LECCIÓN 4: VARIABLES ALEATORIAS

1. Introducción y algunas definiciones

La estadística descriptiva considera métodos que generalmente se utilizan para describir conjuntos de datos. Algunos de estos conjuntos representan el total de la población estudiada; otros constituyen una muestra extraída de una población más grande. En este último caso solo podemos intentar sacar conclusiones aproximadas acerca de la población de la que procede la muestra. Hemos visto que la teoría de probabilidad puede ser utilizada para resolver muchas cuestiones de naturaleza moderadamente complicada. No hemos considerado, sin embargo, las implicaciones de la teoría de la probabilidad en el análisis de los datos. Es decir, todavía no hemos empezado a mostrar cómo puede emplearse la teoría de probabilidad para sacar conclusiones precisas acerca de una población, con base en una muestra extraida de ella. Para hacer esto, primero hemos de dirigir nuestra atención hacia un tema, **variable aleatoria**, que constituye el eslabón entre la teoría de probabilidades y la estadística aplicada.

En un espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ los elementos del espacio muestral Ω no tienen por qué ser números. En la tirada de una moneda al aire, los sucesos elementales, cara y cruz, no son valores numéricos. No obstante, siempre podemos hacer corresponder el número 1 a la cara, y el 0 a la cruz. Esta asignación de valores neméricos a los sucesos elementales de un espacio de probabilidades es la base para definir el concepto de variable aleatoria.

1.1. Concepto de variable aleatoria

Definición 1 *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio probabilístico. Una* **variable aleatoria** X *es una función*

$$\begin{array}{rcl} X:\Omega & \longmapsto & \mathbb{R} \\ \omega & \longrightarrow & X(\omega). \end{array}$$

tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ *se cumple que*

$$\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}. \tag{1}$$

Observación 2 *Si trabajamos con* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$*, (1) siempre se va a cumplir.*

La variable aleatoria asociada a un experimento aleatoria, "viene a **cuantificar** en algún sentido.$^{\text{el}}$ experimento aleatorio. Otra manera de decirlo, en una función real que actúa como un **aparato de medida** sobre los sucesos elementales.

Ejemplo 3 *Una compañía de bebidas anuncia premios en los tapones asegurando que en cada 1000 tapones hay 500 con ïnténtelo otra vez", 300 con premio de 5 euros, 150 con premio de 10 euros , 40 con premio de 50 euros y 10 con premio de 100 euros. Un individuo,* *al que no le gusta esa bebida, decide comprar una bebida cuyo coste es de 10 euros. Vamos a caracterizar la ganancia por una variable aleatoria.*

Experimento aleatorio: Comprar una botella y ver si tenemos premio.

Espacio muestral, los posibles resultados del experimento aleatorio

$$\Omega = \{\text{inténtelo otra vez}, 5 \text{ euros}, 10 \text{ euros}, 50 \text{ euros}, 100 \text{ euros}\}.$$

La variable aleatoria

$$X : \Omega \longmapsto \mathbb{R} \text{ definida por } \begin{cases} X(\text{inténtelo otra vez}) = 0 - 10 = -10 \\ X(5 \text{ euros}) = 5 - 10 = -5 \\ X(10 \text{ euros}) = 10 - 10 = 0 \\ X(50 \text{ euros}) = 50 - 10 = 40 \\ X(100 \text{ euros}) = 100 - 10 = 90, \end{cases}$$

está cuantificando la ganacia del experimento aleatorio.

$\square$

Definición 4 *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio probabilístico,* $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ *una variable aleatoria y* $A \subset \mathbb{R}$*, definimos*

$$\boxed{P(A) = P(\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \in A\})}\,.$$

Ejemplo 5

En Ejemplo 3, el espacio muestral contiene 5 sucesos elementales que no son igualmente probables.

$$P(\text{inténtelo otra vez}) = \frac{500}{1000} = \frac{1}{2}, \qquad P(5 \text{ euros}) = \frac{300}{1000} = \frac{3}{10},$$
$$P(10 \text{ euros}) = \frac{150}{1000} = \frac{3}{20}, \qquad P(50 \text{ euros}) = \frac{40}{1000} = \frac{1}{25},$$
$$P(100 \text{ euros}) = \frac{10}{1000} = \frac{1}{100}.$$

- Supongamos que queremos saber la probabilidad que tenemos de perder dinero al comprar una botella. Como la variable aleatoria cuantifica la perdida-ganancia que tenemos al comprar una botella, perderemos dinero cuando

$$X < 0, \quad \text{más formalmente, si al comprar la botella}$$

$$\text{el resultado del experimento aleatorio } \omega \in \Omega$$

$$\text{satisface que } X(\omega) < 0 \iff -\infty < X(\omega) < 0.$$

Y esto lo cuantificamos en términos de la función de probabilidad P asociada a la variable aleatoria X por

$$P(-\infty, 0) = P(\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \in (-\infty, 0)\})$$

$$= P(\{\omega \in \Omega : \ -\infty < X(\omega) < 0\}) = P(\{\text{inténtelo otra vez}\} \cup \{5 \text{ euros}\})$$

$$= P(\{\text{inténtelo otra vez}\}) + P(= \{5 \text{ euros}\}) = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} = \frac{8}{10}.$$

- $P(-7, 3) = P(\{\omega \in \Omega : \ -7 < X(\omega) < 3\})$, esto vendría a cuantificar la probabilidadde que al comprar una botella no tuviésemos perdidas menores o iguales que 7 euros y ganancia mayores o iguales que 3 euros.

$$P(-7, 3) = P(\{\omega \in \Omega : \ -7 < X(\omega) < 3\}) = P(\{5 \text{ euros}\} \cup \{10 \text{ euros}\})$$

$$= P(5 \text{ euros}) + P(10 \text{ euros}) = \frac{3}{10} + \frac{3}{20} = \frac{9}{20}.$$

- $P[40, \infty)$, vendría a cuantificar la probabilidad de que al comprar una botella ganásemos una cantidad mayor o igual que 40 euros.

$$P[40, \infty) = P(\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \geq 40\}) = P(\{50 \text{ euros}\} \cup \{100 \text{ euros}\})$$

$$= P(50 \text{ euros}) + P(100 \text{ euros}) = \frac{1}{25} + \frac{1}{100} = \frac{1}{20}.$$

- $P(-\infty, 20)$ cuantifica la probabilidad de que al comprar una botella o tengamos perdidad o una ganancia inferior a 20 euros.

$$P(-\infty, 20) = P(\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) < 20\})$$

$$= P(\{\text{inténtelo otra vez}\} \cup \{5 \text{ euros}\} \cup \{10 \text{ euros}\})$$

$$= P(\{\text{inténtelo otra vez}\}) + P(\{50 \text{ euros}\}) + P(\{100 \text{ euros}\}) = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} + \frac{3}{20} = \frac{11}{20}.$$

- $P(6)$ cuantifica la probabilidad de que al comprar una botella tengamos una ganancia de 6 euros.

$$P(6) = P\{(\omega \in \Omega : \ X(\omega) = 6\}) = P(\emptyset) = 0.$$

- $P(40)$ cuantifica la probabilidad de que al comprar una botella tengamos una ganancia de 40 euros.

$$P(6) = P\{(\omega \in \Omega : \ X(\omega) = 40\}) = P(\{50 \text{ euros}\}) = \frac{1}{25}.$$

$\square$

Ejemplo 6 *El lanzamiento de un dado nos cuesta* 2 *euros. Si sacamos un múltiplo de tres, nos devuelven el dinero mietras que si obtenemos un múltiplo de* 5 *nos dan* 5 *euros.*

Calcular la probabilidad de que al jugar una vez

1. *obtengamos una ganancia de* 3 *euros;*
2. *no perdamos dinero;*
3. *perdamos dinero.*

Experimento aleatorio: tirar un dado y ver el número que sale.

Espacio muestral, posibles resultados el experimento aleatorio,

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Los sucesos elementales son equiprobables.

Vamos a cuantificar la ganancia o pérdida al tirar una vez el dado por la siguiente variable aleatoria:

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longmapsto \mathbb{R} \\ 1 &\longrightarrow X(1) = 0 - 2 = -2 \\ 2 &\longrightarrow X(2) = 0 - 2 = -2 \\ 3 &\longrightarrow X(3) = 2 - 2 = 0 \\ 4 &\longrightarrow X(4) = 0 - 2 = -2 \\ 5 &\longrightarrow X(5) = 5 - 2 = 3 \\ 6 &\longrightarrow X(6) = 2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

1. Si designamos por P la función de probabilidad asociada a la variable aleatoria X, $P(3)$ nos dará la probabilidad de que al tirar el dado obtengamos una ganancia de 3 euros.

$$P(3) = P(\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) = 3\}) = P(\{5\}) = \frac{1}{6}.$$

2. Para no perder dinero, ya que X cuantifica la ganancia o pérdida de dinero, tendremos que imponer que $X \geq 0$, y la probabilidad de no perder dinero será

$$P(X \geq 0) = P(\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \geq 0\}) = P(\{3, 5, 6\})$$

$$= P(\{3\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

3.

$$P(X < 0) = P(\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) < 0\}) = P(\{1, 2, 4\})$$

$$= \frac{\text{Cardinal de } \{1, 2, 4\}}{\text{Cardinal de } \Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

$\square$

1.2. Operaciones con variables aleatorias

Sea $(\Omega, \mathcal{A}; P)$ un espacio probabilistico y $\alpha \in \mathbb{R}$. X_α definida por

$$\begin{aligned} X_\alpha : \Omega &\longmapsto \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow X_\alpha(\omega) = \alpha \end{aligned}$$

es una variable aleatoria que suele designarse simplemente por la letra α.

Si $X, Y : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ son dos variables aleatorias, entonces:

$$\begin{aligned} X + Y : \Omega &\longmapsto \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow (X+Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} XY : \Omega &\longmapsto \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow (XY)(\omega) = X(\omega) \cdot Y(\omega), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{X}{Y} : \Omega &\longmapsto \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow (\tfrac{X}{Y})(\omega) = \tfrac{X(\omega)}{Y(\omega)}, \end{aligned} \qquad \text{con } \ Y(\omega) \neq 0 \ \ \forall \omega \in \Omega,$$

$$\begin{aligned} \max\{X, Y\} : \Omega &\longmapsto \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow \max\{X, Y\}(\omega) = \max\{X(\omega), Y(\omega)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\{X, Y\} : \Omega &\longmapsto \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow \min\{X, Y\}(\omega) = \min\{X(\omega), Y(\omega)\}, \end{aligned}$$

son variables aleatorias.

1.3. Función de distribución

Proposición 7 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico y $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ una variable aleatoria . Si I_1 e I_2 son subconjuntos de $\mathbb{R}$,* **no son sucesos**, *y $I_1 \subseteq I_2$, entonces*

$$\boxed{P(I_2 - I_1) = P(I_2) - P(I_1)} \tag{2}$$

Proof.

$$\begin{aligned} P(I_2 - I_1) &= P(\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \in I_2 \ \text{ y } \ X(\omega) \notin I_1\}) \\ &= P(\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \in I_2\} - \{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \in I_1\}), \end{aligned}$$

$$\text{Como } I_1 \subseteq I_2 \implies \{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \in I_1\}) \subseteq \{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \in I_1\}), \text{ y}$$

$$\begin{gathered} P(\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \in I_2\} - \{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \in I_1\}) \\ = P(\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \in I_2\}) - P(\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \in I_1\}) = P(I_2) - P(I_1). \end{gathered}$$

$\square$

Definición 8 *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio probabilístico y* $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ *una variable aleatoria . Definimos la función de distrución asociada a la variable aleatoria* X *como la función*

$$\boxed{\begin{array}{rl} F_X : \mathbb{R} & \longmapsto \; [0,1] \\ x & \longrightarrow F_X(x) = P(-\infty, x] = P(\{\omega \in \Omega : \; X(\omega) \leq x\}) \end{array}}$$

Observación 9 *La función de distrubución se introduce para conocer cómo se reparte la probabilidad de los valores que toma la variable aleatoria. Obsérvese de que si* $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$ *no fuera un elemento de* $\mathcal{A}$*,* $F_X(x)$ *no estaría bien definida. Escribiremos* F *en lugar de* F_X *cuando no haya confusión posible, y tambien* $P(X \leq x)$ *en lugar de* $P(\{\omega \in \Omega : \; X(\omega) \leq x\})$*.*

Es importante saber distinguir los conceptos de variable aleatoria y función de dsitribución. Dada una variable aleatoria, tenemos los valores reales asignados a cada uno de los elementos del espacio muestral, mientras que dada una función de distribución, tenemos únicamente cuáles son estos valores reales y cómo se reparten, o sea, tenemos la distribución de estos valores. Al pasar de una variable aleatoria a su distribución se pierde la información relacionada con los objetos que dan lugar a estos valores reales y que se recoge en el espacio de probabilidades. Es importante observar que dos variables aleatorias distintas pueden tener la misma función de distribución, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10 *Dado el espacio probabilístico* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$*, de manera que* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$*,* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ *y* P *viene dada por*

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \frac{1}{2},$$

Cansideramos las variables aleatorias

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; \omega = \omega_1 \\ 1 & \text{si } \; \omega = \omega_2 \end{cases} \quad \text{y} \quad Y(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; \omega = \omega_1 \\ 0 & \text{si } \; \omega = \omega_2 \end{cases}$$

Está claro que $X \neq Y$. Por otra parte

$$\{\omega \in \Omega : \; X(\omega) \leq x\} = \begin{cases} \emptyset & x < 0 \\ \{\omega_1\} & 0 \leq x < 1 \\ \Omega & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad \{\omega \in \Omega : \; Y(\omega) \leq y\} = \begin{cases} \emptyset & y < 0 \\ \{\omega_2\} & 0 \leq y < 1 \\ \Omega & y \geq 1 \end{cases}$$

y, por tanto,

$$F_X(x) = P(\{\omega \in \Omega : \; X(\omega) \leq x\}) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

y

$$F_Y(y) = P(\{\omega \in \Omega : \; Y(\omega) \leq y\}) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \leq y < 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$$

es decir, las dos variables aleatorias tienen la misma función de distribución.

