Lección 2: Combinatoria

Quizás algún estudiante no esta familiarizado con la combinaroria. El objetivo de esta lección es dar los conceptos básicos de de esta disciplina.

1 Variaciones

1.1 Variaciones ordinarias

Ejemplo 1 *Supongamos que tenemos* 4 *colores*

$$\mathit{Azul} = A, \quad \mathit{Rojo} = R, \quad \mathit{Blanco} = B, \quad \mathit{Amarillo} = M.$$

Con estos 4 colores queremos ver cuantas banderas podemos fabricar.

Si la la bandera tiene por ejemplo tres colores, la forma que tendrá es

donde cada rectángulo lo pintamos de un color. Si utilizamos el azul, rojo y blanco, está claro que las siguientes dos banderas son diferentes:

A	R	B

R	A	B

Observamos que **interviene el orden**, si a la izquierda está el azul, en el centro el rojo y a la derecha el blanco, la bandera que obtenemos es diferente a la que tiene el color rojo a la izquierda, azul en el centro y blanco a la derecha.

<u>Banderas utilizando un solo color</u>

Solo podemos fabricar 4.

A	R	B	M

<u>Banderas utilizando dos colores</u>

Si el lado izquierdo de la bandera lo pintamos de azul, entonces tendremos tres banderas diferentes:

A	R		A	B		A	M

Como el lado izquierdo lo podemos pintar de 4 colores diferentes, el número total de banderas de dos colores será $4 \cdot 3$.

Podíamos haber reformulado el problema de la siguiente forma: Si consideramos el conjunto $P = \{A, R, B, M\}$, ¿Cuantos subconjunto ordenados (interviene el orden) de dos elementos de P, podemos obtener?.

$$AR,\ AB,\ AM,\ RA, RB,\ RM,\ BA,\ BR,\ BM,\ MA,\ MR,\ MB.$$

Que intervenga el orden, quiere decir que AR es diferente a RA, lo cual es obvio en el caso de las banderas.

La respuesta es 12. Lo representamos como V_4^2, se lee variaciones de 4 elementos tomados de 2 en 2, y como hemos deducido con el ejemplo de las banderas

$$V_4^2 = 4 \cdot 3 = 12.$$

<u>Banderas utilizando tres colores</u>

El lado izquierdo de la bandera puede estar pintado de 4 colores diferentes.

A				R				B				M		

Supongamos que fijamos un color, por ejemplo el amarillo, entonces el centro de la bandera puede estar pintado con 3 colores diferentes.

M	A			M	R			M	B	

Supongamos que fijamos un color, por ejemplo el blanco, entonces para el lado derecho de la bandera nos quedan solo el azul y rojo, esto es, 2 posibilidades.

M	B	A		M	B	R

El número total será

$$V_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

V_4^3 se lee variaciones de 4 elementos tomadas de 3 en 3.

<u>Banderas utilizando cuatro colores</u>

El lado izquierdo de la bandera puede estar pintado de 4 colores diferentes.

A			

R			

B			

M			

Supongamos que fijamos un color, por ejemplo el rojo, entonces el trozo de bandera que está al lado del trozo pintado por rojo, puede estar pintado con 3 colores diferentes.

R	A		

R	B		

R	M		

Supongamos que lo pintamos de blanco, entonces el trozo que está a la derecha del blanco solo puede ser pintado de dos colores, el azul o el amarillo

R	B	A	

R	B	M	

Si fijamos el amarillo, entonces el trozo que queda a la derecha de la bandera solo puede ser pintado de un color, de azul

R	B	M	A

El número total será

$$V_4^4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

V_4^4 se lee variaciones de 4 elementos tomadas de 4 en 4.

□

Definición 2 *Se llama* **variaciones ordinarias de** m **elementos tomados de** n **en** n**,** $n \leq m$**,** *a los distintos grupos formados por* n *elementos de forma que:*

1. **Importa el orden**, *en el sentido especificado en el ejemplo.*

2. **No se repiten los elementos en un mismo grupo.**

De entre los m *elementos, el número de grupos de* n *elementos con las caracteristicas antes indicadas es:*

$$\boxed{V_m^n = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1).}$$

Ejemplo 3

- $V_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$.
- $V_8^5 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$.
- $V_4^4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

$\square$

Ejemplo 4 *¿Cuántes números de* **tres cifras diferentes** *se pueden formar con los dígitos:* 1*,* 2*,* 3*,* 4 *y* 5*?.*

- Tenemos $m = 5$ elementos, el 1, 2, 3, 4 y 5, y queremos hacer grupos formados por $n = 3$ elementos de estos $m = 5$ elementos.

  Si tomamos el grupo $\{2, 5, 1\}$, hemos elgido primero el 2, despues el 5 y por último el 1, este grupo lo identificamos con el número 251

- Si importa el orden. El grupo $\{1, 2, 3\}$ me produce el número 123, mientras el grupo $\{2, 1, 3\}$ me define el número 213. Como los número 123 y 213 son diferentes, los grupos $\{1, 2, 3\}$ y $\{2, 1, 3\}$ serán diferentes, lo que nos indica que si importa la cifra que tome en primer lugar, en segundo y en tercero.

- No se repiten los elementos. El el enunciado nos pide que las cifras sean diferentes, no podemos considerar el grupo $\{2, 2, 3\}$, en el que el 2 aparece repetido, pues me definiría el número 223.

Los números de tres cifras diferentes que podemos formar con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 es

$$V_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

$\square$

Ejemplo 5 *¿De cuántas formas diferentes se pueden cubrir los puestos de presidente, vicepresidente y tesorero, (una persona no puede ocupar mas de un puesto), de un club de fútbol sabiendo que hay* 12 *posibles candidatos?.*

- En este caso tenemos $m = 12$ elementos, candidatos, y queremos ver los posibles grupos de $n = 3$ que podemos hacer. Si suponemos que el nombre de tres de los candidatos es María, Mateo y Belén, en grupo $\{$María, Mateo, Belén$\}$ indicará la candidatura

- **Presidente:** María,
- **Vicepresidente:** Mateo y
- **Tesorero:** Belen.

- Si importa el orden. Supongamos que otros tres candidatos se llaman Pedro, Ana y José. La candidatura

  - **Presidente:** Ana,
  - **Vicepresidente:** Pedro y
  - **Tesorero:** José,

  es diferente de la candidatura

  - **Presidente:** José,
  - **Vicepresidente:** Ana y
  - **Tesorero:** Pedro.

