Averiguar si la fórmula $Q(a,b) \vee Q(c,c)$ es o no consecuencia lógica de cada uno de los siguientes conjuntos:

1) $\{ \exists x\, P(x)\ ,\ \forall y\ (P(y) \rightarrow Q(a,y))\ \}$

2) $\{ \exists x\, P(x)\ ,\ \forall y\ (P(y) \rightarrow Q(c,c))\ \}$

eval enero 2016

1) Llamamos $A_1 \equiv \exists x\, P(x)$

$A_2 \equiv \forall y\ (P(y) \rightarrow Q(a,y))$

$B \equiv Q(a,b) \vee Q(c,c)$

- Buscamos un contramodelo, es decir i tal que $i(A_1) = i(A_2) = V$ y $i(B) = F$
- Tomamos como dominio $D = \{1,2,3\}$, por ejemplo
- $\boxed{i(a) = 1}$ $\boxed{i(b) = 2}$ $\boxed{i(c) = 3}$ por ejemplo
- $i(B) = i(\ Q(a,b) \vee Q(c,c)\ ) = F$ $\quad i(Q(a,b)) = i(Q(c,c)) = F$ $\quad \boxed{Q_D(1,2) = Q_D(3,3) = F}$
- $i(A_2) = i(\ \forall y\ (P(y) \rightarrow Q(a,y))\ ) = V$ sii

$i(\ P(a) \rightarrow Q(a,a)\ ) = V$ sii $i(P(a)) = F$ ó $i(Q(a,a)) = V$ (1)

y $i(\ P(b) \rightarrow Q(a,b)\ ) = V$ sii $\boxed{i(P(b)) = F}$ ó $\cancel{i(Q(a,b)) = V}$

y $i(\ P(c) \rightarrow Q(a,c)\ ) = V$ sii $i(P(c)) = F$ ó $i(Q(a,c)) = V$ (2)

- $i(A_1) = i(\ \exists x\, P(x)\ ) = V$ sii $i(P(a)) = V$ ó $\cancel{i(P(b)) = V}$ ó $i(P(c)) = V$ (3)
- para hacer compatibles (1), (2) y (3) elegimos $\boxed{i(P(a)) = V}$ y $\boxed{i(Q(a,a)) = V}$
- los demás valores de $i(Q(x,y))$ pueden ser V o F $\Rightarrow$ hay unos cuantos contramodelos con ese dominio y las interpretaciones de a, b y c antes fijadas

$\Rightarrow$ se ha encontrado un contramodelo $\Rightarrow$ **NO es consecuencia lógica**

2) Sean $A_1 \equiv \exists x\, P(x)$

$A_2 \equiv \forall y\, (P(y) \rightarrow Q(c,c))$

$B \equiv Q(a,b) \vee Q(c,c)$

- En este caso SÍ es consecuencia lógica:
- Una demostración con deducción natural es la siguiente:

1.-	$\exists x\, P(x)$	premisa
2.-	$\forall y\, (P(y) \rightarrow Q(c,c))$	premisa
3.-	$P(d)$	elim 1, d constante temporal nueva
4.-	$P(d) \rightarrow Q(c,c)$	elim 3
5.-	$Q(c,c)$	modus ponens 3, 4
6.-	$Q(a,b) \vee Q(c,c)$	int $\vee$ 5

- por tanto $\{ A_1 , A_2 \} \vdash B$

- y por el teorema de completud $\{ A_1 , A_2 \} \models B$

- demostración semántica:

buscamos un contramodelo, i.e., i tal que $i(A_1) = i(A_2) = V$ y $i(B) = F$

$i(B) = F$ $\quad i(Q(a,b) \vee Q(c,c)) = F$ $\quad \boxed{Q_I(a,b) = Q_I(c,c) = F}$

$i(A_2) = V$ $\quad i(\forall y\, (P(y) \rightarrow Q(c,c))) = V$

$y = a$ $\quad i(P(a) \rightarrow Q(c,c)) = V$

$y = b$ $\quad i(P(b) \rightarrow Q(c,c)) = V$

$y = c$ $\quad i(P(c) \rightarrow Q(c,c)) = V$

como $Q_I(c,c)) = F$ $\quad \boxed{P_I(a) = P_I(b) = P_I(c) = F}$ $\qquad$ (1)

$i(A_3) = V$ $\quad i(\exists x\, P(x)) = V$ $\quad$ que no es compatible con (1)

$\Rightarrow$ No hay contramodelo $\quad \Rightarrow$ **SÍ es consecuencia lógica**.