□

Ejemplo 11

En Ejemplo 3,

- $F_X(2)$ nos indica la probabilidad de que al comprar una botella tengamos pérdidas o una ganancia menor o igual que dos euros.

$$F_X(2) = P(-\infty, 2] = P(\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \leq 2\}) = P(\{\text{inténtelo otra vez}, 5 \text{ euros}, 10 \text{ euros}\})$$

$$= P(\{\text{inténtelo otra vez}\}) + P(\{5 \text{ euros}\}) + P(\{10 \text{ euros}\}) = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} + \frac{3}{20} = \frac{11}{20}.$$

- $F_X(-3)$ nos indica la probabilidad de que al comprar una botella tengamos pérdidas menores o iguales que 3 euros.

$$F_X(-3) = P(-\infty, -3] = P(\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \leq -3\}) = P(\{\text{inténtelo otra vez}, 5 \text{ euros}\})$$

$$= P(\{\text{inténtelo otra vez}\}) + P(\{5 \text{ euros}\}) = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

- $F_X(-37)$ nos indica la probabilidad de que al comprar una botella tengamos pérdidas menores o iguales que 37 euros.

$$F_X(-37) = P(-\infty, -37] = P(\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \leq -37\}) = P(\emptyset) = 0.$$

- $F_X(82)$ nos indica la probabilidad de que al comprar una botella tengamos pérdidas o una ganancia menor o igual que 82 euros.

$$F_X(92) = P(-\infty, 92] = P(\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \leq 92\})$$

$$= P(\{\text{inténtelo otra vez}, 5 \text{ euros}, 10 \text{ euros}, 50 \text{ euros}, 100 \text{ euros}\})$$

$$= P(\{\text{inténtelo otra vez}\}) + P(\{5 \text{ euros}\}) + P(\{10 \text{ euros}\}) + P(\{50 \text{ euros}\})$$

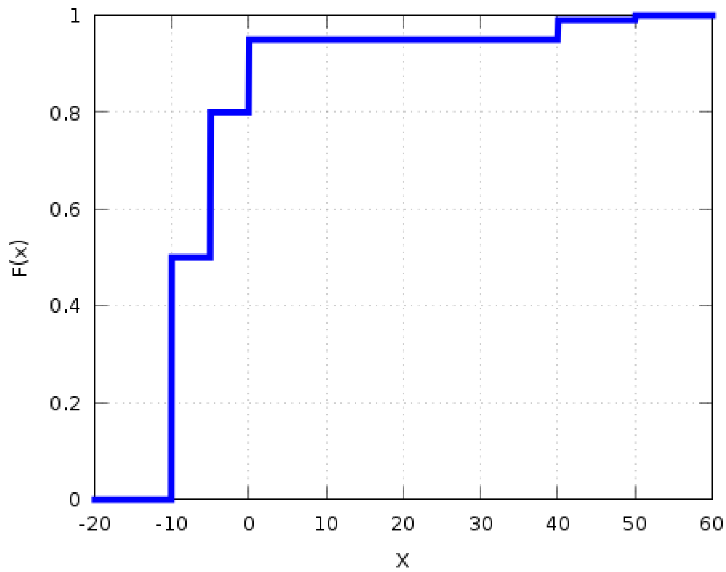
$$+P(\{100 \text{ euros}\}) = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} + \frac{3}{20} + \frac{1}{25} + \frac{1}{100} = 1.$$

- En general

$$F(x) = P(-\infty, x]$$

$$= \begin{cases} P(\emptyset) = 0, & x < -10 \\ P(\text{inténtelo otra vez}) = \frac{1}{2}, & -10 \leq x < -5 \\ P(\text{inténtelo otra vez}) + P(5 \text{ euros}) = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} = \frac{4}{5}, & -5 \leq x < 0 \\ P(\text{inténtelo otra vez}) + \cdot\cdot + P(10 \text{ euros}) = \frac{1}{2} + \cdot\cdot + \frac{3}{20} = \frac{19}{20}, & 0 \leq x < 40 \\ P(\text{inténtelo otra vez}) + \cdot\cdot + P(50 \text{ euros}) = \frac{1}{2} + \cdot\cdot + \frac{1}{25} = \frac{99}{100}, & 40 \leq x < 50 \\ P(\text{inténtelo otra vez}) + \cdot\cdot + P(100 \text{ euros}) = \frac{1}{2} + \cdot\cdot + \frac{1}{100} = 1, & 50 \leq x. \end{cases}$$

Gráfica de F



$\square$

Ejercicio 12 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}; P)$ un espacio probabilistico. Calcule la función de distribución de la variable aleatoria*

$$\begin{aligned} X_2 : \Omega &\longmapsto \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow X_2(\omega) = 2 \end{aligned}$$

Ejemplo 13 *Consideremos el experimento aleatorio que consiste en tirar tres veces una moneda al aire. En este caso*

$$\Omega = \{ccc, ccx, cxc, cxx, xcc, xcx, xxc, xxx\},$$

donde por ejemplo cxc significa "salir cara, crux y cara en las tre tiradas.

Indicamos por X "número de caras obtenidas en las tres tiradas". Es claro que X es una variable aleatoria cuando $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ y se cumple

$$\begin{aligned} &X(ccc) = 3 \\ &X(ccx) = X(cxc) = X(xcc) = 2 \\ &X(cxx) = X(xcx) = X(xxc) = 1 \\ &X(xxx) = 0 \end{aligned}$$

y

$$\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \leq x\} = \begin{cases} \emptyset & x < 0 \\ \{xxx\} & 0 \leq x < 1 \\ \{xxx, cxx, xcx, xxc\} & 1 \leq x < 2 \\ \{ccx, cxc, cxx, xcc, xcx, xxc, xxx\} & 2 \leq x < 3 \\ \Omega & x \geq 3 \end{cases}$$

La función de distribución de la variable aleatoria X es

$$F_X(x) = P(\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \leq x\}) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{8} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

Propiedades 14 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico, $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ una variable aleatoria y $F \equiv F_X$ la función de distrbución asociada a la variable aleatoria X. Se verifica*

1. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1.$

   Nota 15
   - $P(\emptyset) = \lim_{x\to-\infty} P(-\infty, x] = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0,$
   - $P(\mathbb{R}) = \lim_{x\to\infty} P(-\infty, x] = \lim_{x\to\infty} F(x) = 1.$

2. *F es creciente, $x_1 \leq x_2 \implies F(x_1) \leq F(x_2)$.*

3. *F es continua por la derecha, $\lim_{h\to0, h>0} F(x+h) = F(x)$.*

Observación 16 *En general, dada una función $F : \mathbb{R} \longmapsto [0,1]$ que satisface*

1. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1,$

2. *F es creciente, .*

3. *F es continua por la derecha.*

se dice **función de distribución**, *ya que siempre es posible diseñar un espacio muestral, con un probabilidad y una variable aleatoria cuya función de distribución sea F.*

Observación 17 *La probabilidad de ciertos intervalos puede calcularse en términos de la función de distribución.*

- Por ejemplo, si queremos calcular la probabilidad de que al comprar una botella no temgamos perdidas menores o iguales que 3 y unas ganancias mayores a 6 euros, tendremos que calcular $P(-3, 6]$.

  Observamos que

  $$(-3, 6] = (-\infty, 6] - (-\infty, -3], \qquad (-\infty, -3] \subset (-\infty, 6],$$

  entonces

  $$P(-3, 6] = P((-\infty, 6] - (-\infty, -3]) = P(-\infty, 6] - P(-\infty, -3]$$
  $$= F(6) - F(-3) = \frac{19}{20} - \frac{1}{2} = \frac{9}{20}.$$

- Probabilidad de que al comprar una botella tengamos una ganancia mayor que 42 euros.

  Tenemos que calcula

  $$P(42,\infty) = P(\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) > 42\}).$$

  Observamos que

  $$(42,\infty) = \mathbb{R} - (-\infty, 42], \quad \text{y se verifica} \quad (-\infty, 42] \subset \mathbb{R},$$

  entonces

  $$P(-\infty, 42] = P(\mathbb{R} - (-\infty, 42]) = P(\mathbb{R}) - P(-\infty, 42] = 1 - F_X(42) = 1 - \frac{99}{100} = \frac{1}{100}.$$

  $\square$

1.4. Clasificación de las variables aleatorias

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico y $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ una variables aleatoria. Esta puede ser:

- **Discreta:** $X(\Omega)$ es un conjunto finito o numerable.
- **Continua:** $X(\Omega)$ puede se una unión de intervalos de $\mathbb{R}$, que pueden ser acotados o no acotados.
- **Mixta:** es una combinación de las dos anteriores.

2. Variables aleatorias discretas

Supongamos que realizamos un experimento aleatorio con espacio muestral Ω, y sea $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ una variable aleatoria. Diremos que X es una **variable aleatoria discreta** si solo toma un número finito o numerables de valores. Esto significa que existe una sucesión de números reales diferentes, puede ser finita o no,

$$\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\},$$

tal que

$$\text{rango de } X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}.$$

Definición 18 *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio probabilístico y* $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ *una variables aleatoria discreta con*

$$\textit{rango de } X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, , \cdots\}.$$

Se llama **función de probabilidad** *asociada a la variable aleatoria* X *a*

$$\boxed{P_X(x_k) = P_X(X = x_k) \equiv P(X = x_k) = P(\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) = k\}), \quad k \in \{1, 2, \cdots\}}$$

Observación 19 *Algunos autores la llaman función de densidad de probabilidad, o simplemente función de densidad.*

Ejemplo 20

1. La variable aleatoria considerada en Ejemplo 3,

$$X : \Omega \longmapsto \mathbb{R} \text{ definida por } \begin{cases} X(\text{inténtelo otra vez}) = 0 - 10 = -10 \\ X(5 \text{ euros}) = 5 - 10 = -5 \\ X(10 \text{ euros}) = 10 - 10 = 0 \\ X(50 \text{ euros}) = 50 - 10 = 40 \\ X(100 \text{ euros}) = 100 - 10 = 90, \end{cases}$$

   solamente toma 5 valores, es decir $X(\Omega = \{-10, -5, 0, 40, 90\}$ es un conjunto finito de 5 elementos, por lo tanto X es una variable aleatoria discreta.

   Ejemplos de .^{el}ementos"de la función de probabilidad asociada a la variable aleatoria X:

$$P_X(-5) = P_X(X = -5) = P(\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) = -5\}) = P(\{5 \text{ euros}\}) = \frac{3}{10},$$

$$P_X(37) = P_X(X = 37) = P(\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) = 37\}) = P(\emptyset) = 0,$$

   en general

$$P_X(X = k) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } \ k \notin \{-10, -5, 0, 40, 90\} \\ \frac{1}{2} \ \text{ si } \ k = -10 \\ \frac{3}{10} \ \text{ si } \ k = -5 \\ \frac{3}{20} \ \text{ si } \ k = 0 \\ \frac{1}{25} \ \text{ si } \ k = 40 \\ \frac{1}{100} \ \text{ si } \ k = 90. \end{cases}$$

2. En Ejemplo 6, la variable aleatoria

$$\begin{aligned} X : \Omega \ &\longmapsto \ \mathbb{R} \\ 1 &\longrightarrow X(1) = 0 - 2 = -2 \\ 2 &\longrightarrow X(2) = 0 - 2 = -2 \\ 3 &\longrightarrow X(3) = 2 - 2 = 0 \\ 4 &\longrightarrow X(4) = 0 - 2 = -2 \\ 5 &\longrightarrow X(5) = 5 - 2 = 3 \\ 6 &\longrightarrow X(6) = 2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

   toma 3 valores $X(\Omega = \{-2, 0, 3\}$, y en consecuencia, también será discreta.

   La función de probabilidad es

$$P_X(X = k) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } \ k \notin \{-2, 0, 3\} \\ \frac{1}{2} \ \text{ si } \ k = -2 \\ \frac{1}{3} \ \text{ si } \ k = 0 \\ \frac{1}{6} \ \text{ si } \ k = 3. \end{cases}$$

La función de probabilidad es

$$P_X(X=k) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \notin \{0,1,2,\cdots,19,20\} \\ \begin{pmatrix} 20 \\ j \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^j \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{20-j} \quad \text{si } k \in \{0,1,2,\cdots,19,20\}. \end{cases}$$

□

2.1. Medidas de centralización y dispersión

En estadistica descriptiva se definen unas medidas de centralización y dispersión con el objetivo de obtener una idea de la muestra. Vamos a definir los conceptos análogos para variables aleatorias, los cuales nos van a permitir resumir el reparto de probabilidad correspondiente a la variable aleatoria.

Definición 21 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico y $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ una variables aleatoria discreta. Supongamos que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ consta de n elementos.* **La media o esperanza** *de la variable aleatiria X viene definida por*

$$\boxed{\mu = E[X] = \sum_i x_i P(X = x_i)}$$

En **Ejemplo 3** la variable aleatoria toma los valores $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} = \{-10, -5, 0, 40, 90\}$,

$$E[X] = \sum_{i=1}^{5} x_i P(x_i)$$

$$= (-10) \cdot P(-10) + (-5) \cdot P(-5) + 0 \cdot P(0) + 40 \cdot P(40) + 90 \cdot P(90)$$
$$= -10 \cdot \frac{1}{2} + -5 \cdot \frac{3}{10} + 0 \cdot \frac{3}{20} + 40 \cdot \frac{1}{25} + 90 \cdot \frac{1}{100}0 = -4.$$

Ejemplo 22 *Realizamos el experimento aleatoria de tirar un dado y ver la puntuación que obtenemos. Sea X la variable aleatoria que indica la puntuación que hemos obtenido en la tirada. Calcule la esperanza de X.*

Solución

Es espaciomuestral es $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y la variable aleatoria X está definida por

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longmapsto \mathbb{R} \\ j &\longrightarrow X(j) = j \end{aligned}$$

X es una variable aleatotia discreta, toma los valores $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, y su función de probabilidad es

$$P(X = j) = \frac{1}{6}, \quad j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

La esparanza es

$$E[X] = \sum_{j=1}^{6} jP(X = j) = \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{6} j = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}.$$

$\square$

Proposición 23 Propiedades de la esperanza matemática de variables aleatorias discretas

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico y X, Y dos variables aleatorias discretas para las que existe $E[X]$ y $E[Y]$. Se verifica:

1. *Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y X_α es la variable aleatoria que toma el valor α en todo elemento de Ω, se tiene $E[X_\alpha] = 1$.*
2. $E[\alpha X] = E[X_\alpha X] = \alpha E[X]$.
3. $|E[X]| \leq E[|X|]$.
4. $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$.
5. *Si $X \leq Y$ entonces $E[X] \leq E[Y]$, en particular si $X \geq 0$ se tiene que $E[X] \geq 0$.*

Ejemplo 24 *En el juego de la ruleta se hace girar una bola encima de una rueda circular dividida en 37 arcos de la misma lomgitud, numerados del 0 al 36. Suponemos que la probabilidad de que ocurra un arco es la misma para todos y, por tanto, la bola puede caer en cualquier número del 0 al 36 con una probabilidad de 1/37. Supongamos que jugamos a números impares y que la apuesta se hace a dos por uno, es decir, si aportamos 1 euro y sale impar, recibimos 2 euros (incluida la apuesta), y no cobramos nada si sale par. ¿Qué esperamos ganar si apostamos continuamente a número impares?.*

Solución

Sea X la variable aleatoria que indica la cantidad que uno puede ganar o perder si apuesta un euro. Es claro que X puede tomar dos valores: $X = 1$ si sale impar; y $X = -1$ si sale par o cero (hay que recordar que la banca se queda con la apuesta si sale cero). Además

$$P(X = 1) = \frac{18}{37}, \qquad P(X = -1) = \frac{19}{37}.$$

Como consecuencia tenemos

$$E[X] = 1 \cdot P(X = 1) + (-1) \cdot P(X = -1) = -\frac{1}{37}.$$

La esperanza de X representa en este caso la ganancia o pérdida media por apuesta. Si hacemos n apuestas de 1 euro al número impar, la ganancia o pérdida media sería la esperanza de la variable aleatoria

$$Y = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n},$$

cunado n tiende a infinito, donde para $i = 1, 2, \cdots, n$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{ha salido impar en la apuesta i-ésima} \\ -1 & \text{ha salido par o cero en la apuesta i-ésima} \end{cases}$$

$$E[Y] = \frac{E[X_1] + E[X_2] + \cdots + [X_n]}{n} = \frac{-\frac{1}{37}n}{n} = -\frac{1}{37}.$$

□

Ejercicio 25 *En un puesto de feria se ofrece la posibilidad de lanzar a ciegas un dardo a unos globos. Si se consigue reventar un globo, se recibe un premio igual a una cantidad oculta tras el globo. Supongamos que la probabilidad de acertar con algún globo es* $1/3$.

Los premios se distribuyen de la siguiente manera:

40 % de premios de 0,50 euros
30 % de premios de 1 euros
20 % de premios de 2 euros
10 % de premios de 6 euros

Si cada lanzamiento cuesta 1 euro, ¿cuál es la ”ganancia.esperada del dueño del puesto en cada lanzamiento?.

Experimento aleatorio: Lanzar un dardo, y si reventamos un globo ver el premio que hemos conseguido.

Espacio muestral:

$$\{0, 0{,}5, 1, 2, 6\},$$

donde

0: no hemos conseguido premio.
0.5 : hemos obtenido un premio de 0.5 euros.
1 : hemos obtenido un premio de 1 euros.
2 : hemos obtenido un premio de 2 euros.
6 : hemos reventado un globo y obtenido un premio de 6 euros.

Si definimos el suceso

R: hemos reventado un globo,

el enunciado nos dice

$$P(R) = \frac{1}{3}, \quad P(0{,}5|R) = \frac{4}{10}, \quad P(1|R) = \frac{3}{10}, \quad P(2|R) = \frac{2}{10}, \quad P(6|R) = \frac{1}{10}.$$

Calculamos las probabilidades de los sucesos elementales.

$P(0) = P(R^c) = 1 - P(R) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$,
$P(0{,}5) = P(0{,}5 \cap R) = P(0{,}5|R) \cdot P(R) = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{30}$,
$P(1) = P(1 \cap R) = P(1|R) \cdot P(R) = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{30}$,
$P(2) = P(2 \cap R) = P(2|R) \cdot P(R) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{30}$,
$P(6) = P(6 \cap R) = P(6|R) \cdot P(R) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{30}$.