- No se repiten los elementos. Pedro no puede ser a la vez, por ejemplo, presidente y tesorero.

El número posible de candidaturas es

$$V_{12}^{3} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320.$$

$\square$

Ejemplo 6 *¿De cuantos partidos consta una liguilla formada por cuatro equipos?*

- Supongamos que los equipos son Celta, Real Unión, Parla y Coslada. Tenemos $m = 4$ elementos, equipos. Cada partido lo juegan dos equipos, tendremos entonces que ver los posibles grupon de $n = 2$ elementos que se pueden formar. El grupo {Celta, Parla}, significa que se enfrentan los equipos de Celta y Parla y el encuentro se juega en el campo del Celta.

- Si importa el orden. {Celta, Parla} es diferente {Parla, Celta}.

- No se repiten los elementos. No tiene sentido {Celta, Celta}.

El número de partidos es
$$V_4^2 = 4 \cdot 3 = 12.$$
$\square$

Ejemplo 7 *A un concurso literario se han presentado 10 candidatos con sus novelas. El cuadro de honor lo forman el ganador, el finalista y un accésit. ¿Cuántos cuadros de honor se pueden formar?*

- Tenemos $m = 10$ elementos, candidatos, y queremos ver los grupos de $n = 3$, (cada cuadro de honor lo forman tres candidatos), que podemos hacer.
- Si importa el orden. Está claro que no es lo mismo quedar ganador que ser finalista.
- No se repiten los elementos. Si un candidato es ganador, queda el primero y no el segundo.

El número de posibilidades es
$$V_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$
$\square$

1.2 Permutaciones

En el caso de que en las variaciones ordinarias de m elementos tomados de n en n se verifique que $n = m$, a estas variaciones ordinarias de m elementos tomados de m en m se les llaman **permutaciones de m elemenos**. Son designadas por P_m y se tiene
$$\boxed{P_m = V_m^m = m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots 2 \cdot 1.}$$

Ejemplo 8 *¿Cuántos números de* 5 *cifras diferentes se pueden formar con los dígitos* 1, 2, 3, 4 *y* 5*?*

En este caso tenemos que formar grupos de $n = 5$ elementos tomados estos del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que tiene un cardinal $m = 5$. Se tiene que $n = m = 5$.

Si un grupo es $\{3, 5, 4, 1, 2\}$, este lo identificamos con el número 35412.

- Si importa el orden, los grupos $\{3, 5, 4, 1, 2\}$ y $\{4, 2, 5, 1, 3\}$ definen, respectivamente, los números 35412 y 42513 que son diferentes.

- No se repiten los elementos, ya que lo especifica el enunciado.

Los números de 5 cifras diferentes utilizando los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, corresponden a las variaciones ordinarias de 5 elementos tomados de 5 en 5, o lo que es lo mismo, a las permutaciones de 5 elementos,

$$P_5 = 5!05 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

$\square$

Ejemplo 9 *¿De cuántas formas distintas pueden sentarse ocho personas en una fila de butacas?.*

Supongamos que designamos a la ocho personas por P_1, P_2, $\cdots$, P_8. Una posiblidad sería que se sentasen en la fila de ocho butacas de la forma

P_3	P_1	P_7	P_4	P_8	P_6	P_5	P_2

Esta posibilidad podemos asociarla con el grupo $\{P_3, P_1, P_7, P_4, P_8, P_6, P_5, P_2\}$. Si hacemos esto, tendríamos que ver los distintos grupos de ocho personas, $n = 8$, que podemos hacer con ocho personas diferentes, $m = 8$.

- Si importa el orden. El grupo $\{P_3, P_1, P_7, P_4, P_8, P_6, P_5, P_2\}$ esta indicando que las ocho personas se han sentado de la forma

P_3	P_1	P_7	P_4	P_8	P_6	P_5	P_2	(1)

  mientras que el grupo $\{P_7, P_1, P_5, P_4, P_8, P_6, P_3, P_2\}$ indica que las personas se han sentado de la forma

P_7	P_1	P_5	P_4	P_8	P_6	P_3	P_2	(2)

  y claramente las distribuciones (1) y (2) son diferentes.

- No se repiten los elementos. El grupo $\{P_7, P_7, P_5, P_4, P_8, P_6, P_3, P_2\}$, donde se repite dos veces el P_7, indicaría la distribución

P_7	P_7	P_5	P_4	P_8	P_6	P_3	P_2

  que no se puede dar, pues la persona P_7 no se puede sentar simultaneamente en dos butacas diferentes.

Las formas diferentes que sentarse ocho personas en una fila de ocho butacas, corresponde a las variaciones de $m = 8$ elementos tomados de $n = 8$ en 8, o lo que eslo mismo a las permutaciones de 8 elementos,

$$P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320.$$

$\square$

Ejemplo 10 *Con las letras de la palabra* **libro**, *¿cuántas ordenaciones distintas de cinco letras se pueden hacer que empiecen por vocal y utilizando cada letra solo una vez?*

Hay dos posibilidades para que empiecen por vocal

i				

o

o				

Las cinco letras de la palabra **libro** son todas diferentes. En el primer caso

i				

,

nos quedan cuatro letras $\{l, b, r, o\}$, $m = 4$, y tenemos cuatro posiciones $n = 4$.

- Importa el orden. Las ordenaciones

i	o	r	l	b

  ,

i	l	b	r	o

  son diferentes.

- No se repiten los elementos.

En este caso, las posibles ordenaciones son

$$P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

En el caso

o				

,

tendríamos las mismas posibilidades que en el caso anterior, luego en número total de ordenaciones sería 48.

$\square$

Ejercicio 11 *Cuatro libros distintos de matemáticas, seis diferentes de física y dos diferentes de química se colocan en un estante. De cuantas formas es posibles ordenarlos si:*

1. *Los libros de cada asignatura deben estar juntos.*

2. *Solamente los libros de matemáticas deben estar juntos.*

Solución:

1. Designamos por

   M_1, M_2, M_3 y M_4 los libros de matemáticas,

   F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 y F_6 los de física y

   Q_1 y Q_2 los de química.

   Una ordenación posibles es

M_3	M_2	M_4	M_1	F_1	F_3	F_5	F_6	F_4	F_2	Q_2	Q_1

   , (3)

   o

F_4	F_2	F_5	F_3	F_6	F_1	Q_1	Q_2	M_3	M_4	M_2	M_1

   (4)

   Sin embargo

M_3	F_2	F_4	M_1	Q_1	F_3	F_5	F_6	M_4	M_2	Q_2	F_1

   ,

   no está permitida, puen no todos los libros de matemáticas, ni los de física están juntos.

