Centro Universitario de la Defensa

Conducción del Calor II. Superficies adicionales: aletas

Tecnología Energética
Profesor: Alejandro López Belchí
Despacho 27 CUD
alejandro.lopez@cud.upct.es

Centro Universitario de la Defensa de San Javier
MDE-UPCT.

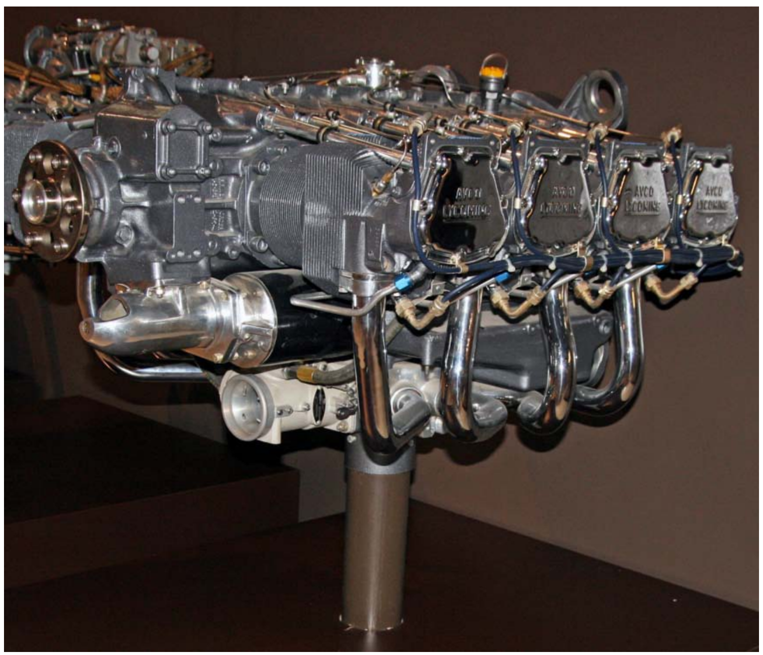
Índice

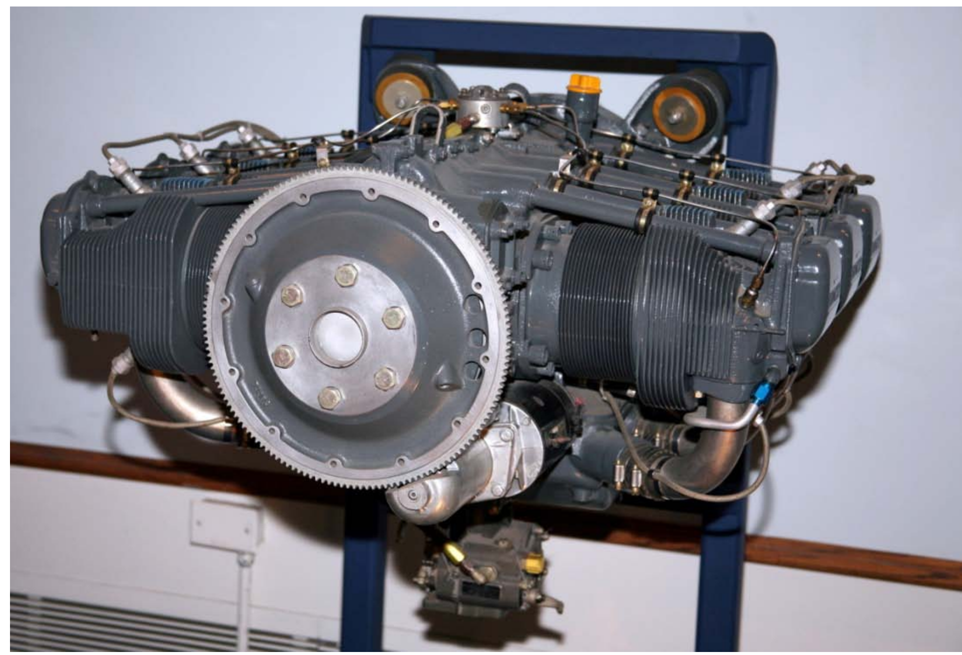
- Superficies adicionales. Clasificación.
- Aletas de sección transversal constante.
- Eficiencia de aletas.
- Efectividad de una aleta.
- Eficiencia total de la superficie aleteada.
- Análisis de superficies aleteadas.

Superficies adicionales. Clasificación.

Para aumentar la disipación con el ambiente se añaden superficies adicionales aumentando así el área de transmisión con la posible disminución de temperatura media superficial.

Ejemplos de ello son las aletas de los MCIA, HEx…





SUPERFICIES ADICIONALES - CLASIFICACIÓN

Superficies adicionales. Clasificación.

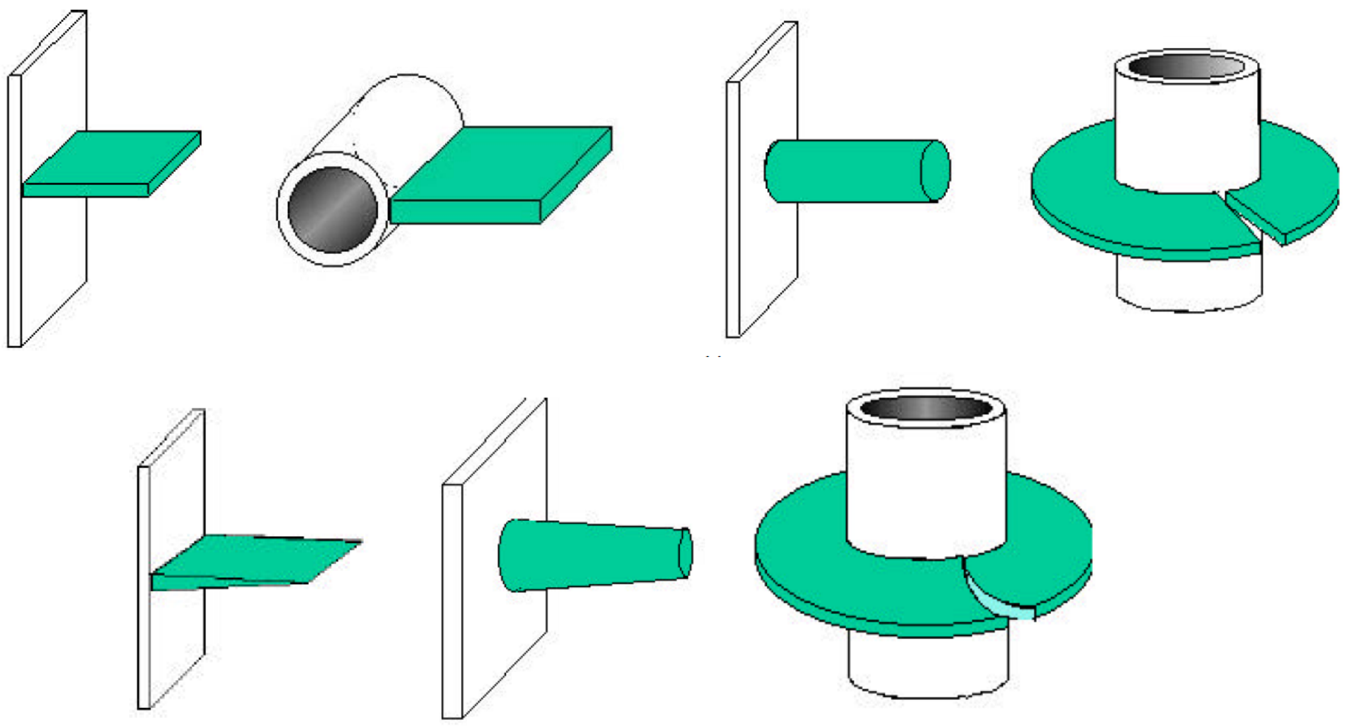
Las aletas se pueden clasificar en:

Rectas

Anulares

De aguja

A su vez pueden ser de sección transversal *constante* o *variable*

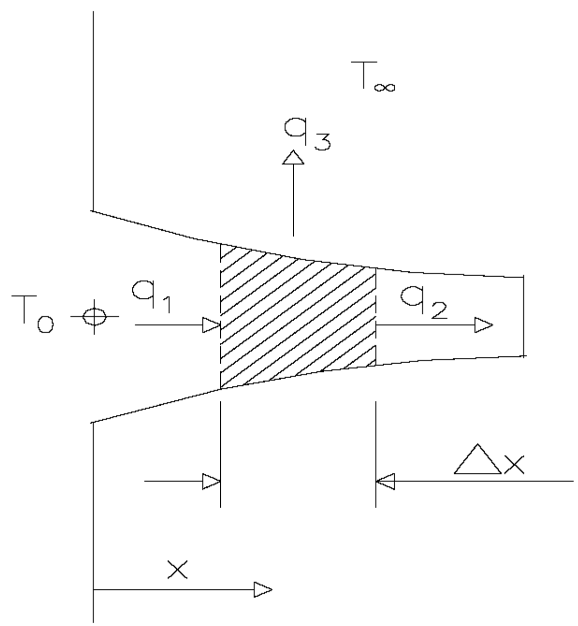


¿Problema?

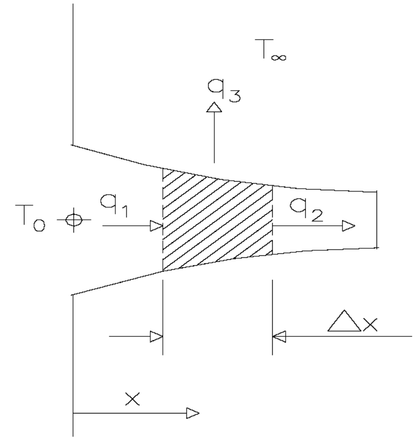
Determinar el **calor disipado** por la aleta y la evolución de la **temperatura en la aleta**

Se desarrolla un modelo matemático.

Considerando una aleta como la que se muestra



Superficies adicionales. Clasificación.



Suposiciones:
Espesor <<< longitud axial
Gradiente transversal despreciable
Es conducción 1D en x

Si $T_0 > T_{inf}$ la Tª disminuye hasta valor mínimo en la punta

Considerando el diferencial Δx

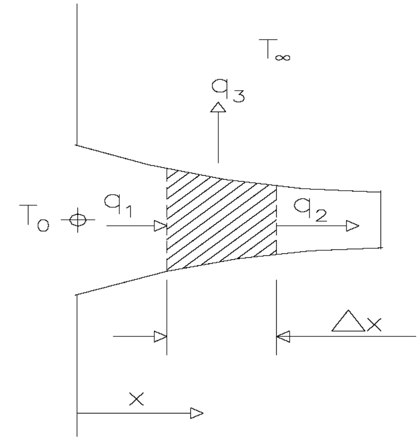
$$q_1 = \left(q'' A\right)_x$$ Calor por conducción que entra

$$q_2 = \left(q'' A\right)_{x+\Delta x}$$ Calor transmitido conducción

$$q_3 = hP\Delta x\left(T - T_\infty\right)$$ Calor eliminado por convección

A = área transversal P = perímetro

Superficies adicionales. Clasificación.



En régimen estacionario $q_1 = q_2 + q_3$

$$\left(q''A\right)_x - \left(q''A\right)_{x+\Delta x} - hP\Delta x\left(T - T_\infty\right) = 0$$

Dividiendo por Δx y con la definición de derivada

$$-\frac{d}{dx}\left(q''A\right) - hP\left(T - T_\infty\right) = 0 \qquad f'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{x}$$

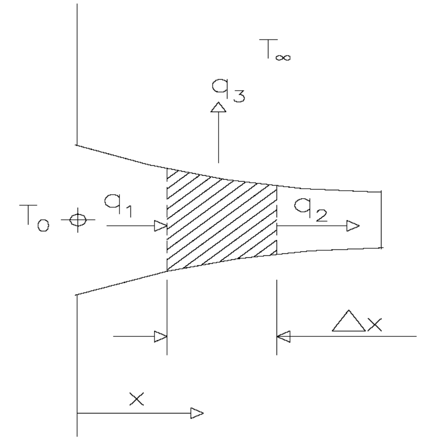
Derivando

$$q''\frac{dA}{dx} + A\frac{dq''}{dx} + hP\left(T - T_\infty\right) = 0$$

Aplicamos Fourier para la conducción $q'' = -k\frac{dT}{dx}$

Superficies adicionales. Clasificación.

$$-kA\frac{d^2T}{dx^2}-k\frac{dT}{dx}\frac{dA}{dx}+hP\left(T-T_\infty\right)=0$$



Dividiendo entre –kA

$$\boxed{\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{1}{A}\frac{dA}{dx}\frac{dT}{dx}-\frac{hP}{kA}\left(T-T_\infty\right)=0}$$