Definimos la variable aleatoria $X =$ "ganancia del dueño"

$$X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}, \quad \text{definida por} \quad \begin{cases} X(0) = 1 - 0 = 1 \\ X(0{,}5) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5 \\ X(1) = 1 - 1 = 0 \\ X(2) = 1 - 2 = -1 \\ X(6) = 1 - 6 = -5. \end{cases}$$

La variable aleatoria X es discreta y toma los valores

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} = \{1,\ 0,5,\ 0,\ -1,\ -5\}.$$

Su función de probabilidad $P_X \equiv P$ es

$$P(k) = P(X = k) = \begin{cases} 0, \quad \text{si} \;\; k \notin \{-5, -1, 0, 0{,}5, 1\} \\ \frac{1}{30}, \quad \text{si} \;\; k = -5 \\ \frac{2}{30}, \quad \text{si} \;\; k = -1 \\ \frac{3}{30}, \quad \text{si} \;\; k = 0 \\ \frac{4}{30}, \quad \text{si} \;\; k = 0{,}5 \\ \frac{2}{3}, \quad \text{si} \;\; k = 1. \end{cases}$$

La ganancia esperada por el dueño es la esperanza de la variable aleatoria X.

$$E[X] = 1 \cdot P(X = 1) + 0{,}5 \cdot P(X = 0,5) + ,0 \cdot P(X = 0) - 1 \cdot P(X = -1) - 5 \cdot P(X = -5)$$

$$= 1 \cdot \frac{2}{3} + 0,5 \cdot \frac{4}{30} + 0 \cdot \frac{3}{30} - 1 \cdot \frac{2}{30} - 5 \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{2}.$$

La ganancia esperada por el dueño en cada tiro es de 0,5 euros.

□

Definición 26 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico y $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ una variables aleatoria discreta. Supongamos que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ consta de n elementos.* **La mediana** *de la variable aleatoria X es el valor o valores de $\{x_1, x_2, \cdot\cdot\cdot, x_n\}$ que dejan a izquierda y derecha la misma cantidad de probabilidad.*

En el caso del **Ejemplo 3** la mediana es -10.

La esperanza o valor esperado de una variable aleatoria describe donde está centrada su distribución de probabilidad, y por lo tanto es un valor que caracteriza a dicha distribución de probabilidad. Sin embargo, la esperanza por si sola no da una descripción adecuada de la forma de la distribución, es necesario saber como se dispersan los valores de la variable aleatoria respecto al valor esperado.

Dada una muestra de valores observados $x_1, x_2, \cdots, x_n$ dee una variable aleatoria X con sus respectivas frecuencias $f_1, f_2, \cdot\cdot\cdot, f_n$, la dispersión de un valor x_i respecto a la media $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2, \cdots + x_n}{n}$ se puede definir por

$$(xi - \bar{x})^2,$$

y la media de esta disperdión viene dada por

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n} (xi - \bar{x})^2 \cdot \frac{f_i}{N},$$

donde $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$. Las frecuencias relativas $\frac{f_i}{N}$ se pueden considerar como las probabilidades que tienen los valores x_i de representarse en la muestra total de taamaño N. Si escribimnos entonces

$$P(X = x_i) = \frac{f_i}{N}, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

tenemos

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n} (xi - \bar{x})^2 \cdot P(X = x_i),$$

que se llama varianza de la muestra. Extendemos este concepto al caso de una variable aleatoria

Definición 27 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico y $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ una variables aleatoria discreta. Supongamos que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdot\cdot\}$.* **La varianza** *de la variable aleatoria X viene definida por*

$$\boxed{\sigma^2 = V(X) = \sum_{i} (x_i - \mu)^2 P(X = x_i)}$$

Observación 28 *Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, es fácil ver que*

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_1^2 P(X = x_i) - \mu^2.$$

En **Ejemplo 3**

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{5} x_1^2 P(x_i) - \mu^2$$

$$(-10)^2 \cdot P(-10) + (-5)^2 \cdot P(-5) + (0)^2 \cdot P(0) + (40)^2 \cdot P(40) + (90)^2 \cdot P(90) - (-4)^2$$

$$= 100 \cdot \frac{1}{2} + 25 \cdot \frac{3}{10} + 0 \cdot \frac{3}{20} + 160 \cdot \frac{1}{25} + 810 \cdot \frac{1}{100} - 16 = 50.$$

Proposición 29 Propiedades de la varianza *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilítico y X e Y dos variables aleatorias discreta con varianza finita. Se tiene*

1. $V(X) = E[X^2] - (E[X])^2$.

2. *Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $X_\alpha(\omega) = \alpha$ para tod $\omega \in \Omega$, se verifica que $V(X_\alpha) = V(\alpha) = 0$.*

3. $V(\alpha X) = \alpha^2 V(X)$*, con* $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. $V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 V(X)$, *con* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 30 *Si* X *designa el número de puntos obtenidos en una tirada de un dado, calcule* $V(X)$.

Solución

La variable aleatoria X es discreta y toma los valores $1, 2, \cdots, 6$ con probabilidad $1/6$. Entonces

$$E[X] = \sum_{i=1}^{6} i \cdot P(X = i) = \frac{1 + 2 + \cdots + 6}{6} = \frac{7}{2},$$

$$E[X^2] = \sum_{i=1}^{6} i^2 \cdot P(X = i) = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + 6^2}{6} = \frac{91}{6},$$

y

$$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}.$$

□

Definición 31 *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio probabilístico y* $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ *una variables aleatoria discreta.* **La desviación típica** σ *de la variable aleatoria* X *se define como la raiz cuadrada de la varianza* σ^2.

En **Ejemplo 3**

$$\sigma = \sqrt{50} \cong 7,07.$$

3. Variables aleatorias continuas

Consideramos un esperimento aleatorio con espacio muestral asociado Ω. Decimos que una variable aleatoria $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ es **continua** si X puede tomar cualquier valor de una unión de intervalos finitos o infinitos.

Ejemplo 32 *Para llegar a un centro comercial hay que tomar un tren en una estación A, llegar a otra estación B y luego andar durante 7 minutos hasta el centro comercial. De la estación A a la B, parte un tren cada 20 minutos, y emplea 13 minutos en hacer el trayecto. Realizamos el siguiente experimento aleatorio: elegir una persona al azar, que va al centro comercial, en el momento que llega a la estación A, y medir el tiempo que espera en tomar el tren.*

El espacio muestral sería el conjunto de los posibles minutos, segundos,... que se emplea hasta tomar el tren. Es lógico que puede ser cualquier tiempo entre 0 y 20 minutos. $\Omega =$ [0,20].

Definimos la variable aleatoria $X =$ tiempo empleado desde que se entra en la estación A hasta que se llega al centro comercial,

$$\begin{array}{rcl} X : \Omega = [0, 20] & \longmapsto & \mathbb{R} \\ \omega & \longrightarrow & X(\omega) = \omega + 13 + 7 = \omega + 20. \end{array}$$

La variable aleatoria X puede tomar cualquier valor en el intervalo $[20, 40]$, por lo tanto, es una variable aleatoria continua.

Para esta variable aleatoria, no va a tener sentido preguntarnos cual es la probabilidad de que $X = 28{,}77$, es decir, cual es la probabilidad de que una persona emplee exactamente 28,77 minutos desde que entró en la estación A y llegó al centro comercial, y si lo tuviese, la probabilidad sería nula, pues exactamente 28,77 no emplearía ninguna persona. En este problema tiene mas sentido preguntarnos por la probabilidad de que una persona espere menos de 24 minutos, o emplee entre 27 y 31 minutos,..... Necesitaremos disponer de una expresión que nos permita calcular este tipo de probabilidades.

$\square$

Ejemplo 33 *Experimento aleatorio: número de horas transcurridas entre la percepción de temblores de tierra y la próxima erupción del volcán Kilauea. En este caso, podemos tomas como espacuo muestral* $\Omega = (0, \infty)$. *Definimos la variable aleatoria* $T=$ *"número de horas transcurridas entre la percepción de temblores de tierra y la próxima erpción del volvan Kilauea".*

$$\begin{array}{rcl} T : \Omega = (0, \infty) & \longmapsto & \mathbb{R} \\ \omega & \longrightarrow & X(\omega) = \omega. \end{array}$$

T es una variable aleatoria contunia. Nos gustaría, por ejemplo, calcular $P(T < 24)$, probabilidad de que la erupción del volcan Kilauea se produzca en las 24 horas que siguen desde que empezamos a notar los temblores de tierra. En el caso continuo, el cálculo de probabilidades puede hacerse geométricamente igualando probabilidades a áreas.

$\square$

Entre las variables aleatorias continuas, las más fáciles de estudiar, y las que nosotros vamos a tratar son las **absolutamente continuas**. Nos referiremos a estas simplemente como continuas.

Definición 34 *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio probabilístico y* $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ *una variables aleatoria continua. Asociada a la variable aleatoria* X, *tenemos una función* f, *llamada función de densidad de la variable aleatoria, definida en* $\mathbb{R}$ *verificando:*

1. $f(x) \geq 0$, *(* f *es no negativa).*
2. *El área comprendida entre la gráfica de* f *y el eje* x *es igual a* 1, $\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1\right)$.
3. *Dados dos números reales* $a \leq b$,

$$\boxed{P[a, b] = P(\{\omega \in \Omega : \ a \leq X(\omega) \leq b\}) = \int_a^b f(x)dx}\ .$$

Ejemplo 35 *Consideremos un cierto experimento aleatorio con espacio muestral asociado Ω. Sea $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ un variable aleatoria con función de densidad asociada*

$$f(x) = \begin{cases} k(1+x^2) & si \;\; x \in (0,3) \\ 0 & si \;\; x \notin (0,3) \end{cases}$$

1. *Calcular la constante k.*

2. *Probabilidad de que X esté comprendida entre 1 y 2.*

3. *Probabilidad de que X sea menor que 1.*

4. *Sabiendo que X es mayor que 1, probabilidad de que sea menor que 2.*

1. Como f tiene que ser no negativa, se tendrá que verificar que $k > 0$. Para calcular la constante, vamos a imponer $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = k\int_{0}^{3}(1+x^2)dx = k\left(x + \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 \right) = 12k.$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \iff \boxed{k = \frac{1}{12}}.$$

y la función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{12} & \text{si} \;\; x \in (0,3) \\ 0 & \text{si} \;\; x \notin (0,3) \end{cases}$$

2. $P[1,2] = P(\{\omega \in \Omega : \; 1 \leq X(\omega) \leq 2\}) = \int_1^2 f(x)dx$

$$= \frac{1}{12}\int_1^2 (1+x^2)dx = \frac{1}{12}\left(x + \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 \right) = \frac{1}{12}\left(2 + \frac{2^3}{3} - 1 - \frac{1^3}{3}\right) = \frac{5}{18}.$$

3. $P(-\infty,1) = P(\{\omega \in \Omega : \; X(\omega) < 1\}) = \int_{-\infty}^1 f(x)dx$

$$= \frac{1}{12}\int_0^1 (1+x^2)dx = \frac{1}{12}\left(x + \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 \right) = \frac{1}{12}\left(1 + \frac{1^3}{3}\right) = \frac{1}{9}.$$

4. $P((-\infty,2)|(1,\infty))$

$$= \frac{P((-\infty,2)\cap(1;\infty))}{P(1,\infty)} = \frac{P(1,2)}{1-P(-\infty,1)} = \frac{\frac{5}{18}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{5}{16}.$$

$\square$

La definición de función de densidad asociadaa a una variable aleatoria parece maravillosa, pero en realidad no lo es tanto. La primera tarea de un científico experimental es la de determinar la densidad adecuada de la variable aleatotia que esté considerando. Si esta variable aleatoria ha sido ampliamente estudiada en el pasado, se supone que su densidad puede haber sido ya desarrollada por otros y podemos utilizarla para contestar a las preguntas que se nos plantean. En cambio, si la variable es estudiada por primera vez, su densidad debe ser hallada a partir de datos experimentales.

3.1. Función de distribución

Definición 36 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico y $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ una variables aleatoria continua con densidad f. Definimos la función de* **distribución** $F_X \equiv F$ *asociada a la variable aleatoria continua X por*

$$\boxed{F(x) = P(-\infty, x] = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt}\,.$$

Observación 37 *La función de distribución asociada a una variable aleatoria continiua no tiene discontinuidades y, por lo tanto, el conjunto de valores que toma con probabilidad no nula es no numerable.*

Observación 38 *La clasificación de variables aleatorias en discretas y continuas no implica que toda distribución de probabilidad haya de ser discreta o bien continua. Las distrubuciones discretas y las distrubuciones continuas son dos pequeñas clases disjuntas de distribuciones; son las más fáciles de estudiar, pero es importante saber que hay muchas funciones de distribución que no son discretas ni continuas.*

Proposición 39 **Propiedades** *Si f es la función de densidad de una variable aleatoria continua X Y F su funci'on de distribución, se cumple:*

1. *F es continua.*
2. *$P(X = a) = 0$, para todo $a \in \mathbb{R}$.*
3. *Si f es continua en $a \in \mathbb{R}$ se verifica*
$$F'(a) = f(a).$$
4. $$P(a < X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Ejercicio 40 *Sea* $([0,1],\mathcal{A},P)$ *un espacio probabilśtico con* $P([a,b]) = b-a$ *para* $[a,b]\subset[0,1]$, *y*

$$\begin{aligned} X:[0,1] &\longmapsto \mathbb{R} \\ \omega \longrightarrow X(\omega) &= \begin{cases} \omega & \omega \le \frac{1}{2} \\ \omega-\frac{1}{2} & \omega > \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Dibújese la gráfica de X *y hállese la función de distribución de* X *y su función de densidad.*

$$F_X(x) \equiv F(x) = P(\{\omega\in[0,1]:\ X(\omega)\le x\}) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 2x, & 0\le x\le \frac{1}{2} \\ 1, & x>\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Para calcular la densidad $f(x)$, recordamos el Teorema fundamental del cálculo:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \implies F'(x) = f(x).$$

(a puede ser $-\infty$).

Como

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \implies f(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 2, & 0\le x\le \frac{1}{2} \\ 0, & x>\frac{1}{2}. \end{cases}$$

□

3.2. Medidas de centralización y dispersión

Definición 41 *Sea* $(\Omega,\mathcal{A},P)$ *un espacio probabilístico y* $X:\Omega\longmapsto\mathbb{R}$ *una variables aleatoria continua con densidad* f*. La* **media o esperanza** *de la variable aleatoria continua* X *se define*

$$\boxed{\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx}\ .$$

Observación 42 *Normalmente se suele exigir que la integral que de la esperanza de* X *sea absolutamente convergente, es decir, que la integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx < \infty.$$

Como en el caso de las variables aleatorias discretas, existen variables aleatorias continuas para las que no existe su esperanza.

Ejemplo 43 *Sea X una variable aleatoria continua que se distribuye uniformemente en el intervalo (a, b). Calcule la esperanza de X.*

Solución

Al tratarse de una distribución uniforme en (a, b) se tiene que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a,b) \\ 0 & x \notin (a,b) \end{cases}$$

Tenemos

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{1}{b-a}\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

□

Proposición 44 Propiedades de la esperanza matemática *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico. X 2 Y dos variables aleatorias continuas y α y β dos números reales.*

1. $E[\alpha X + \beta Y] = \alpha E[X] + \beta E[Y]$.
2. $E[X_\alpha] = E[\alpha] = \alpha$.
3. *Si $g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ es derivable y $f(x)$ es la funxión de densidad de la variable aleatoria X , se tiene*
$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx.$$
4. $|E[g(X)]| \leq E[|g(X)|]$.

Ejercicio 45 *Una variable aleatoria X tiene como función de densidad*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{3} & x \in (1,2) \\ 0 & x \notin (1,2) \end{cases}$$

Calcule el valor esperado de la variable aleatoria $g(X) = 3X + X^2$.