   En (3) hemos colocado primero los libros de matemáticas, luego los de física y por último los de química. Esto lo representamos por MFQ. El (4), primero los de física, luego los de química y por último los de matemáticas. Esto lo representamos por FQM.

   Según coloquemos por bloques, tenemos 6 posibilidades:

   $$MFQ \quad MQF \quad FMQ \quad FQM \quad QMF \quad QFM$$

   Vamos a ver de cuantas formas podemos colocar MFQ. Los de matemáticas tienen que estar en primer lugar, enpecemos entonces colocando estos, luego los de físicas, y por último los de química.

M	M	M	M								

   , (5)

Donde está una M tiene que haber un libro de matemáticas. Tenemos $m = 4$ elementos y $n = 4$ posiciones. Vamos a calcular cuantas ordenaciones, grupos, diferentes de $n = 4$ elementos podemos hacer con los libros M_1, M_2, M_3 y M_4. La ordenación $\{M_3, M_2, M_4, M_1\}$ indicará que los libros de matemáticas han quedado en la estanteria en la forma

M_3	M_2	M_4	M_1								

- Interviene el orden, los grupos $\{M_3, M_2, M_4, M_1\}$ y $\{M_4, M_2, M_1, M_3\}$ dan lugar a ordenaciones diferentes de los libros de matemáticas en la estanteria.
- No se pueden repetir los elementos en un grupo. El grupo $\{M_3, M_3, M_4, M_1\}$ no es valido, porque si lo fuese, implicaría que hay dos libros de matemáticas iguales, y el enunciado nos dice que los 4 libros de matemáticas son diferentes.

Las distintas posibilidades para los libros de matemáticas son las permutaciones de 4 elemento, $P_4 = 4! = 24$.

Vamos a ver ahora de cuantas formar podemos ordenar los de física. Supongamos una ordenación dada de los de matemáticas, por ejemplo

M_3	M_2	M_4	M_1	F	F	F	F	F	F		

Donde pone F tenemos que colocar un libro de física. Tenemos $m = 6$ libros deferentes de física y $n = 6$ posiciones para colocarlos. Como en el caso de los de matemáticas, el número posible de colocaciones es $P_6 = 6! = 720$. Por cada una posible colocación de los libros de matemáticas, tenemos 720 posibles colocaciones para los libros de física. Entonces el número posible de colocaciones de los libros de matemáicas y física en la forma MFQ es

$$P_4 \cdot P_6 = 24 \cdot 720.$$

Supongamos una colocación dada de los libros de matemáticas y física en la forma MFQ, por ejemplo

M_3	M_2	M_4	M_1	F_1	F_3	F_5	F_6	F_4	F_2	Q	Q

Donde pone una Q tenemos que poner un libro de química. Como tenemos $m = 2$ libros distintos de química y $n = 2$ posiciones para colocarlos, el número de opciones, cuando hemos fijado una colocación de los libros de matemáticas y física en la forma MFQ será de $P_2 = 2! = 2$.

Para cada colocación de los libros de matemáticas y física en la forma MFQ tenemos 2 posibles colocaciones para los de química, como tenemos $24 \cdot 720$ posibles colocaciones de los libros de matemáticas y física en la forma MFQ, el número total de colocar los libros en la forma MFQ es

$$P_4 \cdot P_6 \cdot P_2 = 24 \cdot 720 \cdot 2.$$

De una manera análoda veríamos que el número de posibles ordenaciones de los libros en la forma MQF es $P_4 \cdot P_2 \cdot P_6$. Ya que tenemos 6 posibilidades de colocarlos por bloques

$$MFQ \quad MQF \quad FMQ \quad FQM \quad QMF \quad QFM$$

el número total de posibles colocaciones de los libros es

$$6 \cdot P_4 \cdot P_6 \cdot P_2.$$

2. Se deja al estudiante como ejercicio. La solución es $2 \cdot P_4 \cdot P_8$.

$\square$

1.3 Permutaciones circulares

Se utilizan cuando los elementos se han ordenado **"en círculo"**, (por ejemplo, los comensales de una mesa), de modo que el primer elemento que se sitúe en la muestra determina el principio y el final de la muestra.

El número de permutaciones circulares de m elementos es

$$\boxed{PC_m = (m-1)! = (m-1) \cdot (m-2) \cdots 2 \cdot 1.}$$

Ejemplo 12 *¿De cuántas formas diferentes pueden sentarse ocho personas alrededor de una mesa redonda?*

Solución:

Designamos por P_1, P_2, $\cdots$, P_8 a las ocho personas y consideramos las dos disposiciones siguientes:

P_3	P_6	P_1
P_2		P_5
P_7	P_4	P_8

P_4	P_7	P_2
P_8		P_3
P_5	P_1	P_6

En ambas, la persona P_1 tiene a su derecha a P_6 y a su izquierda a P_5. Lo que ocurre con la persona P_1 ocurre con cualquier otra. Estas dos disposiciones las vamos a considerar iguales. Las sillas son todas iguales y no están numeradas. Una disposición queda determinada por los individuos que tiene una persona a su derecha e izquierda.

La persona P_1 va a sentarse en una silla, da exactamente igual la que tome. Una vez sentado P_1, nos quedan por sentar a $m = 7$ personas y tenemos $n = 7$ sillas. Tendremos que hacer grupos de 7 elementos tomados de las personas P_2, P_3, $\cdots$, P_8. El grupo $\{P_5, P_8, P_4, P_7, P_2, P_3, P_6\}$ indica que P_5 está sentado a la izquierda de P_1, P_8 está sentado a la izquierda de P_5, $\cdots$, P_3 a la izquierda de P_6 y esta a la izquierda de P_1 y quedan sentados en la forma

P_3	P_6	P_1
P_2		P_5
P_7	P_4	P_8

- Interviene el orden.

  Las disposiciones $\{P_5, P_8, P_4, P_7, P_2, P_3, P_6\}$ y $\{P_3, P_8, P_5, P_7, P_2, P_4, P_6\}$ son diferentes. En la primera P_8 esta sentado a la izquierda de P_5 mientras que en la segunda P_7 esta sentado a la izquierda de P_5.

- No se repiten las personas en un mismos grupo. Una persona no puede estar simultaneamente sentada en dos sillas.