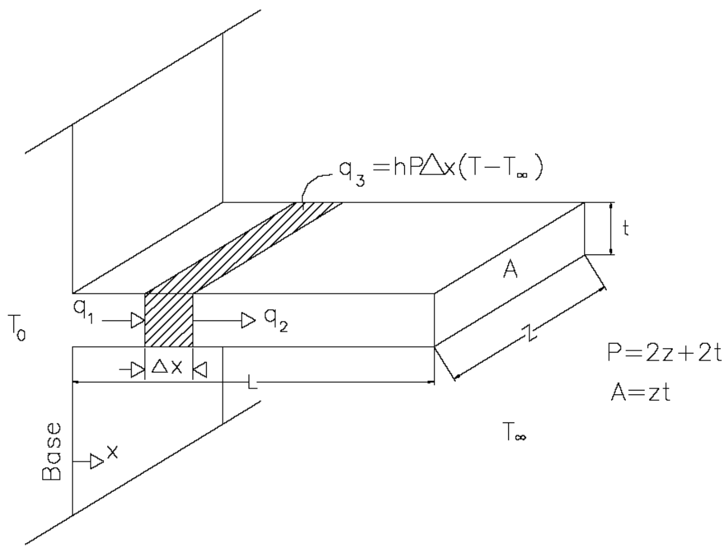
Expresión general para obtener la distribución de Tª en una superficie adicional sin generación interna de calor.
Hay que conocer las condiciones de frontera para resolver el problema.

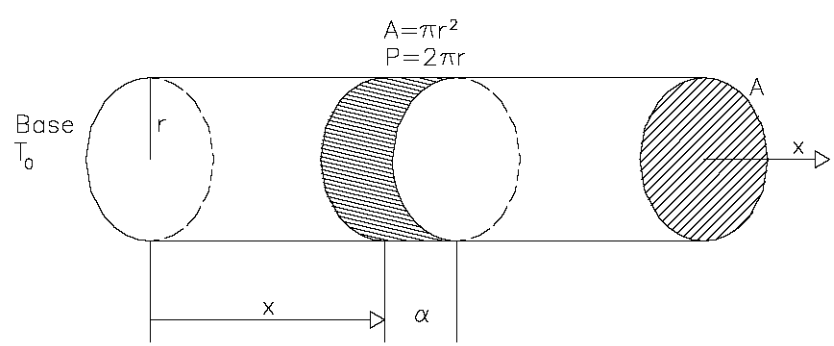
ALETAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE

Aletas de sección transversal constante

La **aleta recta** de **espesor uniforme** y **aguja circular** se pueden tratar igual al **no tener cambio de sección**.

Aleta rodeada de fluido a "T_{inf}", con coef. convectivo "h" y T base T_0.





Aletas de sección transversal constante

Como el área es contante

$$\boxed{\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{1}{A}\cancel{\frac{dA}{dx}}\frac{dT}{dx}-\frac{hP}{kA}\left(T-T_\infty\right)=0}$$

Queda

$$\frac{d^2T}{dx^2}-\frac{h\,P}{k\,A}\left(T-T_\infty\right)=0$$

Teniendo en cuenta $\theta = \mathrm{T} - \mathrm{T}_\infty$ $\qquad m^2=\frac{hP}{kA}$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}-m^2\theta=0$$

Ec. Diferencial lineal homogénea de 2º orden con coef. ctes.

Aletas de sección transversal constante

La solución se puede escribir

$$\theta(x) = B_1\ e^{mx} + B_2\ e^{-mx}$$

O en forma de funciones hiperbólicas

$$\theta(x) = C_1\ cosh\left[m\left(L - x\right)\right] + C_2\ senh\left[m\left(L - x\right)\right]$$

Donde B_1, B_2, C_1 y C_2 deben determinarse a partir de las condiciones del problema.

En general, la Tª de la base es conocida:

$$x = 0 \rightarrow \theta\ (0) = T_0 - T_{inf} = \theta_0$$

La segunda condición de contorno necesaria para determinar las constantes depende de la situación física de la aleta.

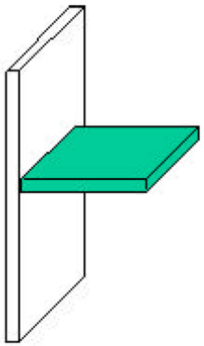
ALETAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE.
EXTREMO AISLADO

Aletas de sección transversal constante. Extremo aislado.

El área de transmisión del calor del **extremo** de la aleta es en la mayoría de los casos **pequeña** en **comparación** con el **área lateral** y, por consiguiente, el calor perdido por **convección por el extremo** de la aleta puede considerarse **despreciable**. En tal caso, la segunda condición de contorno es:

$$x = L \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{dx} = 0$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta(0) = T_0 - T_\infty = \theta_0$$



Aplicándolas a

$$\theta(x) = C_1 \cosh\left[m\left(L - x\right)\right] + C_2 \,\mathrm{senh}\left[m\left(L - x\right)\right]$$

Obtenemos las constantes C_1 y C_2.

Aletas de sección transversal constante. Extremo aislado.

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \theta_0 = T_0 - T\infty \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = C_1 \cosh(m\,L) + C_2 \,\text{senh}(m\,L)$$

$$x = L \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad -m\,C_1\,\text{senh}\left[m\,(L-L)\right] - m\,C_2 \cosh\left[m\,(L-L)\right] = 0$$

Resultando:

$$C_2 = 0 \qquad ; \qquad C_1 = \frac{\theta_0}{\cosh(m\,L)}$$

Sustituyendo en

$$\theta(x) = C_1 \cosh\left[m\,(L-x)\right] + C_2\,\text{senh}\left[m\,(L-x)\right]$$

Se obtiene la solución particular de extremo aislado.

$$\boxed{\frac{\theta(x)}{\theta_0} = \frac{T(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{\cosh\left[m(L-x)\right]}{\cosh(mL)}}$$

Aletas de sección transversal constante. Extremo aislado.

En régimen estacionario el término convectivo sobre la superficie de la aleta se puede calcular como

$$q = \int_0^L h\ P\ \theta(x)\ dx$$

O bien, evaluando el flujo de calor que entra por conducción a la aleta por su base, a partir de la ley de Fourier

$$q = -k\ A \left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=0}$$

Empleando la última, resulta:

$$\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=0} = -m\ \theta_0 \frac{senh\,(m\ L)}{cosh\,(m\ L)} = -m\ \theta_0\ tanh\,(m\ L)$$

$$\boxed{q = k\ A\ \theta_0\ m\ tanh\,(m\ L) = \sqrt{P\ h\ A\ k}\ \theta_0\ tanh\,(m\ L)}$$

ALETAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE. EXTREMO NO AISLADO

Aletas de sección transversal constante. Extremo no aislado.