Solución

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)g(x)dx = \int_1^2 (3x + x^2)\frac{2x}{3}dx$$
$$= \int_1^2 \left(2x^2 + \frac{2x^3}{3}\right)dx = \frac{2x^3}{3} + \left.\frac{x^4}{6}\right|_1^2 = \frac{43}{6}.$$

□

Definición 46 *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio probabilístico y* X *una variables aleatoria continua. La* **mediana** *de la variable aleatoria* X *se define como el valor* M *que satisface*

$$\boxed{F(M) = \frac{1}{2}},$$

donde F *es la función de distribuci'on de* X*.*

Definición 47 *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio probabilístico y* X *una variables aleatoria continua. La* **varianza** *de la variable aleatoria* X *se define*

$$\boxed{\sigma^2 = V(X) = E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2}.$$

La **desviación típica** σ *de la variable aleatoria* X *se define como la raiz cuadrada positiva de la varianza.*

Ejercicio 48 *Sea* X *una variable aleatoria que tiene como función de densidad*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ a(1+x^2), & 0 < x < 3 \\ 0, & x \geq 3 \end{cases}.$$

1. *Hállese* a *y la función de distribución de* X*.*
2. *Hallar la probabilidad de que* X *esté comprendida entre 1 y 2.*
3. *Hallar* $P(X < 1)$*.*
4. *Hallar* $P(X < 2|X > 1)$*.*
5. *Hallar la media* μ *y varianza* σ^2 *de* X*.*
6. *Calcule* $P(|X - \mu| \geq 2\sigma)$*.*

<u>Solución</u>

1. Como f tiene que ser mayor o igual que 0, se tendrá que veriicar que $a > 0$. Para calcular a vamos a imponerla condición de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = a\int_0^3 (1+x^2)dx = a\left(x + \frac{x^3}{3}\Big|_0^3\right) = 12a,$$

entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \iff a = \frac{1}{12},$$

y la función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{1+x^2}{12}, & 0 < x < 3 \\ 0, & x \ge 3 \end{cases}.$$

Vamos a calcular ahora la función de distribución

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Si $x \le 0$, entonces $f(t) = 0$ si $t \in (-\infty, x]$, y

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \lim_{z\to-\infty} \int_{z}^{x} 0dt = \lim_{z\to-\infty} \int_{z}^{x} 0dt \\ &= \lim_{z\to-\infty} (1|_{z}^{x}) = \lim_{z\to-\infty} (1-1) = 0, \qquad x \le 0. \end{aligned}$$

Suponagamos ahora que $0 < x < 3$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt = \frac{1}{12}\int_{0}^{x}(1+t^2)dt \\ &= \frac{1}{12}\left(t + \frac{t^3}{3}\bigg|_{0}^{x} \right) = \frac{1}{12}\left(x + \frac{x^3}{3} \right) = \frac{3x+x^3}{36}, \qquad 0 < x < 3. \end{aligned}$$

Si $x \ge 3$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{3} f(t)dt + \int_{3}^{x} f(t)dt = \frac{1}{12}\int_{0}^{3}(1+t^2)dt \\ &= \frac{1}{12}\left(t + \frac{t^3}{3}\bigg|_{0}^{3} \right) = 1, \qquad x \ge 3. \end{aligned}$$

Resumiendo:

$$F(x) = P((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{3x+x^3}{36}, & 0 < x < 3 \\ 0, & x \ge 3 \end{cases}$$

2.

$$\begin{aligned} P(1 < X < 2) &= \int_{1}^{2} f(t)dt = \frac{1}{12}\int_{1}^{2}(1+t^2)dt = \frac{1}{12}\left(t + \frac{t^3}{3}\bigg|_{1}^{2} \right) \\ &= \frac{1}{12}\left(\left(2+\frac{8}{3}\right) - \left(1+\frac{1}{3}\right) \right) = \frac{5}{18}. \end{aligned}$$

Ya que conocemos la función de distrubución, no teníamos que haber trabajado tanto:

$$P((1,2)) = P((1 < X < 2)) = P((-\infty,2) - (-\infty,1]) = P((-\infty,2)) - P((-\infty,1]).$$

Como $P(\{2\}) = \int_2^2 f(t)dt = 0$,

$$P((-\infty,2]) = P((-\infty,2) \cup \{2\})) = P((-\infty,2)) + P(\{2\}) = P((-\infty,2)),$$

y

$$P((1,2)) = F(2) - F(1) = \frac{5}{18}.$$

3.

$$P(X < 1) = F(1) = \frac{3 \cdot 1 + 1^3}{36} = \frac{1}{9}.$$

4.

$$P(X < 2 | X > 1) = \frac{\{X < 2\} \cap \{X > 1\}}{P(X > 1)} = \frac{P(1 < X < 2)}{P(\{X \leq 1\}^c)}$$
$$= \frac{P(1 < X < 2)}{1 - P(X \leq 1)} = \frac{f(2) - F(1)}{1 - F(1)} = \frac{45}{144}.$$

5.

$$E[X] = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t)dt = \frac{1}{12}\int_0^3 (t + t^3)dt$$
$$= \frac{1}{12}\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}\Big|_0^3\right) = \frac{1}{12}\left(\frac{9}{2} + \frac{81}{4}\right) = \frac{33}{16} = 2{,}0625$$

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)dx - \mu^2 = \frac{1}{12}\int_0^3 (t^2 + t^4)dt - \mu^2$$
$$= \frac{1}{12}\left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\Big|_0^3\right) - \mu^2 = \frac{1}{12}\left(9 + \frac{243}{5}\right) - \frac{33^2}{16^2} = 0{,}546$$

6.

$$P(|X - \mu| \geq 2\sigma) = P(|X - 2{,}0625| \geq 1{,}48)$$
$$= P(\{X - 2{,}0625 \geq 1{,}48\} \cup \{X - 2{,}0625 \leq 1{,}48\})$$
$$= P(\{X \geq 3{,}5425\} \cup \{X \leq 0{,}5825\}) = P(\{X \geq 3{,}5425\}) + P(\{X \leq 0{,}5825\})$$
$$= 1 - P(X < 3{,}5425) + P(X \leq 0{,}5825)$$
$$= 1 - F(3{,}5425) + F(0{,}5825) = 1 - 1 + F(0{,}5825) = F(0{,}5825).$$

□

Ejercicio 49 *La cantidad aleatoria de dinero ahorrado por una persona en un mes sigue una ley de probabilidad (función de distribución) dada por :*

$$F(x) = ((-\infty, x]) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{2}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \le x < 2 \\ \frac{x}{4}, & 2 \le x < 4 \\ 1, & x \ge 4 \end{cases}$$

donde x viene expresado en cientos de euros. Determine la probabilidad de que en un mes, la cantidad de dinero ahorrado sea:

1. *superior a 200 euros;*
2. *inferior a 450 euros;*
3. *superior a 50 euros y menor o igual que 250 euros.*
4. *Calcular el ahorro medio mensual.*

<u>Solocíon</u>

1. $P(X > 2) = 1 - F(2) = 0{,}5$
2. $P(X < 4{,}5) = f(4{,}5) = 1$.
3. $P(0{,}5 < X \le 2{,}5) = f(2{,}5) - f(0{,}5) = \frac{3}{8}$.
4. El ahorro medio mensual es la esperanza de la variable aleatoria continua X. No conocemos esta, solamente su función de distribuión. Vamos a calcular la densiad $f(x)$ asiciada a X.

   Recordamos el teorema fundamenal del cálculo:

   $$F(x) = \int_a^x f(t)dt \implies F'(x) = f(x),$$

   (a puede ser $-\infty$). Entonces

   $$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \le x < 1 \\ 0, & 1 \le x < 2 \\ \frac{1}{4}, & 2 \le x < 4 \\ 0, & x \ge 4 \end{cases}$$

   Entonces

   $$E[X] = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt = \int_0^1 \frac{t}{2}dt + \int_2^4 \frac{t}{4}dt = 1{,}75$$

$\square$

Ejercicio 50 *Sea* $([-1,1],\mathcal{A},P)$ *un espacio probabilístico y* X *una variable aleatoria con función de densidad*

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ kx+\frac{1}{2}, & \quad -1\leq x\leq< 1\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

1. *Determínese el valor (los valores) de* k.

2. *Calcule la esperanza, moda y mediana de* X.

3. *¿Para qué valores de* k *se minimiza la varianza?*

1. Se tiene que verificar que $f(x)\geq 0\ x\in\mathbb{R}\Longleftrightarrow x\in[-1,1]$.

$$f(x)=kx+\frac{1}{2}\geq 0\ x\in[-1,1]\Longleftrightarrow kx\geq -\frac{1}{2}\ x\in[-1,1]$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}x\leq -\frac{1}{2x} & x\in[-1,0)\\ x\geq -\frac{1}{2x} & x\in(0,1]\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}k\leq\frac{1}{2}\\ k\geq -\frac{1}{2}\end{cases}\Longleftrightarrow k\in[-1,1].$$

También tenemos que imponer que $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left(kx+\frac{1}{2}\right)dx=\left(k\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\Big|_{-1}^{1}\right)$$

$$=\left(\left(k\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)-\left(k\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\right)=1,$$

luego cualquiera que sea el número k, se verifica que $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$. Luego $k\in[-1,1]$.

2. Empecemos calculando la esperanza de X.

$$\mu=E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left(kx^2+\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=\left(k\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}\Big|_{-1}^{1}\right)=\left(\left(k\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\left(-k\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\right)=\frac{2k}{3}.$$

La moda es el valor que máximiza la función de densidad.

a) Si $k>0$, $kx+\frac{1}{2}$ es creciente en $[-1,1]$ y f es máxima si $x=1$. En este caso, la moda es 1.

b) Si $k = 0$, $\frac{1}{2}$ es constante en $[-1, 1]$ y f es en cualquier punto de $[-1, 1]$. En este caso, la moda es cualquier punto de $[-1, 1]$.

c) Si $k < 0$, $kx + \frac{1}{2}$ es decreciente en $[-1, 1]$ y f es máxima si $x = -1$. En este caso, la moda es -1.

Para obtener la mediana, vamos a calcular la función de distribución:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0 & x < -1 \\ \int_{-\infty}^{x} \left(kt + \frac{1}{2}\right) dt = \frac{kx^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2}, & -1 \leq x \leq 1 \\ \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-1}^{1} \left(kx + \frac{1}{2}\right) dt = 1 & x > 1. \end{cases}$$

Si $k \neq 0$, $F(M) = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow M = \frac{-1}{2}$

Ejemplo 51 *El tiempo de vida (en minutos) de un determinado virus es una variable aleatoria con función de densidad.*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1{,}000} e^{-\frac{x}{1{,}000}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

1. *Probabilidad de que el tiempo de vida sea superior a 100 minutos.*

2. *Probabilidad de que el tiempo de vida sea superior a 100 minutos e inferior a 1.000 minutos.*

3. *Observamos el virus a los 500 minutos y comprobamos que ha muerto. ¿Cuál es la probabilidad de que estuviese vivo a los 100 minutos?*

Experimento aleatorio: elegir al azar un virus y ver el tiempo de vida en minutos.

Un virus vive más de cero minutos, podemos pensar en el espacio muestral como el conjunto $\Omega = (0, \infty)$.

La variable aleatoria "tiempo de vida en minutos del virus.está definida por

$$\begin{array}{rcl} X : \Omega = (0, \infty) & \longmapsto & \mathbb{R} \\ \omega & \longrightarrow & X(\omega) = \omega \text{ (tiempo de vida en minutos del virus).} \end{array}$$

Es una variable aleatoria continua y su función de dendidad es $f(x)$.

1. $P(X > 100) = P(100, \infty) = \int_{100}^{\infty} f(x)dx = \lim_{k \to \infty} \int_{100}^{k} f(x)dx$

$$= \lim_{k \to \infty} \int_{100}^{k} \frac{1}{1{,}000} e^{-\frac{x}{1{,}000}} dx == \lim_{k \to \infty} \left(-e^{-\frac{x}{1{,}000}} \Big|_{100}^{k} \right)$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left(e^{-\frac{100}{1{,}000}} - e^{-\frac{k}{1{,}000}} \right) = e^{-\frac{1}{10}} \cong 0{,}904.$$

2. $P(100 < X < 1{,}000) = P(100, 1{,}000) = \int_{100}^{1{,}000} f(x)dx$

$$= \int_{100}^{1{,}000} \frac{1}{1{,}000} e^{-\frac{x}{1{,}000}} dx = \left(-e^{-\frac{x}{1{,}000}} \Big|_{100}^{1{,}000} \right) = e^{-\frac{1}{10}} - e^{-1} \cong 0,537.$$

3. $P(X > 100 | X < 500) = \frac{P((X>100)\cap(X<500))}{P(X<500)} = \frac{P(100<X<500)}{P(X<500)}$

$$= \frac{P(100, 500)}{P(-\infty, 500)} = \frac{\int_{100}^{500} \frac{1}{1{,}000} e^{-\frac{x}{1{,}000}} dx}{\int_{0}^{500} \frac{1}{1{,}000} e^{-\frac{x}{1{,}000}} dx} = \frac{\left(-e^{-\frac{x}{1{,}000}} \Big|_{100}^{500} \right)}{\left(-e^{-\frac{x}{1{,}000}} \Big|_{0}^{500} \right)}$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{10}} - e^{-\frac{1}{2}}}{e^{0} - e^{-\frac{1}{2}}} \cong 0,76.$$

□

Ejemplo 52 *Un fabricante debe elegir entre dos procesos de producción que dan lugar a que las longitudes (en cm.) de los elementos producidos se distribuyan según*

- *Proceso 1:* $f_1(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^4} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$

- *Proceso 2:* $f_2(x) = \begin{cases} \frac{4}{x^5} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$

1. *Si los elementos aceptables deben de tener longitud entre 1 y 2 cm., ¿qué proceso‘produce un porcentaje mayor de elementos aceptables?*

2. *Si se elige al azar uno de los procesos, ¿cuál es la probabilidad de obtener una pieza aceptable?*

3. *¿Cuál es la longitud media en cada proceso?*

1. Experimento aleatorio: Tomar una pieza y medir su longitud.

   Espacio muestral $\Omega = (0, 20)$.

   Definimos la variable aleatoria

$$\begin{array}{rcl} X : \Omega = (0, 20) & \longmapsto & \mathbb{R} \\ \omega & \longrightarrow & X(\omega) = \omega \text{ (longitud de la pieza).} \end{array}$$

   Es una variable aleatoria continua.

Proceso 1

$$P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 f_1(x)dx = 3\int_1^2 \frac{dx}{x^4}dx$$
$$= 3\left(-\frac{1}{3x^3}\bigg|_1^2\right) = \left(-\frac{1}{x^3}\bigg|_1^2\right) = \left(-\frac{1}{8}+1\right) = \frac{7}{8}.$$

Proceso 2

$$P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 f_2(x)dx = 4\int_1^2 \frac{dx}{x^5}dx$$
$$= 4\left(-\frac{1}{4x^4}\bigg|_1^2\right) = \left(-\frac{1}{x^4}\bigg|_1^2\right) = \left(-\frac{1}{18}+1\right) = \frac{15}{18}.$$

Produce un mayor porcentaje de elementos aceptables el Proceso 2.

2. Experimento aleatorio: Tomar una pieza producida por uno de los dos procesos y ver si es aceptable.

   Sucesos elementales

   P1A= "pieza fabricada por el Proceso 1 y que es aceptable",

   P1N= "pieza fabricada por el Proceso 1 y que no es aceptable",

   P2A= "pieza fabricada por el Proceso 2 y que es aceptable",

   P2N= "pieza fabricada por el Proceso 2 y que no es aceptable".

$$\Omega = \{P1A,\ P1N,\ P2A,\ P2N\}.$$

   Sucesos

   P1= "pieza producida por el Proceso 1",

   P2= "pieza producida por el Proceso 2",

   A= "pieza aceptable".

   El apartado anterior nos dice que

$$P(A|P1) = \frac{7}{8}, \qquad P(A|P2) = \frac{15}{16},$$
$$P(P1) = \frac{1}{2}, \qquad P(P2) = \frac{1}{2}.$$

$$P(A) = P(A \cap (P1 \cup P2)) = P((A \cap P1) \cup (A \cap P2)) = P(A \cap P1) + P(A \cap P2)$$
$$= P(A|P1) \cdot P(P1) + P(A|P2) \cdot P(P2) = \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{2} = \frac{29}{32}.$$

3. **Proceso 1**

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) dx = 3 \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} = 3 \lim_{k \to \infty} \int_1^k \frac{dx}{x^3} = 3 \lim_{k \to \infty} \left(-\frac{1}{2x^2} \Big|_1^k \right)$$
$$= 3 \lim_{k \to \infty} \left(-\frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}.$$

Proceso 2

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_2(x) dx = 4 \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4} = 4 \lim_{k \to \infty} \int_1^k \frac{dx}{x^4} = 4 \lim_{k \to \infty} \left(-\frac{1}{3x^3} \Big|_1^k \right)$$
$$= 4 \lim_{k \to \infty} \left(-\frac{1}{3k^3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3}.$$

4. Vectores aleatorios

En la vida real es muy frecuente enfrentarnos a problemas en los que nos interesa analizar varias características simultáneamente, por ejemplo la velocidad de trasmisión de un mensaje y la proporción de errores. De esta manera seremos capaces de estudiar no solo el comportamiento de cada característica por separado, sino las relaciones que pudieran existir entre ellas. El objetivo de esta sección es elaborar un modelo matemático que permita analizar experimentos aleatorios en el que cada resultado experimental tiene asociado $p > 1$ valores numéricos.