El número de disposiciones diferentes seran las variaciones ordinarias de $m = 7$ elementos tomados de $n = 7$ en 7, o lo que es lo mismo las permutaciones de 7 elementos:

$$PC_8 = P_7 = 7! = 5040.$$

$\square$

Ejemplo 13

¿De cuantas formas se pueden sentar siete personas en torno a una mesa redonda si:

1. no hay restricciones;

2. dos personas particulares no pueden sentarse juntas?.

<u>Solución:</u>

Designamos a las personas por P_1, P_2, $\cdots$, P_7.

1. $PC_7 = P_6 = 6! = 720$.

2. Supongamos que las dos personas que no se pueden sentar juntas son P_1 y P_2. Vamos a calcular de cuantas maneras posibles se pueden sentar juntos P_1 y P_2 y este número se lo restaremos al todal de formas diferentes sin ninguna restricción PC_7.

   Para indicar que P_1 y P_2 están juntos, lo vamos a representar como si estuviesen sentados en la misma silla.

   Las siguientes dos disposiciones las considramos iguales

$$\begin{array}{ccc} & P_1P_2 & \\ P_5 & & P_4 \\ & & \\ P_6 & & P_7 \\ & P_3 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & P_6 & \\ P_3 & & P_5 \\ & & \\ P_7 & & P_1P_2 \\ & P_4 & \end{array}$$

   pero son diferentes a

$$\begin{array}{ccc} & P_6 & \\ P_3 & & P_5 \\ & & \\ P_7 & & P_2P_1 \\ & P_4 & \end{array}$$

   Pues en las dos primeras P_1 tiene a su izquierda a P_2 mientras que en la tercera P_1 tiene a su derecha a P_2.

   Estudiemos el caso de que P_1 tiene a su izquierda a P_2. Como en el ejercicio anterior, P_1P_2 ocuparan una silla, da igual la que sea. Me quedan $m = 5$ personas y $n = 5$ sillas. El número de posibilidades es

$$PC_6 = P_5 = 120.$$

Si P_1 tiene asu derecha a P_2 tendríamos también 120 maneras diferentes de sentarse. En número de posibilidades de sentarse P_1 P_2 juntos en $2PC_6$ y las posibilidades de que no estén juntos

$$PC_7 - P_2 \cdot PC_6 = 480.$$

$\square$

1.4 Variaciones con repetición

Se llaman **variaciones con repetición de** m **elementos tomados de** n **en** n a los distintos grupos formados por n elementos de manera que:

- Si importa el orden.
- Si se repiten los elementos.

Los distintos grupos son

$$\boxed{VR_m^n = m^n.}$$

Ejemplo 14 *¿Cuántos número de tres cifras se pueden formar con los números: 1, 2, 3, 4 y 5?.*

<u>Solución:</u>

Posibles números son

$$254 \qquad 211 \qquad 542 \qquad 333$$

Tenemos $m = 5$ elementos y queremos hacer grupos de $n = 3$ El grupo $\{2, 5, 4\}$ representa al número 254, el grupo $\{2, 1, 1\}$ representa al número 211 y el grupo $\{5, 4, 2\}$ representa al número 542.

- Si importa el orden. Los grupos $\{2, 5, 4\}$ y $\{5, 4, 2\}$ representan distintos números.
- Si se repiten los números. El enunciado no nos dice que el número 252 no pueda ser considerado.

El número total es

$$VR_5^3 = 5^3 = 125.$$

$\square$

Ejercicio 15 *¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los números:* 0, 1, 2, 3, 4 *y* 5*?.*

Solución:
En este caso $m = 6$ y $n = 3$.

- Si importa el orden. Los números 325 y 523 son diferentes.
- Si se repiten los números. El enunciado no nos dice que el número 252 no pueda ser considerado.

$$VR_6^3 = 6^3 = 216.$$

Pero esta no es la respuesta correcta, pues hemos seleccionado números que empiezan por 0, por ejemplo el 054, y este número se considera que es de dos cifras.

Vamos a hallar los números que empiezan por 0. La primera posición está fija y ocupada por el cero

0		

Tenemos 6 números, $m = 6$, para las dos últimas cifras, $n = 2$. Estamos en las condiciones

- Si importa el orden. Los números 025 y 052 son diferentes.
- Si se repiten los números. El enunciado no nos dice que el número 022 no pueda ser considerado.

$$VR_6^2 = 6^2 = 36.$$

El resultado final es

$$VR_6^3 - VR_6^2 = 216 - 36 = 180.$$

□

Ejercicio 16 *Halle el número de capicúas de* 8 *cifras. ¿Cuántos hay de* 9 *cifras?*

Solución:

Supongamos que las letras a, b, c y d representan números del conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Un número capicúa de 8 cifras tiene la forma

a	b	c	d	d	c	b	a

Podemos reducirnos entonces a cuantos números de 4 cifras podemos formar con los números $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

- Si importa el orden. Los números 4025 y 5024 son diferentes.
- Si se repiten los números. El enunciado no nos dice que el número 4022 no pueda ser considerado.

$$VR_{10}^{4} = 10^{4} = 1000.$$

A estos números tenemos que quitarles los que empiezan por 0,

0			

que los consideramos de tres cifras. Estos son

$$VR_{10}^{3} = 10^{3} = 1000.$$

El número total de capicúas de 8 cifras es

$$VR_{10}^{4} - VR_{10}^{3} = 9000.$$

Como antes, supongamos que las letras a, b, c, d y e representan números del conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Un número capicúa de 9 cifras tiene la forma

a	b	c	d	e	d	c	b	a

Como en el apartado anterior

$$VR_{10}^{5} - VR_{10}^{4} = 90000.$$

$\square$

Ejercicio 17 *En un hospital se utilizan cinco símbolos para clasificar las historias clínicas de sus pacientes, de tal manera que las dos primeras son letras y los tres últimos son dígitos. Suponiendo que hay* 25 *letras, ¿cuántas historias clínicas podrán hacerse si:*

1. no hay restricciones sobre letras y números;

2. las dos letras no pueden ser iguales?.