El extremo no aislado transmite calor por convección con el fluido que lo rodea.

C_1 y C_2 se calculan con las siguientes condiciones de contorno.

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \theta_0 = T_0 - T_\infty$$

$$x = L \quad \Rightarrow \quad -k\,A\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=L} = h_e\,A\,\theta(L)$$

Obteniendo:

$$\frac{\theta(x)}{\theta_0} = \frac{T(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{\cosh\left[m(L-x)\right] + H\,\mathrm{senh}\left[m(L-x)\right]}{\cosh(mL) + H\,\mathrm{senh}(mL)}$$

$$q = \theta_0\sqrt{h\,P\,k\,A}\left[\frac{\mathrm{senh}(mL) + H\cosh(mL)}{\cosh(mL) + H\,\mathrm{senh}(mL)}\right]$$

Siendo $H = h_e/m\,K$

Aletas de sección transversal constante. Extremo no aislado.

El caso particular de extremo aislado se obtiene con $h_e = 0$.
Siendo $H = h_e/m K$

$$\frac{\theta(x)}{\theta_0} = \frac{T(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{\cosh\left[m(L-x)\right] + H \operatorname{senh}\left[m(L-x)\right]}{\cosh(mL) + H \operatorname{senh}(mL)}$$

$$q = \theta_0 \sqrt{h\,P\,k\,A}\left[\frac{\operatorname{senh}(mL) + H \cosh(mL)}{\cosh(mL) + H \operatorname{senh}(mL)}\right]$$

Aletas de sección transversal constante. Extremo no aislado.

El caso particular de extremo aislado se obtiene con $h_e = 0$.

Harper y Brown demostraron que se puede utilizar la expresión de extremo aislado en casos de extremo no aislado considerando una **longitud corregida**, L_c.

$$\boxed{L_c = L + \frac{A}{P}}$$

Con un error de aproximado del 8%.
En el caso de aletas rectas y de aguja:

Aleta recta	$\Rightarrow$	$A = Z\ t$;	$P = 2\,Z + 2\,t \approx 2\,Z$	$\Rightarrow$	$L_c = L + t/2$
Aguja	$\Rightarrow$	$A = \pi\ d^2/4$;	$P = \pi\ d$	$\Rightarrow$	$L_c = L + d/4$

ALETAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE INFINITAMENTE LARGA

Aletas de sección transversal constante infinitamente larga.

En este caso la temperatura del extremo tenderá a la del fluido. Las condiciones de contorno son:

$$x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \theta(0) = \theta_0 = T_0 - T_\infty$$

$$x = L \to \infty \quad \Rightarrow \qquad \theta(L) = \theta_L = 0$$

Aplicándolas a

$$\theta(x) = C_1 \cosh\left[m\left(L - x\right)\right] + C_2 \operatorname{senh}\left[m\left(L - x\right)\right]$$

En función de exponenciales

$$\theta(x) = B_1\, e^{mx} + B_2\, e^{-mx}$$

Las dist. de Tª y calor transmitido por unidad de tiempo son

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{\theta(x)}{\theta_0} = \frac{T(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-mx} \\ q = \theta_0 \sqrt{h\, P\, k\, A} \end{gathered}}$$

EFICIENCIA DE ALETAS

Eficiencia de aletas

En aplicaciones reales la geometría de las aletas es mas compleja que lo visto hasta el momento.
Sus expresiones matemáticas son engorrosas y poco prácticas.

Solución: Concepto de ***eficiencia de aleta***.

La resistencia térmica a la convección (1/hA) con un área *A* a un fluido a T_f.

Añadir una aleta ↑ A pero introduce una resistencia a la conducción por el material extra. Hay que considerar el gradiente de Tª a lo largo de la aleta ya que *h* cambia.

Eficiencia de aletas

Esta evaluación se hace con la eficiencia de la aleta.

$$\eta_f = \frac{q}{q_{To}}$$

Cociente entre el calor real disipado (*q*) y el que disiparía si toda la aleta estuviera a la misma Tª de la base (q_{To}).

$$q_{To} = A_a h \left(T_0 - T_f \right)$$

Con A_a como área convectiva y *h* como coef. trans. calor.

Eficiencia de aletas

Conocido η_f, el calor real transmitido resulta:

$$q = \eta_f \, q_{To} = \eta_f \, A_a \, h \left(T_0 - T_f\right)$$

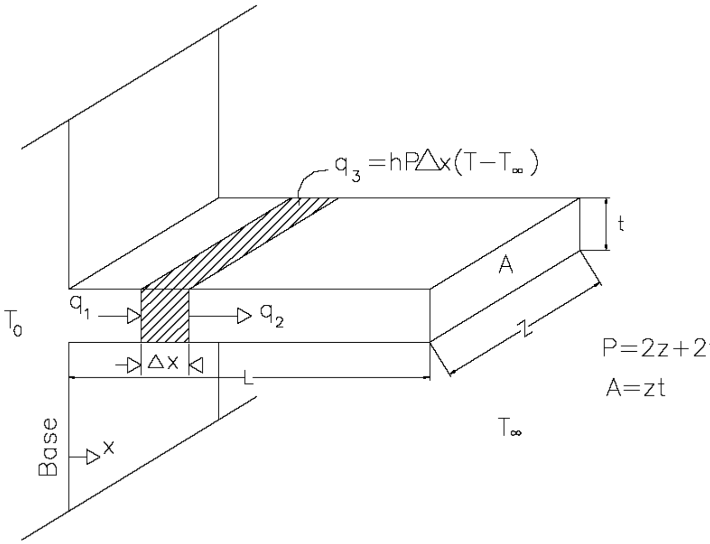
A modo práctico calculemos η_f en una aleta de sección transversal constante y extremo aislado.