El concepto de vector aleatorio nace como una generalización natural de la noción de variable aleatoria, al considerar simultaneamente el comportamiento aleatorio de varias características asociadas a un experimento.

Vamos a tratar, desde el punto de vista teórico, solo el caso de vectores aleatorios biimensionales.

Supongamos que tenemos dos variables aleatorias X, Y sobre el mismo espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. De este modo paraca cada suceso elemental $\omega \in \Omega$ tenemos dos números reales $X(\omega)$ y $Y(\omega)$. Tenemos dos posible interpretaciones

1. Considerar los números $X(\omega)$ y $Y(\omega)$ de forma separada, o

2. podemos considerar este par de números como las componentes de un vectos $(X(\omega), Y(\omega)) \in \mathbb{R}^2$.

Esta segunda interpretación es la que va a conducir al concepto de **variable aleatoria bidimiensional**.

Al ser X e Y variables aleatorias se tiene que

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}, \quad \text{y} \quad \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq y\} \in \mathcal{A},$$

para todo $x, \ y \in \mathbb{R}$. Por tanto

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \cap \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq y\} \in \mathcal{A},$$

y como consecuencia, estos sucesos tienen asignadas probabilidades. Podemos definir la función $F_{\mathbf{X}}$ por

$$F_{\overrightarrow{X}}(x, y) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \cap \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq y\}),$$

para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. $F_{\mathbf{X}}$ es una función real de dos variables que se llama **función de distribución conjunta** o función de distribución de la "variable aleatoria bidimensional $\overrightarrow{X} = (X, Y)$.

Definición 53 *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio probabilístico. Un vector aleatorio bidimensional es una aplicación*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{X} = (X, Y) : \Omega &\longmapsto \mathbb{R}^2 \\ \omega &\longrightarrow (X, Y)(\omega), \end{aligned}$$

tal que para todo A *subconjunto de* $\mathbb{R}^2$ *conocemos* $P(\{\omega \in \Omega : \ (X, Y)(\omega) \in A\})$.

En general, una variable aleatoria n-dimensional o vector aleatorio será una n-upla $\overrightarrow{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ formada por variables aleatorias $X_i, \ i = 1, 2, \cdots, n$ sobre el mismo espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. El vector $\overrightarrow{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ definirá una aplicación de Ω en $\mathbb{R}^n$ que hace corresponder a cada suceso elemental $\omega \in \Omega$ un vectos $(x_1, x - 2, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, siendo $x_i = X_i(\omega), \ i = 1, 2, \cdots, n$.

Definición 54 *Dada una variable aleatoria bidimensional* $\overrightarrow{X} = (X, Y)$ *sobre el espacio probabilístico* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$*, se llama* **función de distribución conjunta** *a la función real de dos variables*

$$F_{\overrightarrow{X}}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \cap \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq y\}).$$

Proposición 55 *La función de distribución* $F_{\overrightarrow{X}}$ *de una variable aleatoria bidimensional* $\overrightarrow{X} = (X, Y)$ *satisface las siguientes propiedades:*

1. $0 \leq F_{\overrightarrow{X}}(x, y) \leq 1$, *para todo* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2. $F_{\overrightarrow{X}}$ *es monótona creciente en cada una de las variables*

   a) $x_1 \leq x_2 \Longrightarrow F_{\overrightarrow{X}}(x_1, y) \leq F_{\overrightarrow{X}}(x_2, y)$,

b) $y_1 \leq y_2 \Longrightarrow F_{\overrightarrow{X}}(x, y_1) \leq F_{\overrightarrow{X}}(x, y_2)$.

3. $F_{\overrightarrow{X}}(\infty, \infty) = 1$ *y* $F_{\overrightarrow{X}}(-\infty, y) = F_{\overrightarrow{X}}(x, -\infty) = 0$.

4. $P(a < X \leq b, c < Y \leq d) = F_{\overrightarrow{X}}(b, d) - F_{\overrightarrow{X}}(a, d) - F_{\overrightarrow{X}}(b, c) + F_{\overrightarrow{X}}(a, c)$.

5. $F_{\overrightarrow{X}}$ *en continua por la derecha en cada una de las variables.*

6. **Distribuciones marginales**.

$$\lim_{y \to \infty} F_{\overrightarrow{X}}(x, y) = F_X(x), \qquad \lim_{x \to \infty} F_{\overrightarrow{X}}(x, y) = F_Y(y),$$

donde F_X *y* F_Y *son las funciones de distribución de las variables aleatorias* X *e* Y *respectivamenet. A estas dos funciones se les llama dsitribuciones marginales del vector aleatorio* $\overrightarrow{X} = (X, Y)$.

4.1. Vectores aleatorios discretos o variables aleatorias bidimensionales discretas

Definición 56 *Consideramos el espacio probabilístico* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *el vector aleatorio* (X, Y) *se llama discreto si* X *e* Y *son variableas aleatorias discretas. Supongamos que*

$$\textit{rango de } X = \{x_i, x_2, x_3, \cdots\} \quad y \quad \textit{rango de } Y = \{y_i, y_2, y_3, \cdots\},$$

definimos **la función de probabilidad conjunta del vector aleatotio** (X, Y) *por*

$$\{P(X = x_i, Y = y_j) = P\left(\{\omega \in \Omega : \; X(\omega) = x_i\} \cap \{\omega \in \Omega : \; Y(\omega) = y_j\}\right)\}_{i,j=1,2,3,\cdots}.$$

Para $A \subset \mathbb{R}^2$ *definimos*

$$\boxed{P(A) = P(\{\omega \in \Omega : \; (X(\omega), Y(\omega)) \in A\})}.$$

La función de distribución conjunta *viene dada por*

$$\begin{array}{c} F : \mathbb{R}^2 \longmapsto [0, 1] \\ (x, y) \longrightarrow F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \end{array}$$

Observación 57 *Por las propiedades que satisface la función de probabilidad, se tiene que*

$$\sum_{i,j} P(X = x_i, Y = y_j) = 1.$$

Las funciones de probabilidad marginales del vector aleatorio $(X; Y)$ están dadas por

$$P(Y = y_j) = \sum_i P(X = x_i, Y = y_j), \;\; j = 1, 2, \cdots.$$

$$P(X = x_i) = \sum_j P(X = x_i, Y = y_j), \;\; i = 1, 2, \cdots.$$

Trabajando con el siguiente ejemplo, iremos introduciendo los conceptos fun damentales asociados a vectorees aleatorios discretos.

Ejemplo 58 *Consideramos el experimento aleatorio de tirar dos dados, uno de color rojo y otro azul.*

Por el par $(2,3)$ entendemos que con el dado rojo hemos obtenido 2 puntos y con el azul 3 puntos, el espacio muestral será

$$\Omega = \{(i,j) \;\; i,j = 1,2,3,4,5,6\}.$$

El espacio muestral está formado por 36 sucesos elementales igualmente probables y la probabilidad de cualquier suceso elemental $\{(i,j)\}$ es

$$P(\{(i,j\}) = \frac{1}{36}, \qquad i,j \in \{1,2,\cdot\cdot,6\}.$$

Consideramos las variables aleatorias

$$\begin{array}{rcl} X:\Omega & \longmapsto & \mathbb{R} \\ (i,j) & \longrightarrow & i \; (= \text{"número de puntos dado rojo}), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} Y:\Omega & \longmapsto & \mathbb{R} \\ (i,j) & \longrightarrow & \max\{i,j\} \left(\begin{array}{l} = \text{"número de puntos mayor} \\ \text{de los dos obtenidos} \end{array} \right). \end{array} \tag{3}$$

Por ejemplo

- $X(2,4) = 2$, $X(5,3) = 5$.
- $Y(2,2) = 2$, $Y(1,2) = 2$, $Y(2,1) = 2$, $Y(3,5) = 5$, $Y(5,4) = 5$.

La variable aleatoria X es discreta y su rango, valores que toma, es

$$\{x_1, x_1, x_3, x_4, x_5, x_6\} = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

La variable aleatoria Y es discreta y su rango, valores que toma, es

$$\{y_1, y_1, y_3, y_4, y_5, y_6\} = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

Consideramos el vector aleatorio

$$\begin{array}{rcl} (X,Y):\Omega & \longmapsto & \mathbb{R}^2 \\ (i,j) & \longrightarrow & (X,Y)(i,j) = (X(i,j),Y(i,j)) = (i, \max\{i,j\}) \end{array}.$$

El rango del vector aleatorio (X,Y) es el sunconjunto de $\mathbb{R}^2$

$$\text{rango}(X,Y) = \{(X(i,j),Y(i,j)) = (i,\max\{i,j\}), \quad i,j \in \{1,2,\cdot\cdot,6\}\}.$$

Vamos a determinar este conjunto:

Primeramente determinamos las imagenes por el vector aleatorio (X, Y) de los elementos del espacio muestral que son de la forma

$$\{(X,Y)(3,j),\ j \in \{1,2,\cdot\cdot,6\}\} = \{(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}.$$

$$\begin{aligned}
&(X,Y)(3,1) = (X,Y)(3,2) = (X,Y)(3,3) = (3,3),\\
&(X,Y)(3,4) = (3,4),\\
&(X,Y)(3,5) = (3,5),\\
&(X,Y)(3,6) = (3,6).
\end{aligned}$$

El estudiante puede comprobar que

$$\text{rango}(X,Y) = \left\{ \begin{array}{cccccc}
(1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\
 & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\
 & & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\
 & & & (4,4), & (4,5), & (4,6), \\
 & & & & (5,5), & (5,6), \\
 & & & & & (6,6),
\end{array} \right\}$$

Es un conjunto finito, 21 elementos, de $\mathbb{R}^2$. Como el rango es finito, decimos que **el vector aleatorio** (X, Y) **es discreto**.

Si A es un suceso elemental, por ejemplo $A = (2,3)$, entonces $P(2,3)$ suele designarse por $P(X = 2,\ Y = 3)$.

Como todos sucesos elementales son igualmente probables, podemos utilizar la regla de Laplace.

- $P(2,3) \equiv P(X = 2,\ Y = 3) = P(\{(i,j) \in \Omega :\ \ X(i,j) = 2 \text{ y } Y(i,j) = 3\})$

$$= \frac{\text{cardinal}\{\text{casos favorables}\}}{\text{cardinal}\Omega} = \frac{\text{cardinal}\{(2,3)\}}{36} = \frac{1}{36}.$$

- $P(5,2) = P(X = 5,\ Y = 2) = P(\{(i,j) \in \Omega :\ \ X(i,j) = 5 \text{ y } Y(i,j) = 2\})$

$$= \frac{\text{cardinal}\{\text{casos favorables}\}}{\text{cardinal}\Omega} = \frac{\text{cardinal}\emptyset}{36} = \frac{0}{36} = 0.$$

- $P(4,4) = P(X = 4,\ Y = 4) = P(\{(i,j) \in \Omega :\ \ X(i,j) = 4 \text{ y } Y(i,j) = 4\})$

$$= \frac{\text{cardinal}\{\text{casos favorables}\}}{\text{cardinal}\Omega} = \frac{\text{cardinal}\{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}}{36} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

- $P(8,3) = P(\{(i,j) \in \Omega :\ \ X(i,j) = 8 \text{ y } Y(i,j) = 3\})$

$$= \frac{\text{cardinal}\{\text{casos favorables}\}}{\text{cardinal}\Omega} = \frac{\text{cardinal}\emptyset}{36} = \frac{0}{36} = 0.$$

- $P(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2 \leq 25\})$

$$= P(\{(i,j) \in \Omega : \quad (X(i,j), Y(i,j)) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2 \leq 25\}\})$$

$$= P(\{(i,j) \in \Omega : \quad X^2(i,j) + Y^2(i,j)) \leq 25\}) = \frac{\text{cardinal}\{\text{casos favorables}\}}{\text{cardinal}\Omega}$$

$$= \frac{\text{cardinal}\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4)\}}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

Recoerdamos que si (X,Y) es un vector aleatorio discreto con

$$\text{rango de } (X,Y) = \{(x_i, y_j), \; i = 1,2,\cdots,n, \quad i = 1,2,\cdots,m\},$$

la **distribición o función de probabilidad conjunta del vector aleatorio** (X,Y) viene dada por

$$\{P(X = x_i, Y = y_j) = P(\{\omega \in \Omega : \; X(\omega) = x_1 \text{ e } Y(\omega) = y_j\})\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}.$$

En la siguiente tabla se muestra la distribución de probabilidad conjunta del vector aleatorio (X,Y).

P(X=i,Y=j)	Y=1	Y=2	Y=3	Y=4	Y=5	Y=6
X=1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
X=2	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
X=3	0	0	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
X=4	0	0	0	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
X=5	0	0	0	0	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$
X=6	0	0	0	0	0	$\frac{6}{36}$

Asociado al vector aleatorio (X,Y), y dado que X e Y son variables aleatorias, existe **dos distribuciones o funciones de probabilidad marginales**:

4.1.1. Distribución o función de probabilidad marginal de X

Esta suele designarse usualmente por $P_X(x_i)$ o $P(X = x_i)$. Nosostros utilizaremos normalmente la última notación. $P(X = 2)$ nos da la probabilidad de que la variable aleatoria X tome el valor 2 independientemente del valor que tome la variable aleatoria Y.

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{6} P(X = x_i, Y = y_j), \qquad i = 1,2,\cdot\cdot,6.$$

Ejemplos. Vamos a calcular $P(X=2)$ y $P(X=4)$.

$$P(X=2) = P\left(\bigcup_{j=1}^{6} \{X = 2, Y = j\}\right) = \sum_{j=1}^{6} P(X = 2, \; Y = j)$$

$$
\begin{aligned}
&= P(X=2,\ Y=1)+P(X=2,\ Y=2)+P(X=2,\ Y=3)\\
&+P(X=2,\ Y=4)+P(X=2,\ Y=5)+P(X=2,\ Y=6)\\
&= 0+\frac{2}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X=4) &= P(X=4,Y=1)+P(X=4,Y=2)+P(X=4,Y=3)\\
&+P(X=4,Y=4)+P(X=4,Y=5)+P(X=4,Y=6)\\
&= 0+0+0+\frac{4}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

4.1.2. Distribución o función de probabilidad marginal de Y

$$
P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{6}P(X=x_i,Y=y_j), \qquad j=1,2,\cdot\cdot,6.
$$

Ejemplos. Vamos a calcular $P(Y=4)$ y $P(Y=5)$.

$$
P(Y=4)=\sum_{i=1}^{6}P(X=i,\ Y=4)
$$

$$
\begin{aligned}
&P(X=1,\ Y=4)+P(X=2,\ Y=4)+P(X=3,\ Y=4)\\
&+P(X=4,\ Y=4)+P(X=5,\ Y=4)+P(X=6,\ Y=4)\\
&= \frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{4}{36}+0+0=\frac{7}{36}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(Y=5) &= P(X=1,Y=5)+P(X=2,Y=5)+P(X=3,Y=5)\\
&+P(X=4,Y=5)+P(X=5,Y=5)+P(X=6,Y=5)\\
&= \frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+0=\frac{5}{36}.
\end{aligned}
$$

En la siguiente tabla se muestra la distribución conjunta de probabilidad del vector aleatoria (X,Y), $P(X=x_i,Y=y_j)$, $i,j\in\{1,2,3,4,5,6\}$, y las distribuciones de probabilidad marginales, $P(X=x_i)$, $i\in\{1,2,3,4,5,6\}$ y $P(Y=y_j)$, $j\in\{1,2,3,4,5,6\}$.

