Definir un contramodelo para demostrar que la siguiente relación de consecuencia lógica NO se verifica:

$$\{\ \forall x\,(Q(x) \rightarrow R(x)),\ \forall x\,(P(x) \rightarrow R(x)),\ P(a),\ Q(b)\ \} \vDash \exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$$

Examen julio 2017

$$\{\ \underbrace{\forall x\,(Q(x) \rightarrow R(x))}_{A_1},\ \underbrace{\forall x\,(P(x) \rightarrow R(x))}_{A_2},\ \underbrace{P(a)}_{A_3},\ \underbrace{Q(b)}_{A_4}\ \} \vDash \underbrace{\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))}_{B}$$

Buscamos una interpretación i tal que

$\forall x\,(Q(x) \rightarrow R(x))$
$\forall x\,(P(x) \rightarrow R(x)$ sean V y $\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$ sea F
$P(a)$
$Q(b)$

Tomamos como dominio D = {a,b}

1ª solución:

- $i(A_3) = V \longrightarrow \boxed{i(P(a)) = V}$
- $i(A_4) = V \longrightarrow \boxed{i(Q(b)) = V}$
- $i(A_2) \equiv i(\forall x\,(P(x) \rightarrow R(x))) = V$

$$\left.\begin{array}{ll} x = a & i(P(a) \rightarrow R(a)) = V \\ & i(P(a)) = V \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{i(R(a)) = V}$$

y $x = b \quad i(P(b) \rightarrow R(b)) = V \longrightarrow i(P(b)) = F$ ó $i(R(b)) = V$ (1)

- $i(A_1) \equiv i(\forall x\,(Q(x) \rightarrow R(x))) = V$

$x = a \quad i(Q(a) \rightarrow R(a)) = V$ se cumple pues $i(R(a)) = V$

y $$\left.\begin{array}{ll} x = b & i(Q(b) \rightarrow R(b)) = V \\ & i(Q(b)) = V \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{i(R(b)) = V}$$

por tanto, al ser i(R(b))=V, también se cumple (1), y A_2 es V

- $i(B) \equiv i(\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))) = F$

$$\left.\begin{array}{ll} x = a & i(P(a) \wedge Q(a)) = F \\ & i(P(a)) = V \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{i(Q(a)) = F}$$

y $$\left.\begin{array}{ll} x = b & i(P(b) \wedge Q(b)) = F \\ & i(Q(b)) = V \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{i(P(b)) = F}$$

Hemos encontrado un contramodelo: $P_D = \{a\} \quad Q_D = \{b\} \quad R_D = \{a,b\}$
que además es el único contramodelo

Por supuesto que hay otras formas de hacer este análisis. Si empezamos por hacer falsa la conclusión B:

<u>2ª solución</u>:

- $i(A_3) = V \longrightarrow \boxed{i(P(a)) = V}$
- $i(A_4) = V \longrightarrow \boxed{i(Q(b)) = V}$
- $i(B) \equiv i(\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))) = F$

$x = a \quad i(P(a) \wedge Q(a)) = F \qquad \left.\begin{array}{l} i(P(a)) = F \text{ ó } i(Q(a)) = F \\ \text{como } \; i(P(a)) = V \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{i(Q(a)) = F}$

y $\quad x = b \quad i(P(b) \wedge Q(b)) = F \qquad \left.\begin{array}{l} i(P(b)) = F \text{ ó } i(Q(b)) = F \\ \text{como } \; i(Q(b))) = V \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{i(P(b)) = F}$

- $i(A_1) \equiv i(\forall x\,(Q(x) \rightarrow R(x))) = V$

$x = a \qquad i(Q(a) \rightarrow R(a)) = V \qquad$ se cumple pues $i(Q(a)) = F$

y $\quad x = b \qquad i(Q(b) \rightarrow R(b)) = V \qquad \left.\begin{array}{l} i(Q(b)) = F \text{ ó } i(R(b)) = V \\ \text{como } \; i(Q(b))) = V \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{i(R(b)) = V}$

- $i(A_2) \equiv i(\forall x\,(P(x) \rightarrow R(x))) = V$

$x = a \qquad i(P(a) \rightarrow R(a)) = V \qquad \left.\begin{array}{l} i(P(a)) = F \text{ ó } i(R(a)) = V \\ \text{como } \; i(P(a))) = V \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{i(R(a)) = V}$

y $\quad x = b \qquad i(P(b) \rightarrow R(b)) = V \qquad$ se cumple pues $i(P(b)) = F$

Se obtiene el **mismo resultado** que en la 1ª solución.