio m_X, mientras que el momento de orden $n=2$ es el *valor cuadrático medio* de X que es definido como:

$$\mathbf{E}\{X^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_X(x) dx$$

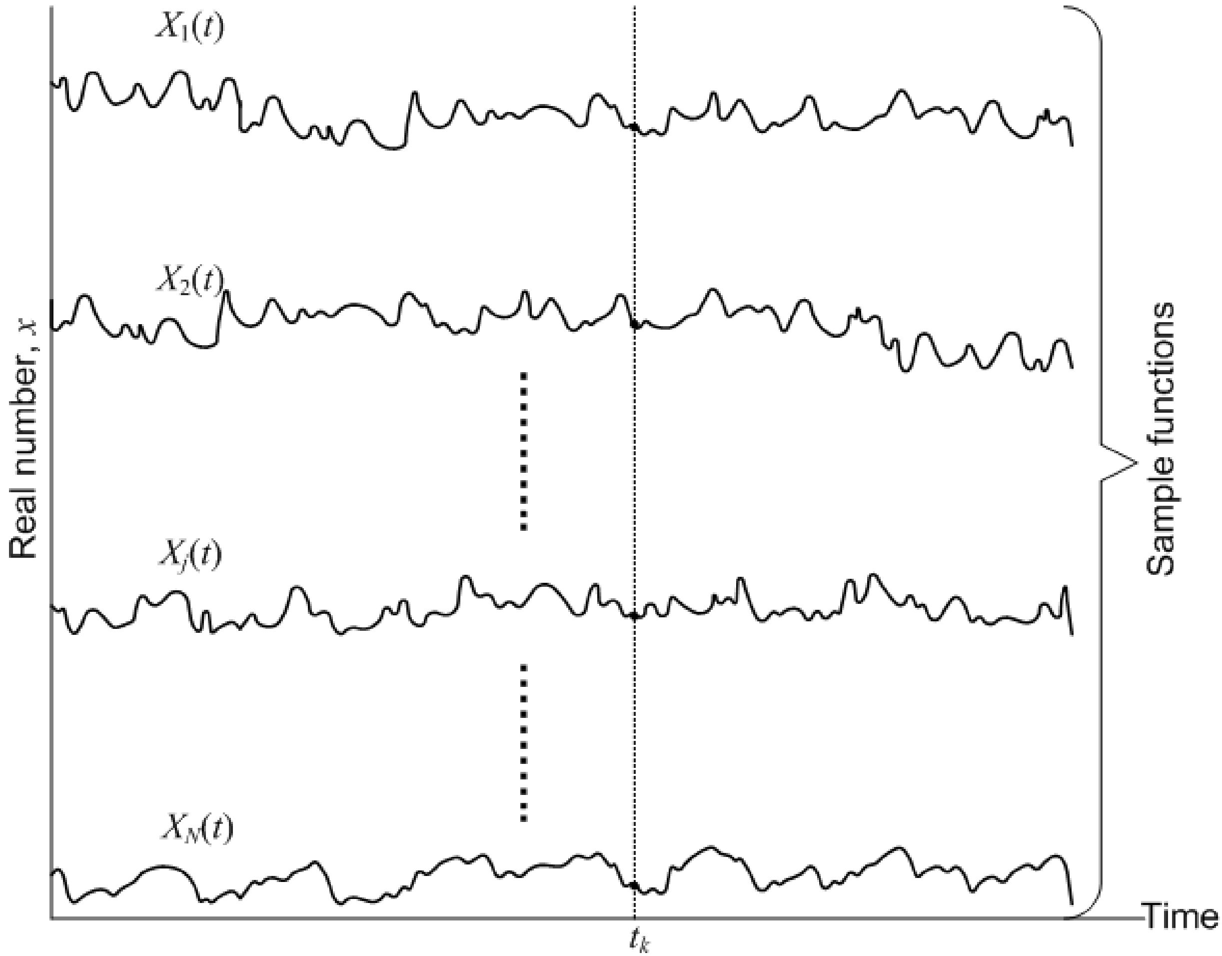
- Es posible también definir unos *momentos centrales*, es decir los momentos de la diferencia entre X y m_X. De particular interés es *el segundo momento central* o *varianza* de X, definido como:

$$\sigma_X^2 = \mathbf{E}\{(X - m_X)^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2 p_X(x) dx$$