.	Y=1	Y=2	Y=3	Y=4	Y=5	Y=6	P(X=i)=
X=1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	P(X=1)=$\frac{1}{6}$
X=2	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	P(X=2)=$\frac{1}{6}$
X=3	0	0	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	P(X=3)=$\frac{1}{6}$
X=4	0	0	0	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	P(X=4)=$\frac{1}{6}$
X=5	0	0	0	0	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$	P(X=5)=$\frac{1}{6}$
X=6	0	0	0	0	0	$\frac{6}{36}$	P(X=6)=$\frac{1}{6}$
P(Y=j)=	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	P(X=6)=$\frac{1}{6}$

4.1.3. Probabilidad condicionada

En algunos casos , podemos poseer información sobre el resultado de una de las variables, información que puede ser útil para tener información sobre la otra variable. Así podemos hablar de $P(X = 3|Y = 3)$, que leemos como la probabilidad que la vaiable aleaoria X tome el valor 3 cuando sabemos que la variable aleatoria Y ha tomado el valor 3,

$$P(X = 3|Y = 3) = \frac{P(X = 3, Y = 3)}{P(Y = 3)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{5}{5},$$

$P(Y = 4|X = 5)$, que leemos como la probabilidad que la vaiable aleaoria Y tome el valor 4 cuando sabemos que la variable aleatoria X ha tomado el valor 5,

$$P(Y = 4|X = 5) = \frac{P(X = 5, Y = 4)}{P(X = 5)} = \frac{0}{\frac{1}{6}} = 0,$$

o $P(Y = 1|X \leq 3)$ que lo leemos como la probabilidad de que la variable aleatoria Y tome el valor 1 cuando sabemos que la variable aleatoria X ha tomado un valor menor o igual que 3,

$$P(Y = 1|X \leq 3) = \frac{(P(\{X \leq 3\} \cap \{Y = 1\})}{P(X \leq 3)}$$

$$= \frac{(P(\{X = 1, Y = 1\} \cup \{X = 2, Y = 1\} \cup \{X = 3, Y = 1\})}{P(\{X = 1\} \cup \{X = 2\} \cup \{X = 3\})}$$

$$= \frac{P(X = 1, Y = 1) + P(X = 2, Y = 1) + P(X = 3, Y = 1)}{P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)} = \frac{\frac{1}{36} + 0 + 0}{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = \frac{1}{2}.$$

También podemos hablar de la variable aleatoria $Y|X > 2$. Para esto, siempre hemos obtenido con el dado rojo una puntuación mayor que dos, entonces el espacio muestral asociado a esta nueva sutuación es

$$\Omega_{X>2} = \{(3, j), (4, j), (5, j), (6, j), \quad j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\},$$

y la variable aleatotia $Y|X>2$ está definida en $\Omega_{X>2}$ por

$$\begin{aligned}
Y|X>2:\Omega_{X>2} &\longmapsto \mathbb{R}\\
(3,j) &\longrightarrow (Y|X>2)(3,j)=\text{máx}\{3,j\}=\begin{cases}3 & j\leq 3\\ j & j>3\end{cases}\\
(4,j) &\longrightarrow (Y|X>2)(3,j)=\text{máx}\{4,j\}=\begin{cases}4 & j\leq 4\\ j & j>4\end{cases}\\
(5,j) &\longrightarrow (Y|X>2)(3,j)=\text{máx}\{5,j\}=\begin{cases}5 & j\leq 5\\ j & j>53\end{cases}\\
(6,j) &\longrightarrow (Y|X>2)(6,j)=\text{máx}\{6,j\}=6,
\end{aligned}$$

cuya distribución o función de probabilidad es el conjunto de valores

$$\begin{aligned}
P(Y=1|X>2) &= \tfrac{P(\{X>2\}\cap\{Y=1\})}{P(X>2)}=0,\\
P(Y=2|X>2) &= \tfrac{P(\{X>2\}\cap\{Y=2\})}{P(X>2)}=0,\\
P(Y=3|X>2) &= \tfrac{P(\{X>2\}\cap\{Y=3\})}{P(X>2)}=\tfrac{1}{8},\\
P(Y=4|X>2) &= \tfrac{P(\{X>2\}\cap\{Y=4\})}{P(X>2)}=\tfrac{5}{24},\\
P(Y=5|X>2) &= \tfrac{P(\{X>2\}\cap\{Y=5\})}{P(X>2)}=\tfrac{7}{24},\\
P(Y=6|X>2) &= \tfrac{P(\{X>2\}\cap\{Y=6\})}{P(X>2)}=\tfrac{1}{3}.
\end{aligned}$$

4.1.4. Independencia de variables aleatorias

.

Sin haber definico en concepto de variables aleatorias independientes, X e Y deben ser claramente **dependientes**, ya que el valor que toma la variable Y depende del que toma X. Si el dado rojo sale 4 y el azul 3, la variable aleatoria X toma el valor 4 y la variable aleatoria Y toma el valor 4, pero si el primer dado rojo sale 2 y el azul 3, la variable aleatoria X toma el valor 2 mientras que la Y toma el valor 3.

Definición 59 *Sea $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espacio probabilístico y X e Y dos variables aleatorias discretas. Sean A y B dos subconjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}$, decimos que X e Y son variables aleatorias independientes si los sucesos*

$$\{\omega\in\Omega:\ X(\omega\in A\}\quad y\ \ \{\omega\in\Omega:\ Y(\omega\in B\}$$

son independientes, o dicho de otra modo, si

$$P(X\in A,Y\in B)=P(X\in A)\cdot P(Y\in B).$$

Si X e Y son independientes, tomandoos $A=(-\infty,x]$ y $B(-\infty,y]$, donde x e y son don números reales cualesquiera, tenemos

$$F(x,y)=P(X\leq x,Y\leq y)=P(X\in A,y\in B)=P(X\in A)\cdot P(Y\in B)$$

$$= P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y) = F_X(x) \cdot F_Y(y),$$

donde F es la función de distribución del vector aleatoria (X, Y) y F_X, F_Y son las distribuciones marginales de X e Y respectivamente.

Es fácil demostrar el siguiente resultado que caracteriza la independencia de variables aleatorias discretas.

Proposición 60 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico y X e Y dos variables aleatorias discretas con*

$$\textit{rango de } X = \{x_1, x_2, \cdots\} \quad \textit{y} \quad \textit{rango de } Y = \{y_{1,2}, \cdots\}.$$

X e Y son variables aleatorias independientes si y solamente si

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j), \quad x_i \in \textit{rango de } X, \ \ y_j \in \textit{rango de } Y.$$

Observamos en el ejemplo con el que estamos trabajando, que

$$P(X = 3, Y = 5) = \frac{1}{36} \neq P(X = 3) \cdot P(Y = 5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{9}{36} = \frac{1}{24}.$$

4.1.5. Medidas de centralización y dispersión marginales

Las distribuciones de probabilidad marginales de X e Y son distribuciones de probabilidad de variables aleatorias, y por lo tanto podemos conxiderar su esperanza, mediana, varianza y desviación típica.

La esperanza y varianza de X se conocen con el nombre de **esperanza y varianza marginal de** X y son designadas por μ_X y σ_X^2 respectivamente.

$$E[X] = \mu_X = \sum_{i=1}^{6} x_i P(X = x_i) = 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) + 3 \cdot P(X = 3)$$

$$+4 \cdot P(X = 4) + 5 \cdot P(X = 5) + 6 \cdot P(X = 6)$$
$$= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4\frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3,5.$$

$$E[Y] = \mu_Y = \sum_{j=1}^{6} y_i P(Y = y_j) = 1 \cdot P(Y = 1) + 2 \cdot P(Y = 2) + 3 \cdot P(Y = 3)$$

$$+4 \cdot P(Y = 4) + 5 \cdot P(Y = 5) + 6 \cdot P(Y = 6)$$
$$= 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4\frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} = \frac{161}{36} \cong 4,472.$$

$$V(X) = \sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 P(X = x_i) - E[X]^2 = 1^2 \cdot P(X = 1) + 2^2 \cdot P(X = 2) + 3^2 \cdot P(X = 3)$$

$$+4^2 \cdot P(X = 4) + 5^2 \cdot P(X = 5) + 6^2 \cdot P(X = 6) - 3,5^2$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{1}{6} + 16\frac{1}{6} + 25 \cdot \frac{1}{6} + 36 \cdot \frac{1}{6} - 12,25 = \frac{91}{6} - 12,25 \cong 2,916.$$

$$V(Y) = \sigma_Y^2 = \sum_{j=1}^{6} y_i^2 P(Y = y_j) - E^2 = 1^2 \cdot P(Y = 1) + 2^2 \cdot P(Y = 2) + 3^2 \cdot P(Y = 3)$$

$$+4^2 \cdot P(Y = 4) + 5^2 \cdot P(Y = 5) + 6^2 \cdot P(Y = 6) - 4,472^2$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 9 \cdot \frac{5}{36} + 16\frac{7}{36} + 25 \cdot \frac{9}{36} + 36 \cdot \frac{11}{36} - 20 = \frac{791}{36} - 20 \cong 2.$$

4.1.6. Suma de variables aleatorias

$X + Y$ es una variable aleatoria y recordamos que está definida por

$$\begin{aligned} X + Y : \Omega \quad &\longmapsto \quad \mathbb{R} \\ (i, j) \quad &\longrightarrow \quad X(i, j) + Y(i, j) = i + \text{máx}\{i, j\}. \end{aligned}$$

$$P(X + Y = 6) = P(\{(i, j),\ i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\ : X(i, j) + Y(i, j) = 6\}$$

$$= P(\{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (2, 4), (1, 5)\}) = \frac{5}{36},$$

$$P(Y = 3|X + Y = 6) = \frac{P(\{Y(i, j) = 3\} \cap \{X + Y = 6\})}{P(X + Y = 6)}$$

$$= \frac{P(\{((1, 3), (2, 3), (3, 3), (3, 1), (3, 2)\} \cap \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (2, 4), (1, 5)\})}{P(\{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (2, 4), (1, 5)\})} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{3}{5}.$$

4.1.7. Producto de variables aleatorias

XY es una variable aleatoria yrecordamos que está definida por

$$\begin{array}{rcl} XY:\Omega & \longmapsto & \mathbb{R} \\ (i,j) & \longrightarrow & X(i,j)\cdot Y(i,j) = i\cdot \max\{i,j\}. \end{array}$$

$$P(XY=12) = P(\{(i,j),\ i,j=1,2,3,4,5,6\ : X(i,j)\cdot Y(i,j)=12\}$$
$$P(\{(2,6),(3,4)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

$\square$

4.2. Vectores aleatorios continuos

Definición 61 *Sea $(\Omega,\mathcal{A},)$ un espacio probabilístico y (X,Y) un vector aleatorio bidimensional. Diremos que (X,Y) es continuo, si existe una función $f(x,y)$ integrable en $\mathbb{R}^2$ tal que*

1. $f(x,y)\geq 0,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2,$
2. $\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = 1,$
3. *Si* $A\subset\mathbb{R}^2,\quad P(\{\omega\in\Omega;\ (X,Y)(\omega)\in A\}) = \int\int_A f(x,y)dxdy.$

f es conocida como la función de densidad asociada al vector aleatorio (X,Y).

La **función de distribución conjunta** está dada por

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv,$$

y si $f(x,y)$ es continua, se tiene que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}(x,y) = f(x,y).$$

Para entender la definición anterior, como es habitual, vamos a trabajar con un ejemplo.

Ejemplo 62 *La proporción en sangre de dos compuestos, X e Y, en una especie comun de ratoneses variable. Su distribición conjunta en toda la población se caracteriza por la función de densidad*

$$f(x,y) = \begin{cases} k(1-x)y^2 & \textit{si } 0<x<1,\ 0<y<1 \\ 0 & \textit{en el resto} \end{cases}$$

Un raton se considera sano si ambas concentraciones son in feriores a $\frac{3}{4}$.

1. *Hallar el valor de k.*

2. *Halla la probabilidad de que un raton elegido al azar esté sano.*

3. *Función de distrubución conjunta.*

4. *Calcule la probabilidad de que al tomar un raton, este tenga una proporción del compuesto X entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$.*

5. *Decidir si X e Y son independientes.*

6. *Hallar la concentración media del compuesto Y en la especie.*

7. *Halla la probabilidad de que un raton elegido al azar esté sano.*

Experimento aleatorio: observación de un raton al azar, perteneciente a cierta especie de ratones Ω, para obtener la proporción en sangre de dos compuestos, que designamos por X e Y.

El espacio muestral es Ω.

Consideramos dos variables aleatoria, que las vamos a designar también por X e Y.

$$\begin{array}{rcll} X : \Omega & \longmapsto & \mathbb{R} & \\ \omega & \longrightarrow & X(\omega) = & \begin{array}{l}\text{proporción en sangre en el} \\ \text{ratón } \omega \text{ del compuesto } X,\end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} Y : \Omega & \longmapsto & \mathbb{R} & \\ \omega & \longrightarrow & Y(\omega) = & \begin{array}{l}\text{proporción en sangre en el} \\ \text{ratón } \omega \text{ del compuesto } Y.\end{array} \end{array}$$

Si $f(x, y)$ es la función de densidad del vector aleatorio (X, Y), se tendrá que verificar

1. $f(x, y) \geq 0, \;\; (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

2. $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dxdy = 1$.

1 se verifica si imponemos que $k \geq 0$.

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dxdy = k \int\int_{[0,1]\times[0,1]} (1 - x) y^2 dxdy = k \int_0^1 \left(\int_0^1 (1 - x) y^2 dy \right) dx$$

$$= k \int_0^1 (1 - x) \left(\int_0^1 y^2 dy \right) dx = k \int_0^1 (1 - x) \left(\left. \frac{y^3}{3} \right|_0^1 \right) dx$$

$$= \frac{k}{3} \int_0^1 (1 - x) dx = \frac{k}{3} \left(x - \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 \right) = \frac{k}{6}.$$

Si tomamos $k = 6$, se verifica 1 y 2. La función de densidad queda en la forma

$$f(x,y) = \begin{cases} 6(1-x)y^2 & \text{si } \ 0 < x < 1, \ \ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Una vez que conocemos la función de densidad, podemos calcular la probabilidad de que al tomar un ratón aleatoriamente, este esté sano. Para ello ambas concentraciones del ratón elegido aleatoriamente deben de ser menores que $\frac{3}{4}$. Tendremos que calcular la probabilidad del suceso

$$S = \left\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) < \frac{3}{4}\right\} \cap \left\{\omega \in \Omega : \ Y(\omega) < \frac{3}{4}\right\}$$

$$= \left\{\omega \in \Omega : \ (X,Y)(\omega) \in \left(-\infty, \frac{3}{4}\right) \times \left(-\infty, \frac{3}{4}\right)\right\}.$$

Usualmente este suceso es designafo por $\left(X < \frac{3}{4}, Y < \frac{3}{4}\right)$.

$$P(S) = P\left(X < \frac{3}{4}, Y < \frac{3}{4}\right) = \int\int_{(-\infty,\frac{3}{4})\times(-\infty,\frac{3}{4})} f(x,y)dxdy$$

$$= 6\int_0^{\frac{3}{4}} (1-x)\left(\int_0^{\frac{3}{4}} y^2 dy\right) dx = 6\left(\int_0^{\frac{3}{4}} (1-x)dx\right)\left(\int_0^{\frac{3}{4}} y^2 dy\right)$$

$$= 6\left(x - \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{3}{4}}\right)\left(\frac{y^3}{3}\Big|_0^{\frac{3}{4}}\right) = 0{,}40.$$

4.2.1. Función de distribución conjunta

La funcion de distribución conjunta $F : \mathbb{R}^2 \longmapsto [0,1]$, está definida por

$$\boxed{F(x,y) = P\left((-\infty, x] \times (-\infty, y]\right) = \int\int_{(-\infty,x]\times(-\infty,y]} f(u,v)dudv}$$

No es difícil demostrar que en nuestro caso se tiene

$$F(x,y) = \begin{cases} 2\left(x - \frac{x^2}{2}\right)y^3 & (x,y) \in (0,1)\times(0,1) \\ 2\left(x - \frac{x^2}{2}\right) & (x,y) \in (0,1)\times(1,\infty) \\ y^3 & (x,y) \in (1,\infty)\times(0,1) \\ 1 & (x,y) \in (1,\infty)\times(1,\infty) \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

4.2.2. Funcionnes de densidad marginales

Para calcular la probabilidad de que al tomar un ratón aleatoriamente, este tenga una proporción del compuesto X entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$, independiente de la proporción que tenga del compuesto Y, tendré que calcular la probabilidad del suceso

$$S = \left\{ \omega \in \Omega : \ (X,Y)(\omega) \in (-\infty, \frac{3}{4}) \times \mathbb{R} \right\}.$$

$$P(S) = \int\int_{(-\infty,\frac{3}{4})\times} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\frac{3}{4}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy \right\} dx.$$

Definimos la **función de densidad marginal de** X por

$$\boxed{f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy}$$

Vamos a calcularla

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy = \begin{cases} 6(1-x)\int_0^1 y^2 dy = 2(1-x) & x \in (0,1) \\ 0 & x \notin (0,1) \end{cases}$$

Entonces

$$P(S) = \int_{-\infty}^{\frac{3}{4}} f_X(x)dx = 2\int_0^{\frac{3}{4}} (1-x)dx = \frac{8}{9}.$$

Definimos la **función de densidad marginal de** Y por

$$\boxed{f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx}$$

Vamos a calcularla

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx = \begin{cases} 6y^2 \int_0^1 (1-x)dx = 3y^2 & y \in (0,1) \\ 0 & y \notin (0,1) \end{cases}$$

4.2.3. Funciones de distribución marginales

La función de distribución marginal de X, la designamos por $F_X : \mathbb{R} \longmapsto [0,1]$ y está definida por

$$\boxed{F_X(x) = P\left((-\infty, x] \times \mathbb{R}\right) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du}$$

y en nuestro caso es

$$F_X(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^x f_X(u)du = 0, & x < 0 \\ \int_{-\infty}^x f_X(u)du = \int_0^x 2(1-u)du = 2\left(x - \frac{x^2}{2}\right), & 0 \le x < 1 \\ \int_{-\infty}^x f_X(u)du = \int_0^1 2(1-u)du = 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

Observase que $F'_X(x) = f_X(x)$, salvo quizás en el $x = 0$, lueoo si conocemos $F_X(x)$ podemos obtener la función de densidad margimal de X.