EJEMPLO DE CÁLCULO DE LA EFICIENCIA DE UNA ALETA DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE Y EXTREMO AISLADO

Eficiencia de aletas

Cálculo η_f en una aleta de sección transversal constante y extremo aislado.

$$\eta_f = \frac{q}{q_{T_o}}$$



$$P = 2Z + 2t \approx 2Z$$

$$A = Zt$$

$$q = \sqrt{PhkA}\left(T_o - T_f\right)\tanh(mL)$$

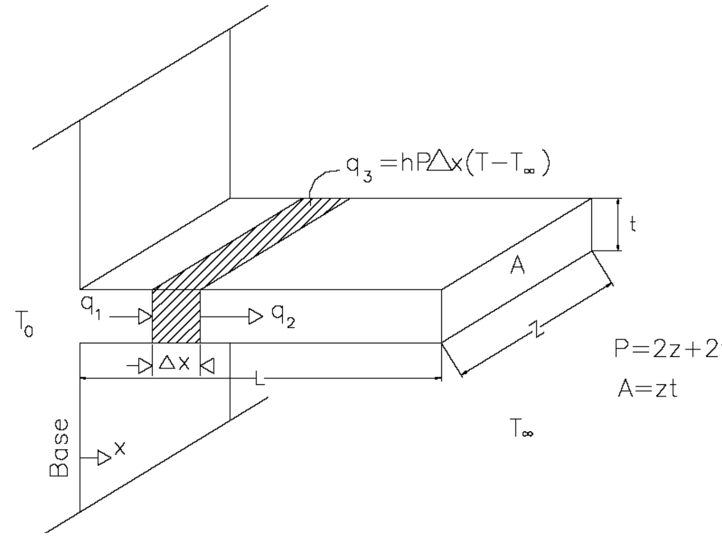
$$m^2 = \frac{hP}{kA}$$

$$q_{T_o} = A_a h\left(T_o - T_f\right) = PLh\left(T_o - T_f\right)$$

Eficiencia de aletas

$$\eta_f = \frac{\sqrt{PhkA}(T_o - T_f)\tanh(mL)}{PLh(T_o - T_f)} = \frac{P^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}}{PLh}\tanh(mL)$$

$$\eta_f = \frac{k^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}}{P^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}}L}\tanh(mL)$$



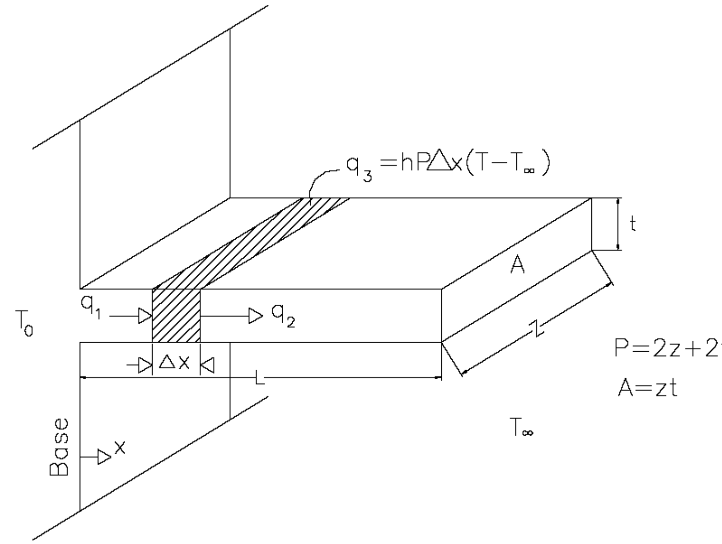
$$\eta_f = \sqrt{\frac{Ak}{Ph}}\frac{1}{\mathrm{L}}\tanh(mL)$$

$$mL = L\sqrt{\frac{Ph}{kA}}$$

Eficiencia de aletas

$$\eta_f = \frac{\sqrt{PhkA}\,(T_o - T_f)\tanh(mL)}{PLh(T_o - T_f)} = \frac{P^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}}{PLh}\tanh(mL)$$

$$\eta_f = \frac{k^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}}{P^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}}L}\tanh(mL)$$



$$\eta_f = \sqrt{\frac{Ak}{Ph}\frac{1}{\mathrm{L}}}\tanh(mL)$$

$$\boxed{\eta_f = \frac{\tanh(mL)}{\mathrm{mL}}}$$

FIN DEL EJEMPLO

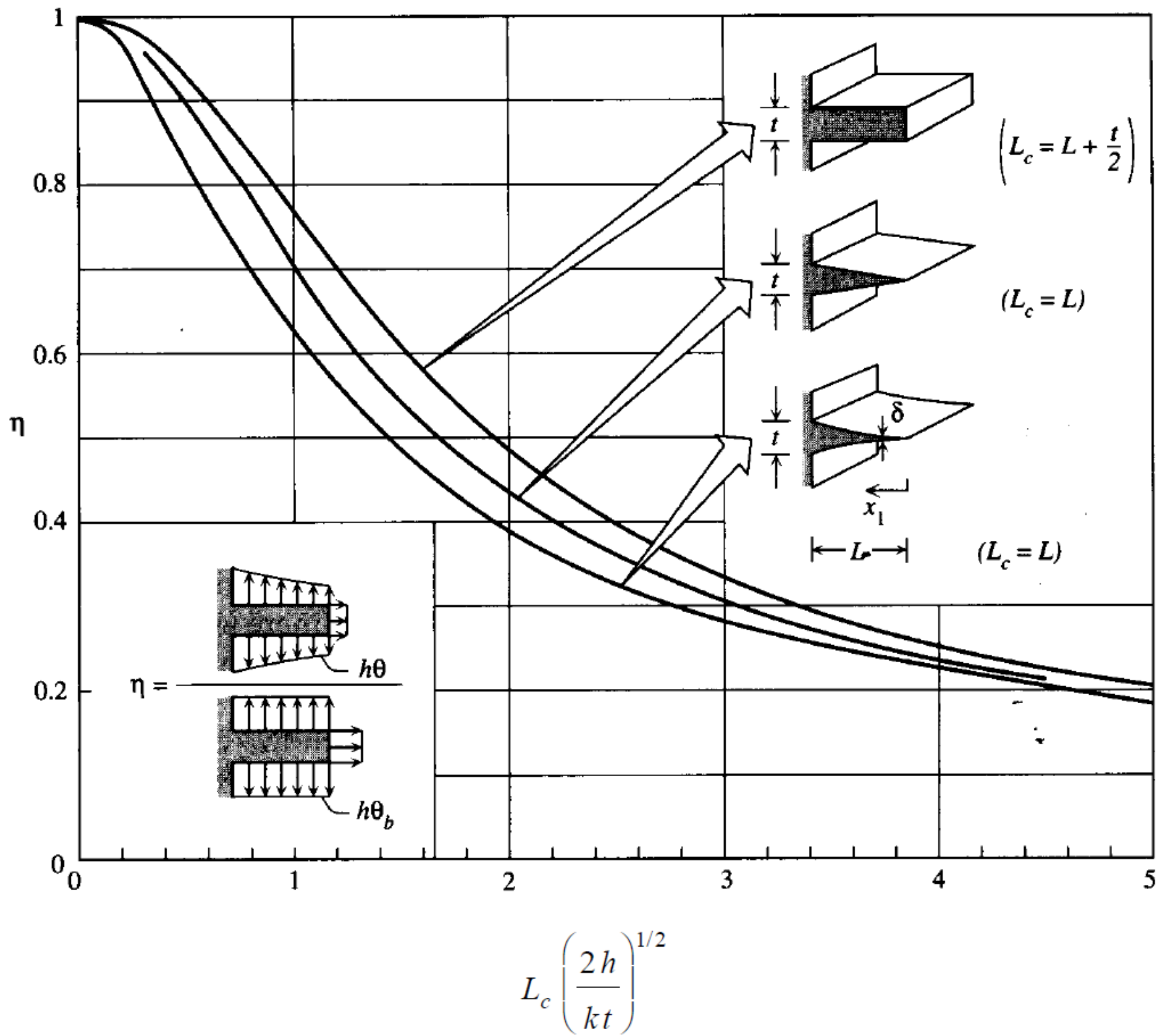
De forma similar se pueden obtener el resto de casos aunque son más complejos.
Para ellos se usan gráficas de la eficiencia frente al parámetro *mL*