- La raíz cuadrada de la varianza, es decir σ_X, se conoce como la *desviación estándar* de X y representa la dispersión de los datos alrededor del valor medio
- Varianza y valor cuadrático medio están relacionados:

$$\sigma_X^2 = \mathbf{E}\{(X^2 - 2m_X X + m_X^2)\} = \mathbf{E}\{X^2\} - 2m_X \mathbf{E}\{X\} + m_X^2 = \mathbf{E}\{X^2\} - m_X^2$$

Señales Aleatorias



- Un proceso aleatorio X puede considerarse una función de un evento A y del tiempo t
- Un proceso aleatorio podría ser, por ejemplo, el muestreo de N funciones del tiempo $\{X_j(t)\}$
- A cada evento A_j le corresponde una función del tiempo $X_j(t)$ (es decir, una función de muestra)
- La totalidad de todas la función de muestra se denomina conjunto
- A cada evento A_j e instante de tiempo t_k corresponde un valor real (el valor de una *variable aleatoria* $X(t_k)$)

Señales Aleatorias

- Un proceso aleatorio puede describirse mediante una función de densidad de probabilidad (PDF). La PDF de un proceso aleatorio será en general una función variable en el tiempo por lo que no es práctico deducirla de forma empírica sino que a partir de su media y de su función de autocorrelación
- *La media de un proceso aleatorio* $X(t)$ es definida como:

$$\mathbf{E}\{X(t_k)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_{X_k}(x) dx = m_X(t_k)$$

- $X(t_k)$ es la variable aleatoria obtenida observando el proceso aleatorio en el instante t_k y $p_{Xk}(x)$ la es la PDF de $X(t_k)$, es decir la densidad de los valores del conjunto de eventos en el instante de muestreo
- *La función de autocorrelación de un proceso aleatorio* $X(t)$ es una función de dos variables t_1 y t_2, y representa el nivel de relación entre dos muestras en instantes de tiempo sucesivos de un mismo proceso aleatorio. Es definida como:

$$R_X(t_1, t_2) = \mathbf{E}\{X(t_1)X(t_2)\}$$

- Donde $X(t_1)$ y $X(t_2)$ son dos variables aleatorias obtenidas observando $X(t)$ en los instantes t_1 y t_2

Señales Aleatorias

- *Procesos Estacionarios*
  - Un proceso aleatorio $X(t)$ se define *estacionario en sentido estricto* si todas su propiedades estadísticas (media, autocorrelación y PDF) no cambian con el tiempo
  - Un proceso aleatorio $X(t)$ se define *estacionario en sentido amplio* (o *débilmente estacionario*) si su media es constante y su función de autocorrelación depende sólo de la diferencia de tiempo $\tau = t_1 - t_2$

$$\mathbf{E}\{X(t)\} = m_X = \text{constante}$$

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2) = R_X(\tau) = \mathbf{E}\{X(t)X(t+\tau)\} \text{ para} -\infty < \tau < +\infty$$

- La estacionariedad en sentido estricto implica la en sentido amplio. No es cierto el contrario
- Desde un punto de vista práctico no es necesario que un proceso aleatorio sea estacionario en todos los instantes de tiempo sino sólo durante el intervalo de observación
- Para un proceso débilmente estacionario, $R_X(\tau)$ indica el nivel de correlación estadística entre valores aleatorios separados en el tiempo de τ segundos
  - Si $R_X(\tau)$ cambia lentamente al aumentar de τ, significa que, en media, las muestras de $X(t)$ tomadas en los instantes $t=t_1$ y $t= t_1+\tau$ son casi las mismas (en el dominio de las frecuencias significa que $X(t)$ contiene mayoritariamente bajas frecuencias)
  - Si $R_X(\tau)$ disminuye rápidamente al aumentar de τ, significa que $X(t)$ cambia rápidamente en el tiempo y contiene componentes mayoritariamente a las altas frecuencias

Señales Aleatorias

- *Procesos Estacionarios (cont.)*
  - La función de autocorrelación de un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio $X(t)$ con valores reales goza de las siguientes propiedades:

$$R_X(\tau) = R_X(-\tau) \qquad \text{simétrico en } \tau \text{ respecto a } 0$$

$$|R_X(\tau)| \le R_X(0) \;\; \forall \tau \qquad \text{máximo en el origen}$$

$$R_X(\tau) \leftrightarrow G_X(f)$$

$$R_X(0) = \mathbf{E}\{X^2(t)\} \qquad \text{el valor en el origen es igual a la potencia media de la señal}$$