1. Dado que es necesario tener en cuenta el orden de las dos letras escogidas y además éstas pueden repetirse, resulta que hay

$$VR_{25}^{2} = 25^2 = 625,$$

posibilidades para las letras. Si se procede análogamente con el caso de los dígitos se obtiene un total de

$$VR_{10}^{3} = 10^3 = 1000,$$

posibilidades para los dígitos. El total de historias clínicas que pueden hacerse es

$$VR_{25}^{2} \cdot VR_{10}^{3} = 625000.$$

2. Se procede de forma similar al caso anterior, con las única diferencia de que ahora las letras no pueden repetirse:

$$V_{25}^{2} \cdot VR_{10}^{3} = 600000.$$

2 Combinaciones

Ejemplo 18 *A una clase de ingles asisten* 5 *estudiantes, Mara (M), Juan (J), Arantxa (A), Pedro (P) y Belén (B). La profesora quiere ver los distintos grupos de* 1, 2, 3, 4 *y* 5 *estudiantes que puede hacer, con el objetivo de que realicen trabajos en forma conjunta.*

Si por ejemplo, queremos ver grupos de dos personas, el grupo formado por Juan y Arantxa es el mismo que el formado por Arantxa y Juan. **No importa el orden**.

Grupos formados por un estudiante.

Está claro que podemos formar 5 grupos de un solo estudiante.

$$\boxed{M} \quad \boxed{J} \quad \boxed{A} \quad \boxed{P} \quad \boxed{B}$$

<u>Grupos formados por dos estudiantes</u>
Vamos a describir los grupos que podemos formar

$$\begin{array}{cccc} \boxed{M\ \ J} & \boxed{M\ \ A} & \boxed{M\ \ P} & \boxed{M\ \ B} \\ & \boxed{J\ \ A} & \boxed{J\ \ P} & \boxed{J\ \ B} \\ & & \boxed{A\ \ P} & \boxed{A\ \ B} \\ & & & \boxed{P\ \ B} \end{array}$$

Observamos que el número es 10. A los 10 grupos obtenidos, la llamaremos las combinaciones (no interviene el orden) de 5 elementos tomados de 2 en 2, y las desiganamos por C_5^2. Ya que $V_5^2 = 20$ y $P_2 = 2$, observamos que

$$V_5^2 = C_5^2 \cdot P_2, \implies \boxed{C_5^2 = \frac{V_5^2}{P_2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10}.$$

<u>Grupos formados por trés estudiantes</u>
Vamos a describir los grupos que podemos formar

$$\begin{array}{cccccc} \boxed{M\ \ J\ \ A} & \boxed{M\ \ J\ \ P} & \boxed{M\ \ J\ \ B} & \boxed{J\ \ A\ \ P} & \boxed{J\ \ A\ \ B} & \boxed{A\ \ P\ \ B} \\ & \boxed{M\ \ A\ \ P} & \boxed{M\ \ A\ \ B} & & \boxed{J\ \ P\ \ B} & \\ & & \boxed{M\ \ P\ \ B} & & & \end{array}$$

Observamos que el número es 10. A los 10 grupos obtenidos, la llamaremos las combinaciones (no interviene el orden) de 5 elementos tomados de 3 en 3, y las desiganamos por C_5^3. Ya que $V_5^3 = 60$ y $P_3 = 6$, observamos que

$$V_5^3 = C_5^3 \cdot P_3, \implies \boxed{C_5^3 = \frac{V_5^3}{P_3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10}.$$

<u>Grupos formados por cuatro estudiantes</u>

$$\begin{array}{ccc} \boxed{M\ \ J\ \ A\ \ P} & \boxed{M\ \ J\ \ A\ \ B} & \boxed{M\ \ J\ \ P\ \ B} \\ & \boxed{M\ \ A\ \ P\ \ B} & \boxed{J\ \ A\ \ P\ \ B} \end{array}$$

A los 5 grupos que obtenemos, los llamamos las combinaciones de 5 elementos tomados de 4 en 4. Las designamos por C_5^4 y se verifica

$$C_5^4 = \frac{V_5^4}{P_4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5.$$

Grupos formados por cinco estudiantes
Solamente tenemos 1.

$$\boxed{M \quad J \quad A \quad P \quad 5}$$

$$C_5^5 = \frac{V_5^5}{P_5} = 1.$$

□

Definición 19 *Se llama* **combinaciones de** m **elementos tomados de** n **en** n *($m \geq n$) a los distintos grupos formados por n elementos de forma que:*

- *No importa el orden.*
- *No se repiten los elementos.*

El número de combinaciones de m elementos tomados de n en n es

$$\boxed{C_m^n = \frac{V_m^n}{P_n} = \frac{m \cdot (m-1) \cdots (m-n+1)}{n!} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!} = \binom{m}{n}.}$$

Ejemplo 20

1. En una clase de 35 alumnos se quiere elegir un comité formado pos tres alumnos. ¿Cuántos comités diferentes se pueden formar?.

   Tenemos 35 alumnos $m = 35$ y queremos agruparlos en grupos de tres en tres $n = 3$.

   - No importa el orden. Si los nombres de tres alumnos son Pedro, Juan y Alonso, el grupo formado por {Pedro, Alonso, Juan} es el mismo que el grupo {Alonso, Juan , Pedro}

- No se repiten los elementos.

$$C_{35}^{3} = \frac{V_{35}}{P_3} = \frac{35 \cdot 34 \cdot 33}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 6545.$$

2. Una persona tiene cinco monedas de distintos valores. ¿Cuántas sumas diferentes de dinero puede formar con las cinco monedas?

   - Si solamente utiliza una moneda podrá formar $5 = C_5^1$.
   - Si utiliza dos monedas, entonces se tendrán que calcular los distintos grupos de dos monedas que se pueden hacer con las cinco monedas.
     - No importa el orden. Si, por ejemplo, entre las monedas hay una de1 euro y otra de 2 euros, la suma del grupo $\{2, 1\}$ es la misma que la del grupo $\{1, 2\}$.
     - No se repiten los elementos.

     $$C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10.$$

   - Procediendo como en el apartado anterior, so utilizamos tres monedas, las sumas que podemos hacer son C_5^3.
   - Si utilizamos cuatro o cinco monedas, las sumas que podemos hacer son C_5^4 y $C_5^5 = 1$ respectivamente.