$$mL = L\sqrt{\frac{2h}{kt}}$$

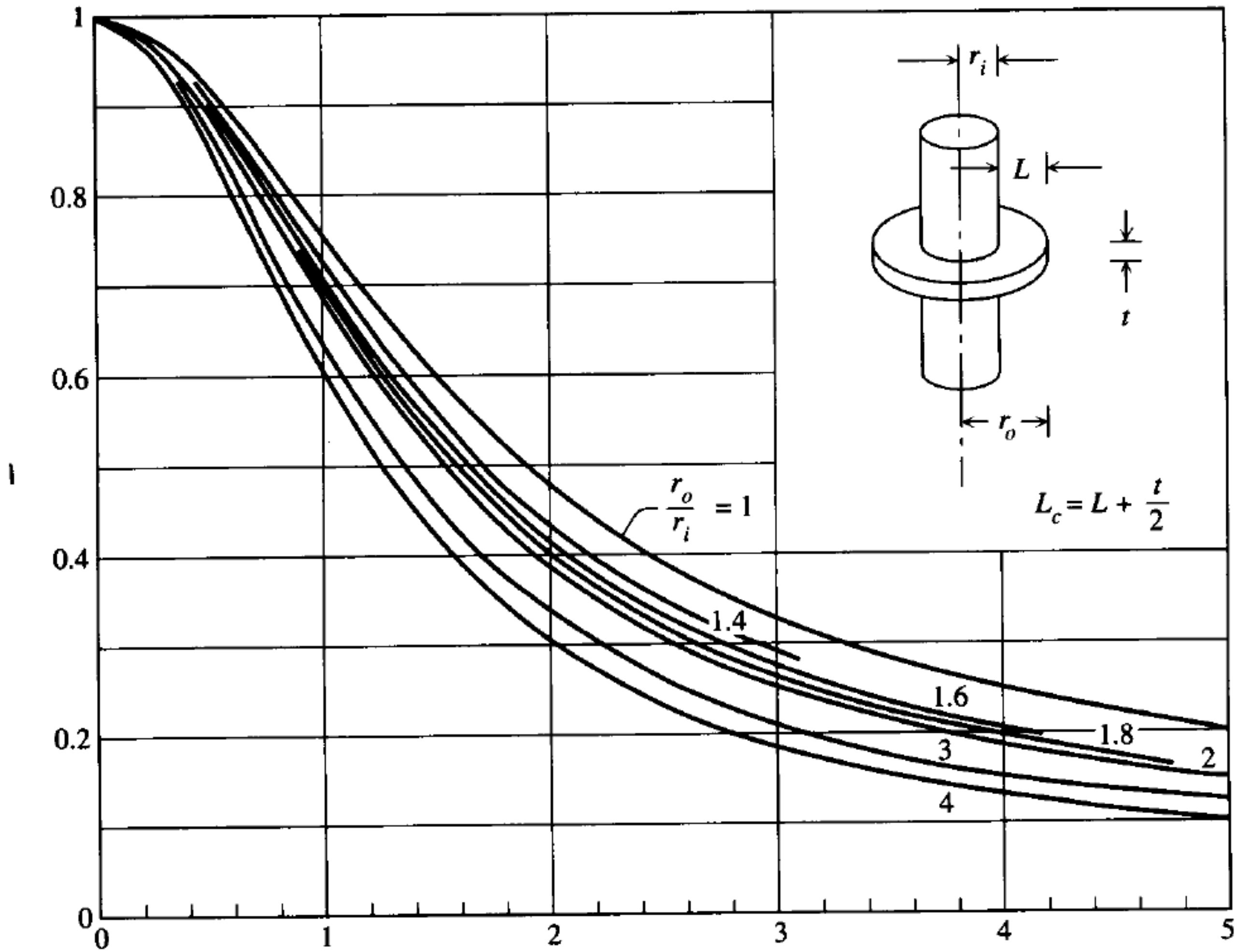
Hay que prestar atención a **usar la longitud corregida L_c si la aleta disipa calor por convección en el extremo, si es extremo aislado $L_c \equiv L$.**

Se obtienen unas gráficas como las siguientes.

Eficiencia de aletas – Aleta recta



Eficiencia de aletas – Aleta anular



$$L_c \left(\frac{2h}{kt} \right)^{1/2}$$

Eficiencia de aletas

La longitud de aleta *L* es muy importante pero su elección puede ser contraproducente.

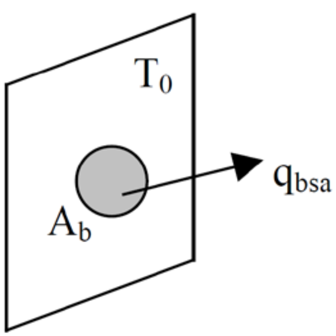
A mayor L, mayor área convectiva y mayor intercambio de energía.
A mayor L, mayor caída de Tª lo que reduce mucho su eficiencia. Aumenta el material, peso, precio y fricción del fluido.
Salvo en condiciones específicas, deben evitarse longitudes que lleven a eficiencias inferiores al 60 %.