Señales Aleatorias

- *Ergodicidad*
  - Para calcular m_X y $R_X(\tau)$ de un proceso aleatorio $X(t)$ sería necesario realizar un promedio de todas las $X(t_k)$ para las funciones de muestra y haría falta conocer las PDFs conjuntas de primer y segundo orden
  - Las cosas se simplifican enormemente en el caso de *procesos ergódicos*; es decir, procesos por los que las medias estadísticas son iguales a las temporales. Un proceso estacionario es también ergódigo; no obstante, en sistema reales, donde sólo es necesario garantizar la estacionariedad en sentido amplio, sólo hace falta conocer promedio y función de autocorrelación:

$$m_X = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} X(t)\,dt$$

$$R_X(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} X(t)X(t+\tau)\,dt$$

  - La condición de ergodicidad de la media y de la función de autocorrelación suele cumplirse en la gran mayoría de sistemas de telecomunicación

Señales Aleatorias

- *Ergodicidad (cont.)*
  - La posibilidad de intercambiar medias estadísticas y temporales permite redefinir algunos parámetros eléctricos fundamentales de las señales:
    - $m_X=\mathbf{E}\{X(t)\}$ es *el nivel DC de la señal*
    - m^2_X es *la potencia media normalizada de la componente DC*
    - El momento del segundo orden de $X(t)$, $\mathbf{E}\{X^2(t)\}$,es *la potencia media normalizada total*
    - $\sqrt{\mathbf{E}\{X^2(t)\}}$ es *el valor eficaz* (*root mean square* –rms) *de la señal*
    - La varianza σ^2_X es *la potencia media normalizada de la componente AC de la señal*
    - Si el proceso es de media nula (es decir, $m_X=m^2_X=0$), *la varianza es igual al valor cuadrático medio* ($\sigma^2_X=\mathbf{E}\{X^2(t)\}$) *y representa la potencia media normalizada total*
    - La desviación estándar σ_X es *el valor eficaz de la componente AC de la señal*
    - Si $m_X=0$ entonces σ_X es *el valor eficaz de la señal*

Señales Aleatorias

- Un proceso aleatorio $X(t)$ puede en general ser clasificado como una señal de potencia con densidad espectral de potencia (PSD) $G_X(f)$
- $G_X(f)$ describe la distribución de la potencia de una señal en el dominio de la frecuencia y permite evaluar la cantidad de potencia que es filtrada o pasará a través de una red cuya respuesta en frecuencia es sabida
- $G_X(f)$ tiene una serie de propiedades:

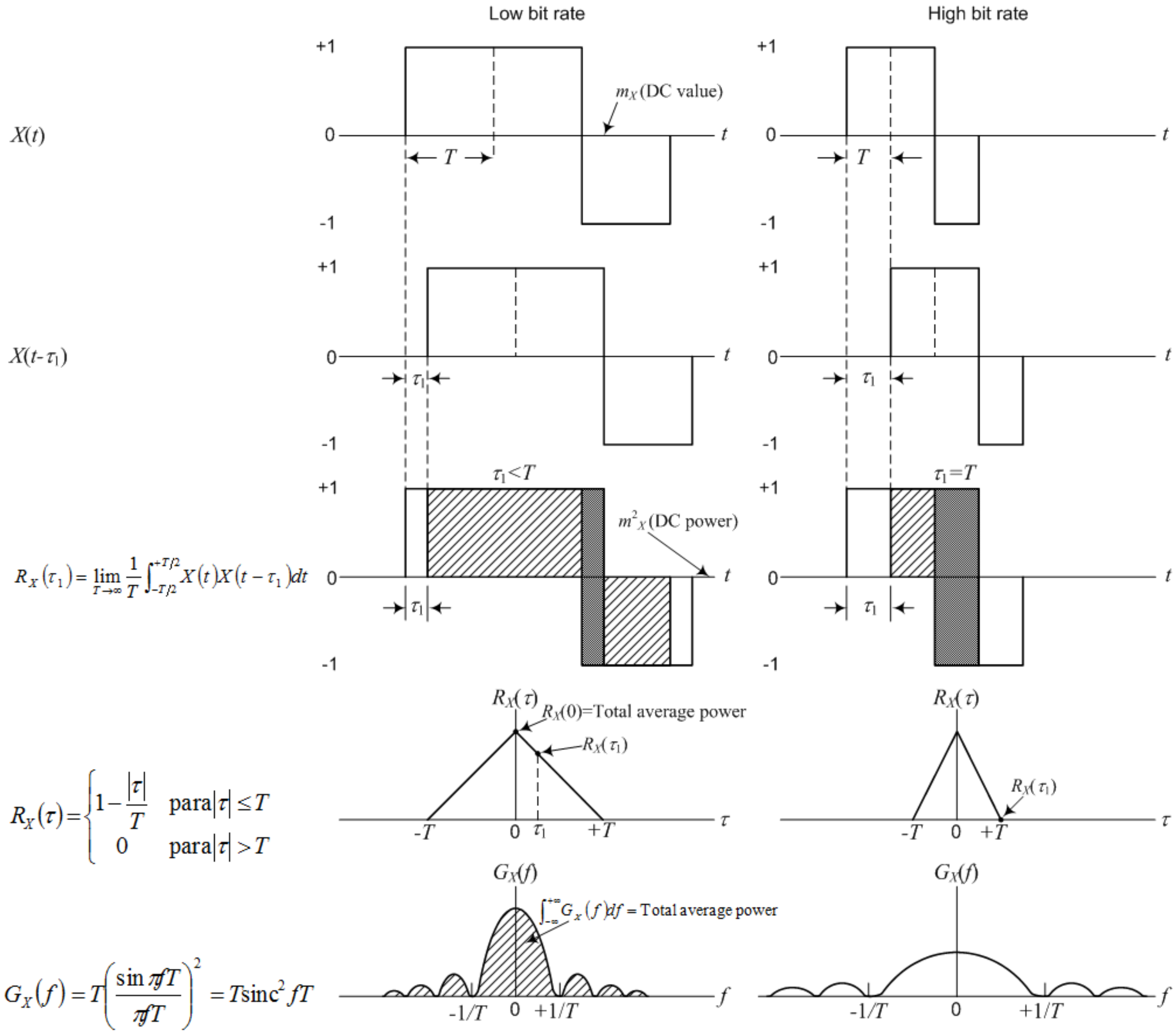
$$G_X(f) \geq 0 \text{ y es siempre real}$$