   El número total de sumas es

   $$C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5.$$

□

Ejemplo 21 *El poker se juega con* 32 *cartas, cada una de las cuales tiene un "número" que puede ser* 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A *y un símbolo (o "palo") que puede ser* $\clubsuit$, $\diamondsuit$, $\heartsuit$, $\spadesuit$. *De este modo,* $(10, \heartsuit)$ *representa el diez de corazones. Un jugador recibe cinco cartas.*

1. *Si de las cinco cartas, hay tres de un mismo número y dos de otro, determine el número de posibles cartas que haya podido recibir.*

2. *Si el jugador recibe cuatro cartas del mismo número (por tanto la última de distinto), ¿cuántos casos posibles hay?.*

3. *¿De cuántas maneras puede recibir sus cartas de modo que las cinco sean del mismo palo?.*

1. Supongamos que hay tres del nḿero 9 y dos del J. ¿Cuántos posibles grupos de tres cartas del número 9 son posibles?.

   - No entran todos los 9, cada grupo está formado solo por tres 9.
   - No importa el orden. El grupo $\{(9, \heartsuit), (9, \clubsuit), (9, \diamondsuit)\}$ es el mismo que el grupo $\{(9, \diamondsuit)(9, \heartsuit), (9, \clubsuit)\}$
   - No se repiten los elementos.

   El número será $C_4^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$.

   Análogamente los grupos de dos cartas del número J serían $C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$.

   Los grupos de cinco cartas con tres 9 y dos J son:

   $$C_4^3 \cdot C_4^2 = 24.$$

   Hemos particularizado solamente con el número 9 y el J. ¿Cuántos grupos de cinco cartas podemos tener en los cuales tres cartas sean de un mismo número y las otras dos de otro mismo número?. Otra manera de preguntarlo: ¿cuántas colecciones de dos elementos podemos tener, donde el primer elemento es un grupo de tres cartas del mismo número y el segundo elementos es un grupo de dos cartas del mismo número?

   - Si importa el orden. El elemento formado por un grupo de tres cartas del número 9 y de dos cartas del número J es diferente al grupo de tres cartas del número J y de dos cartas del número 9
   - No se repiten los elementos.

   El número de elementos será

   $$V_8^2 = 8 \cdot 7 = 56.$$

   El número posible de cartas que ha podido recibir el jugador es

   $$V_8^2 \cdot C_4^3 \cdot C_4^2.$$

2. Supongamos que el jugador toma cuatro cartas del nḿero A. Los posibles grupos de cuatro cartas del número A son $C_4^4 = 1$. Con cada uno de estos grupos, para completar las quinta carta, necesitamos otra de un úmero diferente. Tenemos entonces 28 posibilidades. Los posibles grupos de cinco cartas, donde cuatro son del número A son 28.

   Grupos de cinco cartas, donde cuatro sean del mismo número hay solo 8. El número total de casos posibles sera $28 \times 8 = 224$.

3. Supongamos que queremos que las cinco cartas queremos que sean del palo ♣. Tenemos ocho cartas de este palo.

   - No importa el orden.
   - No se repiten los elementos.

   El número de grupos de 5 cartas del palo ♣ es

$$C_8^5 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 56.$$

   Los posibles palos que tenemos son 4. El número de grupos de cinco cartas de modo que las cinco sean dell mismo palo es

$$4 \cdot C_8^5 = 224.$$

3 Preguntas test

Pregunta 22 *Si en un concurso de matemáticas participan* 50 *personas, ¿de cuántas maneras pueden quedar repartidos el primer, segundo y tercer lugar?*

$\boxed{A}$ V_{50}^3 $\boxed{B}$ C_{50}^3 $\boxed{C}$ $V_{50}^3 - C_{50}^3$ $\boxed{D}$ P_3

Pregunta 23 *¿Cuántos números de cinco cifras no tienen ni cincos ni treses?*

$\boxed{A}$ V_8^5 $\boxed{B}$ $VR_8^5 - VR_8^4$ $\boxed{C}$ $V_8^5 - V_7^4$ $\boxed{D}$ P_8

Pregunta 24 *¿Cuántos resultados diferentes pueden aparecer al lanzar un dado 4 veces?*

$\boxed{A}$ C_6^4 $\boxed{B}$ VR_6^4 $\boxed{C}$ V_6^4 $\boxed{D}$ P_4

Pregunta 25 *Una organización estudiantil tiene que elegir un delegado y un subdelegado. Hay siete candidatos. Cuantas elecciones son posibles?*

$\boxed{A}$ 21 $\boxed{B}$ 35 $\boxed{C}$ 49 $\boxed{D}$ 42

Pregunta 26 *Un grupo de tres chicos y dos chicas son colocados al azar en una mesa circular. Si a es el número de colocaciones diferentes en las que se sientas dos chicas juntas y b es el número de colocaciones diferentes en las que no se sientan dos chicas juntas (dos colocaciones derán iguales si una puede ser obtenida de la otra mediante una rotación apropiada). Entonces:*

$\boxed{A}$ $a = 12, \ \ b = 36$ $\boxed{B}$ $a = 6, \ \ b = 18$ $\boxed{C}$ $a = 12, \ \ b = 12$ $\boxed{D}$ $a = 6, \ \ b = 12$

Pregunta 27 *¿Cuál es el número de colocaciones diferentes de siete libros en una estantería de modo que tres libros determinados esten siempre separados entre sí?.*

$\boxed{A}$ 1820 $\boxed{B}$ 1520 $\boxed{C}$ 1634 $\boxed{D}$ 1440

Pregunta 28 *En una carrera de maratón intervienen* 4 *españoles,* 4 *italianos,* 4 *ingleses y* 4 *franceses. Supuesto que terminan la carrera todos los corredores, cuántos podios distintos pueden darse al acabar la carrera en los cuales no hay españoles.*

$\boxed{A}$ 210 $\boxed{B}$ 1348 $\boxed{C}$ 1320 $\boxed{D}$ 1570

Pregunta 29 *Con las cifras* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 *y* 8 *se forman números de cinco cifras, ¿cuántos números diferentes pueden formarse sin repetir las cifras?.*

$\boxed{A}$ 13440 $\boxed{B}$ 15120 $\boxed{C}$ 13144 $\boxed{D}$ 12882

Pregunta 30 *¿Cuántas permutaciones del conjunto de números* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*, satisface la condición: el* 1 *está en la primera posición y el* 4 *es la tercera?.*

$\boxed{A}$ 12 $\boxed{B}$ 23 $\boxed{C}$ 30 $\boxed{D}$ 24

Pregunta 31 *En una cafetería hay cuatro tipos de bocadillos para comer. ¿De cuantas maneras distintas se pueden elegir seis bocadillos de entre los cuatro tipos?*

$\boxed{A}$ 81 $\boxed{B}$ 64 $\boxed{C}$ 87 $\boxed{D}$ 84

Pregunta 32 *De cuántas formas* 5 *hombres y* 3 *mujeres se pueden sentar alrededor de una mesa redonda de modo que dos mujeres no se sienten juntas. (Dos formas son iguales si se llega de una a otra por rotación. No importa únicamente el sexo sino también que persona es)*