EFECTIVIDAD DE LA ALETA

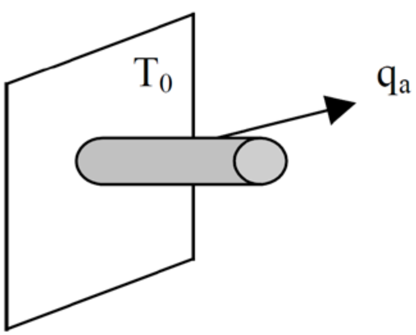
Efectividad de la aleta.

Como no se tiene la seguridad de que la adición de aletas a una superficie primaria mejore la transmisión del calor, hay que analizar el comportamiento de la aleta en términos de la efectividad de la aleta, ε_a, definida como el cociente entre el calor transmitido por la aleta con el transmitido desde la zona de la superficie primaria ocupada por las aletas de área, A_b.

$$\varepsilon_a = \frac{q_a}{q_{bsa}}$$



$$q_{bsa} = h\,A_b\left(T_0 - T_f\right)$$



Efectividad de la aleta.

De ε_a, se deduce:

- $\varepsilon_a = 1$, la adición de aletas a la superficie primaria no afecta a la transmisión del calor. El calor transmitido por conducción hacia la aleta a través de A_b es igual al calor transmitido por convección desde la misma área A_b al fluido circundante.
- $\varepsilon_a < 1$, la aleta en realidad actúa como aislamiento. Esta situación puede ocurrir cuando se emplean aletas de baja conductividad térmica.
- $\varepsilon_a > 1$, la aleta proporciona una mayor transferencia de energía calorífica de la que se obtendría sin ella.

Efectividad de la aleta.

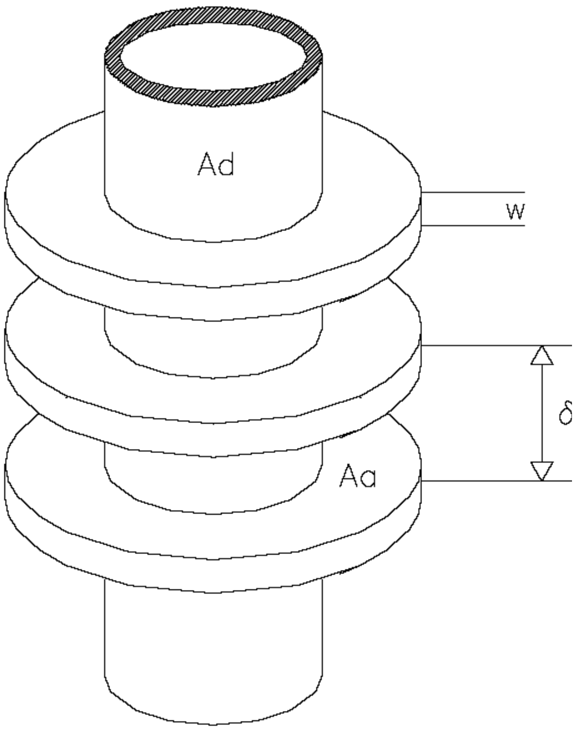
La efectividad y la eficiencia están relacionadas

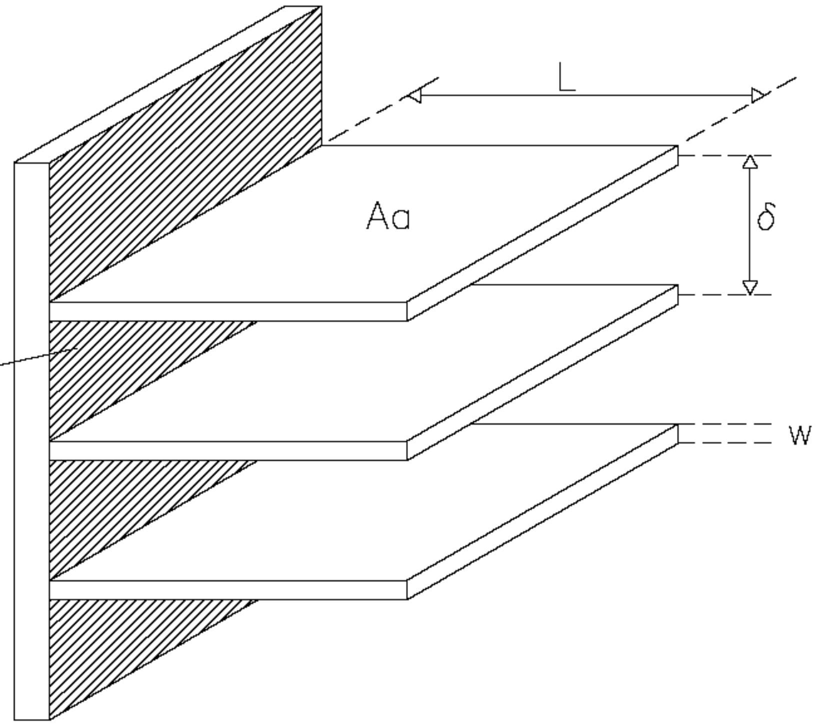
$$\varepsilon_a = \frac{q_a}{q_{bsa}} = \frac{h\,\eta_f\; A_a\left(T_0 - T_f\right)}{h\; A_b\left(T_0 - T_f\right)} = \frac{A_a}{A_b}\,\eta_f$$

EFICIENCIA TOTAL DE UNA SUPERFICIE ALETEADA

Eficiencia total de una superficie aleteada.

Si utilizamos **múltiples aletas** en un sistema, el calor total es el transmitido por todas ellas y por el **área primaria** no ocupada por las aletas.





Área total = $A_a + A_d$

Eficiencia total de una superficie aleteada.

De forma similar a 1 aleta se define la eficiencia de una superficie aleteada.

Se define la eficiencia total para una superficie con aletas como la razón de la transferencia de calor total del área combinada de la superficie-aletas, al calor que seria transferido si ésta superficie total se mantuviera a la temperatura de la base.

$$\eta_t = \frac{q_t}{q_{t\,(To)}}$$

El calor total transferido

$$q_t = \eta_t \, q_{t\,(To)} = \eta_t \, A_t \left(T_0 - T_f \right) h$$

Con A_t el área total expuesta

Eficiencia total de una superficie aleteada.