$$G_X(f) = G_X(-f) \text{ para } X(t) \text{ real}$$

$$G_X(f) \leftrightarrow R_X(\tau)$$

$$P_X = \int_{-\infty}^{+\infty} G_X(f)\, df$$

Señales Aleatorias

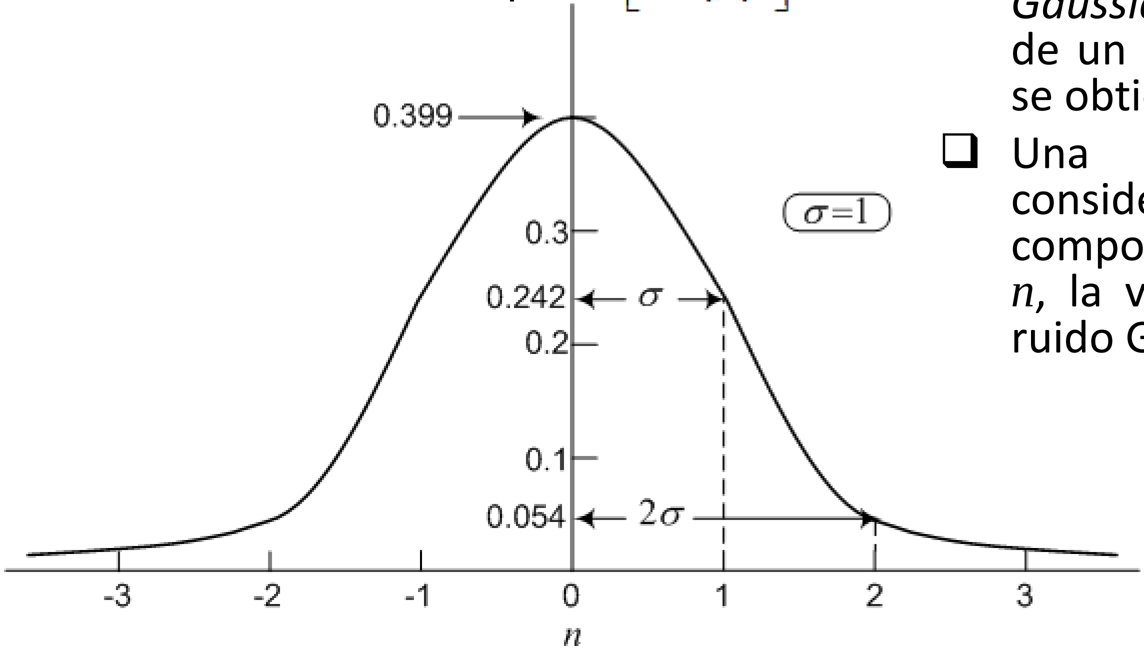


Señales Aleatorias

- El ruido es una señal no deseada que se solapa a la señal útil tendiendo a enmascarar la señal y dificultando la detección
- Existen dos fuentes de ruido:
  - *Ruido generado por el hombre*: ruido de ignición, transitorios de conmutación, radiaciones electromagnéticas externas
  - *Ruido natural*: efectos de la atmósfera, del sol y de otras fuentes galácticas
- El ruido puede mitigarse mediante filtrado, apantallado, la elección de la técnica de modulación adecuada, o la elección del sitio más adecuado donde colocar el receptor
- Existe una fuente de ruido natural, el *ruido térmico o de Johnson*, que no es posible eliminar
  - El ruido térmico es causado por el movimiento de los electrones debidos al aumento de temperatura en los componentes disipativos (resistores y cables)
  - El ruido térmico puede describirse como un proceso estocástico de tipo Gaussiano y de media nula $n(t)$ con función de densidad de probabilidad $p(n)$

Señales Aleatorias

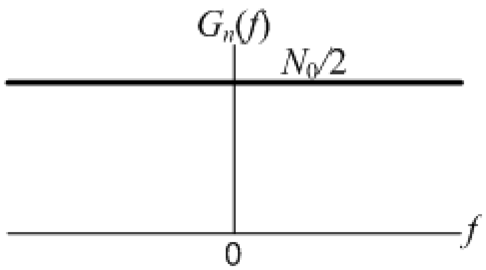
$$p(n)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{n}{\sigma}\right)^2\right]$$

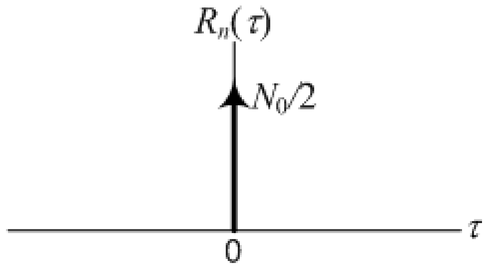


- *La función de densidad de probabilidad Gaussiana normalizada o estandarizada* de un proceso aleatorio con media nula se obtiene asumiendo $\sigma=1$
- Una señal aleatoria z se puede considerar como la suma de dos componentes, una componente DC a, y n, la variable aleatoria que describe el ruido Gaussiano: $z = a + n$

El motivo por el que se suele utilizar una distribución Gaussiana para modelar los efectos del ruido térmico es debido al resultado del *teorema de límite central*: las distribuciones de probabilidad de la suma de j variables aleatorias estadísticamente independientes se acercan a una distribución Gaussiana por $j\rightarrow\infty$ independientemente del tipo de distribución de cada una de las variables aleatorias

Señales Aleatorias





- Una característica del ruido térmico es que su densidad espectral de potencia $G_n(\,f\,)$ es constante para prácticamente todas las frecuencias (desde DC hasta 10^{12} Hz) y se denota como:

$$G_n(f) = \frac{N_0}{2} \ \text{W/Hz}$$

- El término 2 sirve para indicar que $G_n(\,f\,)$ es una densidad espectral de potencia bilateral. Un ruido con densidad espectral de potencia uniforme se denota *ruido blanco*.
- La función de autocorrelación del ruido blanco es dada por la antitransformada de Fourier de la densidad espectral de potencia de ruido:

$$R_n(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{G_n(f)\} = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

- Observe que $R_n(\tau)$ es cero para $\tau \neq 0$; es decir, cualquier par de muestras diferentes de ruido blanco, no importa lo cercana que sean en el tiempo, no están correlatas entre ellas
- La potencia media P_n del ruido blanco es infinita porque su ancho de banda es infinito

$$P_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} df = \infty$$

- El ruido térmico es un proceso Gaussiano y sus muestras no están correlatas, por tanto también las muestras de ruido serán independientes
- El ruido Gaussiano blanco aditivo (*Additive White Gaussian Noise* –AWGN) afecta a cada símbolo transmitido de forma independiente (un canal con estas características se llama *sin memoria*)
- <u>Un modelo muy sencillo se basa en *ruido AWGN de media nula* ya que es completamente caracterizado por su varianza</u>