De manera análoga, la función de distribución marginal de Y, la designamos por $F_Y : \mathbb{R} \longmapsto [0,1]$ y está definida por

$$\boxed{F_Y(y) = P\left(\mathbb{R} \times (-\infty, y]\right) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(v)dv}$$

y en nuestro caso es

$$F_Y(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{y} f_Y(v)dv = 0, & y < 0 \\ \int_{-\infty}^{y} f_Y(v)dv = \int_0^y 3v^2dv = y^3, & 0 \leq y < 1 \\ \int_{-\infty}^{y} f_Y(v)dv = \int_0^3 v^2dv = 1, & y \geq 1 \end{cases}$$

4.2.4. Independencia

Definición 63 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico y X e Y dos variables aleatorias continuas. Decimos que X e Y son idependientes si para cada par de subconjuntos A y B de $\mathbb{R}$, los sucesos*

$$\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \in A\} \quad y \quad \{\omega \in \Omega : \ Y(\omega) \in B\}$$

son independientes.

Como en el caso de las variables discretas, si X e Y son independientes, se verifica que

$$F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y),$$

donde F es la función de distribución conjunta de (X,Y) y F_X, F_Y son las funciones de distribución marginales de X e Y respectivamente.

El recíproco también es cierto. Si se cumple $F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du \cdot \int_{-\infty}^{y} f_Y(v)dv,$$

y como consecuencia

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

Veamos que esta condición implica que llas variables son independientes. Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}$, como

$$P(X \in A) = \int_A f_X(x)dx \quad \text{y} \quad P(Y \in B) = \int_B f_Y(y)dy,$$

tenemos

$$P(X \in A, Y \in B) = \int \int_{A \times B} f(x,y)dxdy = \int \int_{A \times B} f_X(x) f_Y(y)dxdy$$

$$= \int_A f_X(x)dx \cdot \int_B f_Y(y)dy = P(A \in A) \cdot P(Y \in B),$$

lo que nos dice que las raviables aleatorias X e Y son independientes. Establecemos el resultado

Proposición 64 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$un espacio probabilístico y X e Y dos variables aleatorias continuas. Las tres afirmaciones siguientes son equivalentes*

1. *X e Y son independientes,*

2. *$F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$, donde F es la función de distribución conjunta de (X,Y) y F_X, F_Y son las funciones de distribución marginales de X e Y respectivamente.*

3. *$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, donde f es la función de densidad conjunta de (X,Y) y f_X, f_Y son las funciones de densidad marginales de X e Y respectivamente.*

En el caso de nuestro ejemplo, se tienen las igualdades

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y), \qquad f(x,y) = f_X(x)f_Y(y),$$

y por lo tanto las variables osn independientes.

4.2.5. Medidas de centralización y dispersión marginales

- **Esperanza marginal de** X por

$$\mu_X = E[X] = \int_{-\infty} \infty x f_X(x)dx.$$

- **Varianza marginal de** X por

$$\sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx - \mu_X^2.$$

(Análogamente definiríamos la esperanza y varianza marginal de)

Las calculamos en nuestro caso

$$\mu_X = E[X] = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = 2\int_0^1 x(1-x)dx = \frac{1}{3},$$

$$\mu_Y = E[Y] = \int_{\mathbb{R}} f_Y(y)dy = 3\int_0^1 y^3 dy = \frac{3}{4},$$

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx - \mu_X^2 = 2\int_0^1 x^2(1-x)dx - \frac{1}{9} = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18},$$

$$\sigma_Y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)dy - \mu_Y^2 = 2\int_0^1 y^4 - \frac{9}{16} = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}.$$

$\mu_Y = \frac{3}{4}$ representa la concentración media del compuesto Y en la especie.

Ejercicio 65 *La función de densidad conjunta de dos variables aleatorias X e Y es*

$$f(x,y) = \begin{cases} 6x & 0 < x < y < 1 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

1. *Calcule las funciones de densidad marginales.*
2. *Calcule las funciones de distribución marginales.*
3. *¿Son independientes las variables X e Y?*
4. *Calcule las esperanzas y varianzas marginales.*

<u>Solución</u>

1. Empezamos calculando la función de densidad marginal de X.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_x^1 6xdy = 6x(1-x) & x \in (0,1) \\ 0 & x \notin (0,1) \end{cases}$$

Ahora la de Y.

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \int_0^y 6xdx = 3y^2 & y \in (0,1) \\ 0 & y \notin (0,1) \end{cases}$$

2. Empezamos calculando F_X y $_Y$.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \int_0^x 6t(1-t)dt = 3x^2 - 2x^3 & x \in (0,1) \\ \int_0^1 6t(1-t)dt = 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)dt = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \int_0^y 3t^2dt = y^3 & y \in (0,1) \\ \int_0^1 3t^2dt = 1 & y \geq 1 \end{cases}$$

3. Calculamos el producto de las funciones de densidad marginales,

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = \begin{cases} 18x(1-x)y^2 & (x,y) \in (0,1) \times (0,1) \\ 0 & \text{en otros caso} \end{cases}$$

Claramente $f(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$ y por lo tanto X e Y no son independientes.

4. Empezamos calculando las esperanzas marginales

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_0^1 6x^2(1-x)dx = \frac{1}{2},$$

$$\mu_Y = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)dy = \int_0^1 3y^3 dy = \frac{3}{4}.$$

Calculamos ahora las varianza marginales

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx - \mu_X^2 = \int_0^1 6x^3(1-x)dx - \frac{1}{4} = \frac{1}{20},$$

$$\sigma_Y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)dy - \mu_Y^2 = \int_0^1 3y^4 dy - \frac{9}{16} = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}.$$

□

4.3. Funciones y medidas características de un vector aleatorio

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico. Si a es un número real,

$$\begin{aligned} X_a : \Omega &\longmapsto \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow X_a(\omega) = a, \end{aligned}$$

es una variable aleatoria (toma el valor a en cada suceso), y usualmente suele designarse solo con la letra a.

Supongamos que $X, Y : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ son dos variables aleatorias y $h : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ una función continua. La variable aleatoria definida por la función h

$$\begin{aligned} h(X,Y) : \Omega &\longmapsto \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow h(X,Y)(\omega), \end{aligned}$$

es una variable aleatoria.

Algunos ejemplos

- $h(x,y) = x + y$,
$$\begin{aligned} X + Y : \Omega &\longmapsto \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow (X+Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega), \end{aligned}$$
- $h(x,y) = x - y$,
$$\begin{aligned} X - Y : \Omega &\longmapsto \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow (X-Y)(\omega) = X(\omega) - Y(\omega), \end{aligned}$$
- $h(x,y) = xy$,
$$\begin{aligned} X \cdot Y : \Omega &\longmapsto \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow (X \cdot Y)(\omega) = X(\omega) \cdot Y(\omega), \end{aligned}$$
- $h(x,y) = ax + by$, con a y b números reales,
$$\begin{aligned} aX + bY : \Omega &\longmapsto \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow (aX+bY)(\omega) = aX(\omega) + bY(\omega), \end{aligned}$$

- $h(x,y) = x^2 + 3xy - 2y^2$,

$$\begin{aligned} X^2 + 3XY - 2Y^2 : \Omega &\longmapsto \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow (X^2 + 3XY - 2Y^2)(\omega) = (X(\omega))^2 + 3X(\omega)Y(\omega) - 2(Y(\omega))^2, \end{aligned}$$

- $h(x,y) = |x - y|$,

$$\begin{aligned} |X - Y| : \Omega &\longmapsto \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow |X - Y|(\omega) = |X(\omega) - Y(\omega)|, \end{aligned}$$

- $h(x,y) = \text{máx}\{x,y\}$,

$$\begin{aligned} \text{máx}\{X,Y\} : \Omega &\longmapsto \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow \text{máx}\{X,Y\}(\omega) = \text{máx}\{X(\omega), Y(\omega)\}. \end{aligned}$$

$\square$

Se puede demostrar que

- Si (X,Y) es una variable aleatoria discreta con

$$\text{rango de } (X,Y) = \{(x_i, y_j),\ \ i, i = 1, 2, \cdots,$$

  entonces

$$E[h(X,Y)] = \sum_i \sum_j h(x_i, y_j) P(X = x_i, Y = y_j).$$

- Si (X,Y) es una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x,y)$, entonces

$$E[h(X,Y)] = \int\int_{\mathbb{R}}^2 h(x,y) f(x,y) dxdy.$$

Ejercicio 66 *La función de densidad conjunta del vector aleatorio (X,Y) está dada por*

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y & x, y \in (0,1) \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Calcule la esperanza de $Z = XY^2 + 2X$.

Solución

Consideramos la función $h(x,y) = xy^2 + 2x$. Entonces

$$E[Z] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) f(x,y) dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (xy^2 + 2x)(x + y) dxdy$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 (x^2y^2 + 2x^2 + xy^3 + 2xy) dx \right) dy = \int \left(\frac{x^3}{3} y^2 + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} y^3 + x^2 y \Big|_0^1 \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y^2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{y^3}{2} + y \right) dy = \frac{101}{72}.$$

Proposición 67 *Sea $(\omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabístico y (X, Y) un vector aleatorio. Si X e Y son independientes, entonces*

$$E[XY] = E[X] \cdot E[Y] = \mu_X \cdot \mu_Y.$$

Proof. Vamos a hacerlo para el caso continuo. Sea $f(x, y)$ la función de densidad conjunta del vector aleatorio y f_X, F_Y las funciones de densidad marginales de las variables X e Y. Por ser independientes la variables X e Y, se verifica que

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y).$$

Consideramos la función $h(x, y) = xy$, tenemos

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) f(x, y) dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_X(x) f_Y(y) dxdy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy.$$

■

Proposición 68 *Sea $(\omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabístico y (X, Y) un vector aleatorio. Si X e Y son independientes, entonces*

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2.$$

Proof. Ya que X e Y son independientes, vamos a usar que $E[XY] = E[X]E[Y]$. También usaremos que la varianza de una variable aleatoria Z es $V(Z) = E[Z^2] - (E[Z])^2$.

$$V(X + Y) = E[(X + Y)^2] - (E[X + Y])^2 = E[X^2 + 2XY + Y^2] - (E[X] + E[Y])^2$$
$$= E[X^2] + E[2XY] + E[Y^2] - (E[X])^2 - 2E[X]E[Y] - (E[Y])^2$$
$$= E[X^2] + 2E[X]E[Y] + E[Y^2] - (E[X])^2 - 2E[X]E[Y] - (E[Y])^2$$
$$= E[X^2] - (E[X])^2 + E[Y^2] - (E[Y])^2 = V(X) + V(Y).$$

■

Ejercicio 69 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico y X e Y dos variables aleatorias independientes, con varianzas finitas y tal que $E[X] = E[Y]$.*

1. *Demuestre que X y αY son independientes, siendo α un número real.*
2. *Compruebe que $E[(X - Y)^2] = V(X) + V(Y)$.*
3. *Si $V(X) = V(Y) = 3$, determine los valores de $V(X - Y)$ y $V(2X - 3Y + 1)$.*

<u>Solución</u>

1. Sean A y B dos subconjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}$. Para ver que X y αY son independientes, tendremos que comprobar que los sucesos

$$\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \in A\} \quad \text{y} \quad \{\omega \in \Omega : \ \alpha Y(\omega) \in B\}$$

son independientes.

Ya que

$$\{\omega \in \Omega : \ \alpha Y(\omega) \in B\} = \{\omega \in \Omega : \ Y(\omega) \in \frac{1}{\alpha} B\},$$

donde $\frac{1}{\alpha}B$ es el suceso

$$\frac{1}{\alpha}B = \{\frac{b}{\alpha} : \ \text{con } b \in B\}$$

y X e Y son independientes, los sucesos

$$\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \in A\} \quad \text{y} \quad \{\omega \in \Omega : \ Y(\omega) \in \frac{1}{\alpha} B\}$$

son independientes.

2. Usaremos que

   a) $E[XY] = E[X]E[Y]$, (X e Y son independientes),
   b) Si Z es una variable aleatoria, se tiene $V(Z) = E[Z^2] - (E[Z])^2$,
   c) $E[X] = E[Y]$, (hipótesis).

$$\begin{aligned} E[(X-Y)^2] = E[X^2 - 2XY + Y^2] &= E[X^2] - 2E[X]E[Y] + E[Y^2] \\ &= E[X^2] - E[X]E[Y] + E[Y^2] - E[X]E[Y] \\ &= E[X^2] - (E[X])^2 + E[Y^2] - (E[Y])^2 = V(X) + V(Y). \end{aligned}$$

3. Usaremoss

   a) Si X e Y son independientes, αX y βY también lo son, cualquiera que sean los números reales α y β.
   b) $V(Z_1 + Z_2) = V(Z_1) + V(Z_2)$ si Z_1 y Z_2 son variables independientes.
   c) $V(\alpha Z + \beta) = \alpha^2 V(Z)$, siendo Z una variable alleatoria y αX y βY dos números reales cualesquiera.

$$\begin{aligned} V(X-Y) &= V(X + (-Y)) = V(X) + V(-Y) \\ &= V(X) + (-1)^2 V(Y) = 3 + (-1)^2 \cdot 3 = 6. \\ V(2X - 3Y + 1) &= V(2X - 3Y) = V(2X + (-3Y)) \\ &= V(2X) + V(-3Y) = 2^2 V(X) + (-3)^2 V(Y) = 2^2 \cdot 3 + (-3)^2 \cdot 3 = 39. \end{aligned}$$

□

5. Ejercicios

Ejercicio 70 *Un dado es lanzado 2 veces. Consideramos como espacio muestral asociado al experimento aleatoria*

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) : \ \omega_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \ i = 1, 2\}.$$

Consideramos la variable aleatoria que considerara la suma de los valores de las caras de los 5 *dados* ($X(\omega) = \sum_{i=1}^{5} \omega_i$)*. Determine los conjuntos*

1. $\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) = 1\}$;
2. $\{\omega \in \Omega : \ \frac{X(\omega)}{2} + 1 = 3\}$;
3. $\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) = 30\}$;
4. $\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \geq 29\}$.
5. $\{\omega \in \Omega : \ 0 \leq X(\omega) \geq 4\}$.