$\boxed{A}$ 2880 $\boxed{B}$ 4328 $\boxed{C}$ 1100 $\boxed{D}$ 1440

Pregunta 33 *Se* $\mathcal{E}$ *un alfabeto con* 5 *vocales y 21 consonantes. ¿Cuántas palabras de cinco letras pueden formarse con las letras de* $\mathcal{E}$*, tales que la primera y la última letras sean vocales distintas y las otras tres sean consonantes distintas?*

$\boxed{A}$ 2214 $\boxed{B}$ $VR_5^2 \cdot VR_{21}^3$ $\boxed{C}$ $V_5^2 \cdot V_{21}^3$ $\boxed{D}$ $C_5^2 \cdot C_{21}^3$

Pregunta 34 *¿Cuántas permutaciones del conjunto de números* $\{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$ *satisfacen la condición de que en la primera posición y en la última haya un múltiplo de tres?*

$\boxed{A}$ $P_3 \cdot P_3$ $\boxed{B}$ $V_3^2 \cdot P_4$ $\boxed{C}$ $C_3^2 \cdot P_6$ $\boxed{D}$ 420

Pregunta 35 *¿ De cuántas maneras se pueden formar un equipo de baloncesto de cinco jugadores, si en la plantilla hay doce jugadores. (No se tiene en cuenta el puesto de cada jugador)?.*

$\boxed{A}$ 12^5 $\boxed{B}$ C_{12}^5 $\boxed{C}$ $\frac{5!}{12}$ $\boxed{D}$ V_{12}^5

4 Apendice

4.1 Permutaciones con repetición

Permutaciones con repetición de m **elementos donde el primero se repite** a **veces, el segundo** b **veces, el tercero** c **veces,** $\cdots$ $(m = a+b+c\cdots)$ son los distintos grupos que se pueden formar con esos elementos de forma que :

- Si entran todos lo elementos.
- Si importa el orden.
- Si se repiten los elementos.

El número de las permutaciones con repetición de m elementos donde el primero se repite a veces, el segundo b veces, el tercero c veces, $\cdots$ ($m = a + b + c \cdots$) es

$$\boxed{PR_m^{a,b,c,\cdots} = \frac{P_m}{a! \cdot b! \cdot c! \cdots}}.$$

Ejemplo 36

1. Con las cifras 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4 y 4, ¿cuántos números de nueve cifras se pueden formar?.

   En este caso el número de elementos $m = 9$, el 2 se repite $a = 3$ veces, el 3 se repite $b = 4$ veces y el 4 se repite $c = 2$ veces.

   - Si entran todos lo elementos, los números que queremos formar tienen nueve cifras.
   - Si importa el orden, ya que el número 243334223 es diferente al número 443232323.
   - Si se repiten los elementos.

   $$PR_9^{3,4,2} = \frac{P_9}{3! \cdot 4! \cdot 2!} = 1260.$$

2. ¿Cuántos números de cinco cifras están formados únicamente de cuatros y doses?

   $$\begin{array}{l} 5 \text{ cuatros: } P_5^{5,0} = \frac{5!}{5! \cdot 0!} = 1, \\ 4 \text{ cuatros: } P_5^{4,1} = \frac{5!}{4! \cdot 1!} = 5, \\ 3 \text{ cuatros: } P_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10, \\ 2 \text{ cuatros: } P_5^{2,3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10, \\ 1 \text{ cuatros: } P_5^{1,4} = \frac{5!}{1! \cdot 4!} = 5, \\ 0 \text{ cuatros: } P_5^{0,5} = \frac{5!}{0! \cdot 5!} = 1. \end{array}$$

   El número es:

   $$P_5^{5,0} + P_5^{4,1} + P_5^{3,2} + P_5^{2,3} + P_5^{1,4} + P_5^{0,5}.$$

3. En el palo de señales de un barco se pueden izar tres banderas rojas, dos azules y cuatro verdes. ¿Cuántas señales distintas pueden indicarse con la colocación de las nueve banderas?

   Tenemos nueve banderas, $m = 9$. Hay tres banderas rojas $a = 3$, dos azules $b = 2$ y cuatro verdes $c = 4$.

- Si entran todos lo elementos, las señales se hacen con las nueve banderas.
- Si importa el orden.
- Si se repiten los elementos.

$$PR_9^{3,2,4} = \frac{P_9}{3! \cdot 2! \cdot 4!} = 1260.$$

4. ¿Cuántas soluciones enteras no negativas tiene la ecuación:

   (a) $x_1 + x_2 = 4$,

   (b) $x_1 + x_2 + x_3 = 10$.

   (a) $x_1 + x_2 = 4$.

   Tomemos 4 unos y un cero.

$$\begin{array}{lll} 11110 & \Longrightarrow & \text{solución } x_1 = 4,\ x_2 = 0, \\ 11101 & \Longrightarrow & \text{solución } x_1 = 3,\ x_2 = 1, \\ 11011 & \Longrightarrow & \text{solución } x_1 = 2,\ x_2 = 2, \\ 10111 & \Longrightarrow & \text{solución } x_1 = 1,\ x_2 = 3, \\ 01111 & \Longrightarrow & \text{solución } x_1 = 0,\ x_2 = 4. \end{array}$$

   el número de soluciones no negativas de $x_1 + x_2 = 4$ es:

$$PR_5^{4,1} = \frac{5!}{4!} = 5.$$

   (b) $x_1 + x_2 + x_3 = 10$.

   Tomamos ahora 10 unos y 2 ceros, y hacemos las permutaciones con repetición de estos elementos.

   La permutación 111011011111, corresponde a la solución $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 5$. El número de soluciones enteras no negativas de $x_1+x_2+x_3 = 10$ es

$$P_{12}^{10,2} = \frac{12!}{10! \cdot 2!}.$$

□

4.2 Combinaciones con repetición

Las **combinaciones con repetición de m elementos tomados de n en n** son los distintos grupos formados por n elementos de forma que:

- No tienen por qué entrar todos los elementos.
- No importa el orden.
- Si se repiten los elementos.

El número de combinaciones con repetición de m elementos tomados de n en n es

$$\boxed{CR_m^n = \binom{m+n-1}{n} = \frac{(m+n-1)!}{n! \cdot (m-1)!}.}$$

Ejemplo 37

1. En una bodega hay cinco tipos diferentes de botellas de vino. ¿De cuántas formas se pueden elegir cuatro botellas?

   En la bodega solo hay cinco tipos diferentes de vinos $m = 5$, y que remos hacer grupos de cuatro botellas $n = 4$.