Operando se obtiene

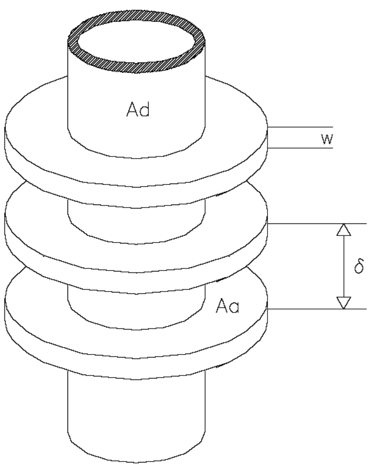
$$\boxed{\eta_t = 1 - \frac{A_a}{A_t}\left(1 - \eta_f\right)}$$

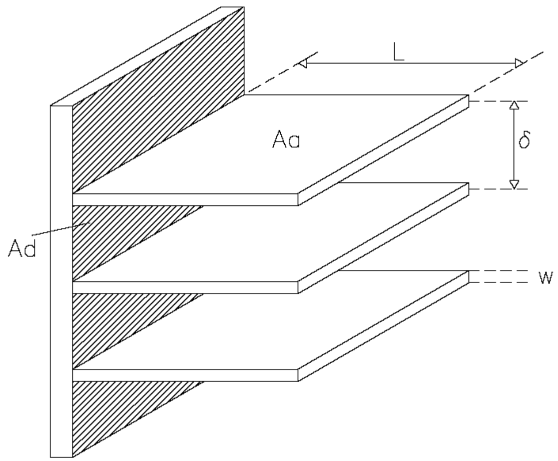
$$A_t = A_d + A_a$$

ANÁLISIS DE SUPERFICIES ALETEADAS

Análisis de superficies aleteadas.

Las superficies interior y exterior de la tubería y de la izquierda y derecha de la pared plana se encuentran en contacto con sendos fluidos a temperaturas t_f y t'_f y con coeficientes convectivos h y h’, el **cálculo del calor** transferido en los sistemas puede realizarse en función de **la eficiencia de las aletas** o en función de la **eficiencia total de superficie**.





Análisis de superficies aleteadas – A. eficiencia de las aletas.

En términos de (η_f) la eficiencia de la aleta, el calor disipado es la suma de la superficie primaria y la de las aletas.

$$q = q_d + q_a$$

$$q_d = A_d \, h' \left(T_0 - T_f'\right)$$

$$q_a = \eta_f \, h' \, A_a \left(T_0 - T_f'\right)$$

$$q = A_d h'\left(T_0 - T_f'\right) + \eta_f h' A_a \left(T_0 - T_f'\right)$$

$$\boxed{q = \left(A_d + \eta_f \, A_a\right) h' \left(T_0 - T_f'\right)}$$

A_d el área total primaria libre de aletas.
A_a el área total de todas las aletas ($n \cdot A_o$).
A_o el área convectiva de una aleta.

En el caso de **tubería aleteada exteriormente**, con fluido circulante en el interior a T_f y coeficiente de película h; el calor transmitido por el sistema puede expresarse por:

$$q = h\,A_i\left(T_f - T\right) = \frac{T - T_0}{\dfrac{\ln r_e / r_i}{2\,\pi\,L\,k}} = \left(A_d + \eta_f\,A_a\right)\,h'\,\left(T_0 - T_f'\right)$$

O en función de las Tª extremas

$$q = \frac{T_f - T_f'}{\dfrac{1}{A_i\,h} + \dfrac{\ln \left. r_e \middle/ r_i \right.}{2\pi L k} + \dfrac{1}{\left(A_d + \eta_f A_a\right)h'}}$$

En el caso de **pared plana aleteada en un lado**

$$q = h\,A_p\left(T_f - T\right) = \frac{T - T_0}{\dfrac{\Delta x}{k\,A_p}} = \left(A_d + \eta_f\,A_a\right)\,h'\,\left(T_0 - T_f'\right)$$

A_p es el área primaria.

En el caso de **pared plana aleteada en un lado**

$$q = h\,A_p\left(T_f - T\right) = \frac{T - T_0}{\dfrac{\Delta x}{k\,A_p}} = \left(A_d + \eta_f\,A_a\right)\,h'\,\left(T_0 - T_f'\right)$$

$$\boxed{q = \frac{T_f - T_f'}{\dfrac{1}{A_p h} + \dfrac{\Delta x}{A_p k} + \dfrac{1}{\left(A_d + \eta_f A_a\right)h'}}}$$

A_p es el área primaria.

En este caso el calor transferido por la superficie aleteada viene dado en función de la eficiencia total

$$q_t = \eta_t \, q_{t\,(To)} = \eta_t \, A_t \left(T_0 - T_f \right) h$$

Expresiones análogas a las anteriores se pueden escribir referidas a la eficiencia (η_t).

En este caso el calor transferido por la superficie aleteada viene dado en función de la eficiencia total

$$q_t = \eta_t \, q_{t\,(To)} = \eta_t \, A_t \left(T_0 - T_f \right) h$$

Expresiones análogas a las anteriores se pueden escribir referidas a la eficiencia (η_t).

Para un **tubo aleteado exteriormente**.

$$q = h \, A_i \left(T_f - T \right) = \frac{T - T_0}{\dfrac{\ln r_e / r_i}{2 \pi L k}} = \eta_t \; h' \, A_t \; \left(T_0 - T_f' \right)$$

$$\boxed{q = \frac{T_f - T_f'}{\dfrac{1}{A_i h} + \dfrac{\ln \, {}^{r_e}\!/_{r_i}}{2 \pi L k} + \dfrac{1}{A_t \eta_t h'}}}$$

Para una **pared aleteada por un lado**.

$$q = h\, A_p \left(T_f - T\right) = \frac{T - T_0}{\dfrac{\Delta x}{k\, A_p}} = \eta_t\, h'\, A_t \left(T_0 - T_f'\right)$$

$$\boxed{q = \frac{T_f - T_f'}{\dfrac{1}{A_p h} + \dfrac{\Delta x}{A_p k} + \dfrac{1}{A_t \eta_t h'}}}$$

Aletas de sección transversal constante

Extremo aislado (ecuaciones obtenidas)
Extremo no aislado (ecuaciones obtenidas)
Por simplicidad se pueden calcular como extremo aislado con la Longitud Corregida

Aletas de sección transversal variable

Extremo aislado (gráficas)
Extremo no aislado (gráficas trabajando con las ***Longitud Corregida***)