Ejercicio 71 *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio probabilístico,* $A \in \mathcal{A}$ *un suceso y* I_A *la variable aleatoria definida, indicador de* A*, por*

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

Calcule la esperanza de I_A.

<u>Solución</u> $P(A)$.

Ejercicio 72 *La función de probabilidad de una variable aleatoria discreta está dada por*

$X=$	1	3	5	7	9
$P(X =)$	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

Clacule

1. *Función de distribución.*
2. *Esperanza matemática.*
3. *Desviación típica y varianza.*

<u>Solución:</u> 2. 5; 3. varianza 6,4.

Ejercicio 73 *Una urna contiene 10 bolas de las que 8 son blancas. Se sacan dos al azar. Sea* X *la variable aleatoria que designa el número de bolas blancas obtenido. Calcule la función de probabilidad y distribución de la variable aleatoria* X.

Solución 1. $P(X=0)=\frac{1}{45}$, $P(X=1)=\frac{16}{45}$, $P(X=2)=\frac{28}{45}$.

Ejercicio 74 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico con $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ y X una variable aleatoria que tiene por función de probabilidad*

$$P(X=j)=kj, \qquad j\in\Omega.$$

1. *Calcule k.*
2. *Función de distribución de la variable aleatoria X.*
3. *$P(X\leq 5)$ y $P(2<X\leq 5)$.*

Solución 1. $k=\frac{1}{36}$; 3. $\frac{15}{36}$, $\frac{12}{36}$.

Ejercicio 75 *Se considera una moneda trucada, para la que la probabilidad de salir cara es $\frac{1}{3}$ y la de salir cruz es $\frac{2}{3}$. Se lanza la moneda tres veces y sea X la varable aleatoria que representa las veces que sale cara. Calcúlese*

1. *$P(X=i)$, $i=0,1,2,3$.*
2. *Media de X.*
3. *Desviación típica de X.*

Solución: 1. $P(X=0)=\frac{8}{27}$, $P(X=1)=\frac{4}{9}$, $P(X=2)=\frac{2}{9}$, $P(X=3)=\frac{1}{27}$; 2. 1; 3. $\sigma=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ejercicio 76 *En una urna U_1 hay dos bolas blancas y tres negras y en otra urna U_2 hay dos bolas negras. Selecionamos una urna al azar de la que extraemos dos bolas sin reemplazamiento. Sea X la variable aleatoria "número de bolas negras extraídas". Calcular la función de probabilidad de X, su valor esperado y la probabilidad de que hayamos escogido la urna U_1 si el número de bolas negras extraidas ha resultados ser 2.*

Ejercicio 77 *Identificar la variable estadística como discreta o continua:*

1. *V: El volumen de orina producido por hora.*
2. *B: La cantidad de sangre perdida por un paciente durante el transcurso de una operación.*
3. *H: El número de horas de luz por dia necesarias para que una planta florezca.*
4. *C: El número de abejas obreras en una colonia de abejas productoras de miel.*
5. *R: La cantidad de lluvias recibidas por dia en una región concreta.*

6. *S: El nivel en suero de bilirrubina en un niño, en miligramos por decilitro.*

7. *W: El peso ganado por una mujer durante el embarazo.*

8. *X: El número de pruebas necesarias que permita conseguir el primer injerto realizado con éxito, de un tallo de cornejo rosa sobre un tronco de cornejo blanco.*

9. *C: Conde $C = 1$, donde el arbol muestra es de tamaño adecuado para madera, y $C = 0$ en caso contrario.*

10. *P: La tendión arterial sitólica de un paciente con hipertensión.*

11. *E: La altitud a la que se situa el límite de arbolado en una montaña.*

Ejercicio 78 *Determínese el valor de k para que las siguientes funciones sean de densidad:*

1. $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ ke^{-kx} & x > 0 \end{cases}$. <u>*Solución:*</u> $k = 1$.

2. $f(x) = \begin{cases} 0 & \leq 0 \\ \frac{k}{\sqrt{1-x}} & 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$. <u>*Solución:*</u> $k = 1{,}0898$.

3. $f(x) = \frac{k}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. <u>*Solución:*</u> $k = \frac{1}{\pi}$.

Ejercicio 79 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico y $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ una variable aleatoria continua con función de densidad*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0{,}2, & -1 \geq x \leq 0 \\ 0{,}2 + kx, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

1. *Determine el valor de k.* <u>*Solución:*</u> $k = 1{,}2$

2. *Determine la función de distribución asociada a la variable aleatoria X.* <u>*Solución:*</u> $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0{,}2x + 0{,}2, & -1 \geq x \leq 0 \\ 0{,}6x^2 + 0{,}2x + 0{,}2, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$

3. *Calcule $P(0 \leq X \leq 0{,}5)$.* <u>*Solución:*</u> $0{,}25$

4. *Calcule $P(X > 0{,}5 | X > 0{,}1)$.* <u>*Solución:*</u> $0{,}71$

Ejercicio 80 *Se considera la duración de las bombillas fabricadas por una cierta empresa como una variable aleatoria X, cuya función de densidad es*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{k}{x^3} & x > 1 \end{cases}$$

1. *Determínese la constante k.*
2. *Calcúlese la finción de distribución.*
3. *Duración media de las bombillas.*
4. *Probabilidad de que una bombilla dure más de 50 horas.*

Solución: 1. $k = 2$; 2. $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} + 1 & x > 1 \end{cases}$; 3. $E[X] = 2$; 4. $\frac{1}{2500}$

Ejercicio 81 *El tiempo de vida (en años) de cierta especie es una variable aleatoria T con función de densidad*

$$f(t) = \begin{cases} k(1-t)^2 t^2 & t \in (0,1) \\ 0 & \textit{en el resto} \end{cases}$$

1. *Hallar el valor de k.*
2. *Hallar la esperanza de vida.*
3. *Probabilidad de que un ejemplar de esta especie viva menos de 9 meses.*

Solución 1. $k = 30$; 2. 6 meses; 3. 0.8965

Ejercicio 82 *En una empresa dedicada a la fabricación de tornillos se considera la dimensión de un tornillo como varuable aleatorio, cuya función de densidad es*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{k}{x^2} & 1 \leq x \leq 8 \\ 0 & x > 8 \end{cases}$$

Determínese:

1. *El valor de k.*
2. *La función de distribución.*
3. *Probabilidad de que la dimensión de un tornillo esté entre 3 y 5 cm..*
4. *Dimensión media de los tornillo y desviación con respecto a esta.*

5. *El valor de a, tal que el* $90\,\%$ *de los tornillos tenga su dimensión menor o igual que* a.

Solución: 1. $k=\frac{8}{7}$; 2. $F(x)=\left\{\begin{array}{ll} 0 & x<1 \\ \frac{8}{7}\left(1-\frac{1}{x}\right) & 1\leq x\leq 8 \\ 1 & x>1 \end{array}\right.$; 3. $\frac{16}{105}$; 4. $\frac{8\log 8}{7}$; 5. $a=4{,}706$

Ejercicio 83 *Una fábrica produce una pieza en dos calidades diferentes:*

- *El* $60\,\%$ *de la producción es de calidad A. La duración (en años) de una pieza de esta calidad viene dada por la función de densidad*

$$f_A(x)=\left\{\begin{array}{ll} e^{-x} & x>0 \\ 0 & x<0 \end{array}\right.$$

- *El* $40\,\%$ *de la producción es de calidad A. La duración (en años) de una pieza de esta calidad viene dada por la función de densidad*

$$f_B(x)=\left\{\begin{array}{ll} 2e^{-2x} & x>0 \\ 0 & x<0 \end{array}\right.$$

1. *Probabilidad de que una pieza de calidad A dere más de un año.*

2. *Mediana de la distribución del tipo A.*

3. *Si tomamos una pieza al azar de toda la producción, ¿cuál es la probabilidad de que dure más de un año?.*

4. *Si tomamos una pieza al azar de toda la producción, y observamos que dura más de un año, ¿cuál es la probabilidad de que fuera de calidad A?.*

Solución: 1. 0.3679; 2. M=0.6931; 3. 0.2749; 4. 0.8

Ejercicio 84 *Los tiempos de vida, X e Y (en dias); de una bacteria en dos medios distintos e indepemdientes A y B, respectivamente, tienen las funciones de densidad*

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll} \frac{10-x}{50} & 0<x<10 \\ 0 & \textit{en el resto} \end{array}\right. \qquad g(y)=\left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{k}e^{-y/k} & 0<y \\ 0 & \textit{en el resto} \end{array}\right.$$

donde k es una constante positiva. La duración media de las bacterias en el medio B es de 5 dias.

1. *Calcular el valor de k y la esperanza de vida en el medio A.*

2. *Una bacteria tiene la misma probabilidad de estar en el medio A que el el B. Sabiendo que vivió más de 5 dias, ¿cuál es la probabilidad de que se encontrara en el medio A?.*

3. *Hallar la función de densidad conjunta de X e Y y $P(X > 5, Y > 5)$.*

Solución: 1: $k = 5$, $E[X] = 3{,}33$ dias; 2. 0.4; 3. 0.09

Ejercicio 85 *Identificar la variable estadística como discreta o continua:*

1. *V: El volumen de orina producido por hora.*

2. *B: La cantidad de sangre perdida por un paciente durante el transcurso de una operación.*

3. *H: El número de horas de luz por dia necesarias para que una planta florezca.*

4. *C: El número de abejas obreras en una colonia de abejas productoras de miel.*

5. *R: La cantidad de lluvias recibidas por dia en una región concreta.*

6. *S: El nivel en suero de bilirrubina en un niño, en miligramos por decilitro.*

7. *W: El peso ganado por una mujer durante el embarazo.*

8. *X: El número de pruebas necesarias que permita conseguir el primer injerto realizado con éxito, de un tallo de cornejo rosa sobre un tronco de cornejo blanco.*

9. *C: Conde $C = 1$, donde el arbol muestra es de tamaño adecuado para madera, y $C = 0$ en caso contrario.*

10. *P: La tendión arterial sitólica de un paciente con hipertensión.*

11. *E: La altitud a la que se situa el límite de arbolado en una montaña.*

Ejercicio 86 *Determínese el valor de k para que las siguientes funciones sean de densidad:*

1. $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ ke^{-kx} & x > 0 \end{cases}$. *Solución:* $k = 1$.

2. $f(x) = \begin{cases} 0 & \leq 0 \\ \frac{k}{\sqrt{1-x}} & 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$. *Solución:* $k = 1{,}0898$.

3. $f(x) = \frac{k}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. *Solución:* $k = \frac{1}{\pi}$.

Ejercicio 87 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico y $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ una variable aleatoria continua con función de densidad*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0{,}2, & -1 \geq x \leq 0 \\ 0{,}2 + kx, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

1. *Determine el valor de k.* <u>*Solución:*</u> $k = 1{,}2$

2. *Determine la función de distribución asociada a la variable aleatoria X.* <u>*Solución:*</u>
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0{,}2x + 0{,}2, & -1 \geq x \leq 0 \\ 0{,}6x^2 + 0{,}2x + 0{,}2, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

3. *Calcule $P(0 \leq X \leq 0{,}5)$.* <u>*Solución:*</u> 0,25

4. *Calcule $P(X > 0{,}5 | X > 0{,}1)$.* <u>*Solución:*</u> 0,71

Ejercicio 88 *Se considera la duración de las bombillas fabricadas por una cierta empresa como una variable aleatoria X, cuya función de densidad es*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{k}{x^3} & x > 1 \end{cases}$$

1. *Determínese la constante k.*

2. *Calcúlese la finción de distribución.*

3. *Duración media de las bombillas.*

4. *Probabilidad de que una bombilla dure más de 50 horas.*

<u>Solución</u>: 1. $k = 2$; 2. $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} + 1 & x > 1 \end{cases}$; 3. $E[X] = 2$; 4. $\frac{1}{2500}$

Ejercicio 89 *El tiempo de vida (en años) de cierta especie es una variable aleatoria T con función de densidad*

$$f(t) = \begin{cases} k(1-t)^2 t^2 & t \in (0,1) \\ 0 & \textit{en el resto} \end{cases}$$

1. *Hallar el valor de k.*

2. *Hallar la esperanza de vida.*

3. *Probabilidad de que un ejemplar de esta especie viva menos de 9 meses.*

<u>Solución</u> 1. $k = 30$; 2. 6 meses; 3. 0.8965

Ejercicio 90 *En una empresa dedicada a la fabricación de tornillos se considera la dimensión de un tornillo como varuable aleatorio, cuya función de densidad es*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{k}{x^2} & 1 \leq x \leq 8 \\ 0 & x > 8 \end{cases}$$

Determínese:

1. *El valor de k.*
2. *La función de distribución.*
3. *Probabilidad de que la dimensión de un tornillo esté entre 3 y 5 cm..*
4. *Dimensión media de los tornillo y desviación con respecto a esta.*
5. *El valor de a, tal que el 90 % de los tornillos tenga su dimensión menor o igual que a.*

Solución: 1. $k = \frac{8}{7}$; 2. $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{8}{7}\left(1 - \frac{1}{x}\right) & 1 \leq x \leq 8 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$; 3. $\frac{16}{105}$; 4. $\frac{8 \log 8}{7}$; 5. $a = 4{,}706$

Ejercicio 91 *Una fábrica produce una pieza en dos calidades diferentes:*

- *El 60 % de la producción es de calidad A. La duración (en años) de una pieza de esta calidad viene dada por la función de densidad*

$$f_A(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

- *El 40 % de la producción es de calidad A. La duración (en años) de una pieza de esta calidad viene dada por la función de densidad*

$$f_B(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

1. *Probabilidad de que una pieza de calidad A dere más de un año.*
2. *Mediana de la distribución del tipo A.*
3. *Si tomamos una pieza al azar de toda la producción, ¿cuál es la probabilidad de que dure más de un año?.*
4. *Si tomamos una pieza al azar de toda la producción, y observamos que dura más de un año, ¿cuál es la probabilidad de que fuera de calidad A?.*

Solución: 1. 0.3679; 2. M=0.6931; 3. 0.2749; 4. 0.8

Ejercicio 92 *Los tiempos de vida, X e Y (en dias); de una bacteria en dos medios distintos e indepemdientes A y B, respectivamente, tienen las funciones de densidad*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10-x}{50} & 0 < x < 10 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \qquad g(y) = \begin{cases} \frac{1}{k}e^{-y/k} & 0 < y \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

donde k es una constante positiva. La duración media de las bacterias en el medio B es de 5 dias.

1. *Calcular el valor de k y la esperanza de vida en el medio A.*

2. *Una bacteria tiene la misma probabilidad de estar en el medio A que el el B. Sabiendo que vivió más de 5 dias, ¿cuál es la probabilidad de que se encontrara en el medio A?.*

3. *Hallar la función de densidad conjunta de X e Y y $P(X > 5, Y > 5)$.*

Solución: 1: $k = 5$, $E[X] = 3{,}33$ dias; 2. 0.4; 3. 0.09

Ejercicio 93 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico y (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad*

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xye^{-x^2}e^{-y^2} & (x,y) \in (0,\infty) \times (0,\infty) \\ 0 & \textit{en el resto.} \end{cases}$$

1. *Calcule $P([1,5] \times [2,\infty))$.*

2. *Densidades marginales.*

3. *$E[X]$ y $V(X)$.*

4. *$E[Y]$ y $V(Y)$.*

5. *¿Son independientes las variables aleatorias?.*

Indicación: Utilícese que $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Sulución: 2. $f_X(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & x > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$, $f_Y(y) = \begin{cases} 2ye^{-y^2} & y > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$; 3. $E[X] = E[Y] = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $V(X) = V(Y) = 1 - \frac{\pi}{4}$.

Ejercicio 94 *Consideremos la variable aleatoria bidimensional (X, Y) con función de densidad conjunta*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{4} & \textit{si } x^2 \leq y \leq 1 \\ 0 & \textit{en el resto} \end{cases}$$

Calcularlas densidades marginales de cada variable. ¿Son independientes las variables?. Calcular $P(X \geq Y)$.

Solución: $f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1 - x^2) & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$, $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{y} & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$. No. $\frac{1}{8}$.