   - No entran todos los elementos, solo cuatro.
   - No importa el orden. Si en la bodega tenemos entre los cinco vinos, por ejemplo, un Glorioso crianza 2008=Gc y un Pesquera reserva 2005=Pr, las cajas

Gc	Gc
Gc	Pr

     y

Gc	Gc
Pr	Gc

     son diferentes.
   - Si se repiten los elementos.

   $$CR_5^4 = \binom{5+4-1}{4} = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70.$$

2. Se tienen cuatro urnas diferentes. ¿De cuántas maneras se pueden colocar en ellas siete bolas idénticas:

   (a) sin restricción alguna en cuanto al número de bolas en cada urna;

(b) si no puede haber ninguna urna vacía;

(c) si quedan exactamente dos urnas vacías?.

(a) Tenemos 4 urnas y siete bolas iguales. Si tomo la urna primera 7 veces, quiere decir que he puesto las siete bolas en la primera urna, y ninguna en las tres restantes urnas. Si tomo dos veces la primera urna, tres veces la tercera y 2 la cuarta, quiere decir que he puesto dos bolas en la primera urna, ninguna en la segunda urna, tres en la tercera y dos en la segunda. Estamos ante un caso de combinaciones con repetición de cuatro elementos tomados de siete en siete.

$$CR_4^7 = \left(\begin{array}{c} 4+7-1 \\ 7 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 10 \\ 7 \end{array} \right) = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = 120.$$

(b) El número de distribuciones en las cuales una urna por lo menos está vacía es $4 \cdot CR_3^7$. El nḿero de distribuciones donde no queda ninguna urna vacía será

$$CR_4^7 - 4 \cdot CR_3^7.$$

Otra manera de proceder es tomar 7 unos y tres ceros. La distribución 1110011101 significa que la primera urna tiene tres bolas, la segunda ninguna, la tercera tres y la cuarta una bola. El número de posibles distribuciones es

$$P_{10}^{7,3} = \frac{10!}{7! \cdot 3!}.$$

(c) Tendrámos que distribuir las siete bolas en dos urnas de tal manera que ninguna de las dos quede vacía.

Tomemos la primera y segunda urnas. Que la primera o la segunda quede vacía, solamente hay dos posibilidades, o que todas queden en la primera o todas en la segunda. El número de posibilidades de distribuir las siete bolas en las dos primeras urnas de tal manera que ninguna de las dos quede vacía es $CR_2^7 - 2 = \left(\begin{array}{c} 2+7-1 \\ 7 \end{array} \right) - 2 = \left(\begin{array}{c} 8 \\ 7 \end{array} \right) - 2 = 8 - 2 = 6$. De las cuatro urnas, tenemos $C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$ posibilidades de tomar dos de ellas.

Si tienen que quedar dos de ellas vacías, el número de posibilidades es $6 \cdot 6 = 36$.

$\square$

4.3 Ejercicios

Ejercicio 38 *Se ordenan en una fila cinco bolas rojas, dos blancas y tres azules. Si las bolas de igual color no se distinguen entre sí, ¿de cuántas formas posibles pueden ordenarse?.*

Solución: 2520.

Ejercicio 39 *Se distribuyen tres regalos distintos entre cinco chicos. De cuantas forman pueden hacerlo si:*

1. *cada chico solo puede recibir un regalo;*
2. *a cada chico le puede tocar más de un regalo;*
3. *cada chico solo puede recibir un regalo pero los tres son idénticos.*

Solución: 1. 60; 2. 125; 3. 10.

Ejercicio 40 *¿Cuál es el número total de permutaciones que pueden formarse con las letras de la palabra MATEMATICA?*

Solución: 151200.

Ejercicio 41 *En una ciudad A los números telefónicos se forman con cuatro números (*0 *al* 9*) no pudiendo ser cero el primero de ellos, y en otra ciudad B con cinco números con las mismas condiciones. ¿Cuántas comunicaciones pueden mantenerse entre los abonados de ambas ciudades?.*

Solución: 810.000.000.

Ejercicio 42 *Disponiendo de* 7 *colores diferentes, ¿de cuantas maneras puede pintarse un tetraedro regular, no mezclando colores en una cara,*

1. *y si las* 4 *caras tienen que tener color diferente?*
2. *y si las caras pueden tener el mismo color?*

Solución: (a) 35; (b) 189.

4.4 Preguntas test

Pregunta 43 *¿Cuántos números de cinco cifras se pueden escribir con cuatro doses y cuatro cincos?*

$\boxed{A}$ 30 $\boxed{B}$ 36 $\boxed{C}$ 50 $\boxed{D}$ 20

Pregunta 44 *¿Cuál es el número de colocaciones diferentes de siete libros en una estantería de modo que tres libros determinados esten siempre separados entre sí?.*

$\boxed{A}$ 1820 $\boxed{B}$ 1520 $\boxed{C}$ 1634 $\boxed{D}$ 1440

Pregunta 45 *Un estudiante ha estudiado* 120 *horas a lo largo de* 14 *días, (se supone un que cada día lo ha hecho un número entero de horas). Entonces hubo necesariamente un par de dias consecutivos en los que estudió :*

$\boxed{A}$ *exactamente* 23 *horas* $\boxed{B}$ *al menos* 18 *horas*

$\boxed{C}$ *menos de* 10 *horas* $\boxed{D}$ *ninguna hora*

Pregunta 46 *Con los dígitos* 1, 2, 3, 4 *y* 5 *se forman números de tres cifras. ¿Cuántos números diferentes se pueden formar sin repetir cifras que sean múltiplos de tres?*

$\boxed{A}$ 12 $\boxed{B}$ 36 $\boxed{C}$ 6 $\boxed{D}$ 24

Pregunta 47 *¿De cuántas maneras se pueden ordenar la palabra EXAMENES si no pueden haber dos "E" adyacentes?*

$\boxed{A}$ 2100 $\boxed{B}$ 4224 $\boxed{C}$ 2400 $\boxed{D}$ 1440

Pregunta 48 *¿Cuántas soluciones enteras no negativas tiene la ecuación:* $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$*?.*

$\boxed{A}$ 2024 $\boxed{B}$ 1012 $\boxed{C}$ 12650 $\boxed{D}$ 3276