

Demostrar la corrección de la estructura deductiva siguiente, mediante deducción natural:

$$\top [\neg \forall x (P(x) \wedge Q(x))] \vdash \exists x \neg P(x) \vee \exists y \neg Q(y)$$

1ª solución:

1.	$\neg \forall x (P(x) \wedge Q(x))$	premisa
2.	$\exists x \neg (P(x) \wedge Q(x))$	$\neg \forall x A(x) \equiv \exists x \neg A(x)$
3.	$\exists x (\neg P(x) \vee \neg Q(x))$	De Morgan 2
4.	$\neg P(a) \vee \neg Q(a)$	elim \exists 3, a constante nueva
5.	$\neg P(a)$	supuesto
6.	$\exists x \neg P(x)$	int \exists 5
7.	$\exists x \neg P(x) \vee \exists y \neg Q(y)$	int \vee 6
8.	$\neg Q(a)$	supuesto
9.	$\exists y \neg Q(y)$	int \exists 8
10.	$\exists x \neg P(x) \vee \exists y \neg Q(y)$	int \vee 9
11.	$\exists x \neg P(x) \vee \exists y \neg Q(y)$	elim \vee 4, 5-7, 8-10

2ª solución: por contradicción:

1.	$\neg \forall x (P(x) \wedge Q(x))$	premisa
2.	$\neg (\exists x \neg P(x) \vee \exists y \neg Q(y))$	supuesto
3.	$\neg \exists x \neg P(x) \wedge \neg \exists y \neg Q(y)$	De Morgan 2
4.	$\forall x \neg \neg P(x) \wedge \forall y \neg \neg Q(y)$	$\neg \exists x A(x) \equiv \forall x \neg A(x)$
5.	$\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y)$	elim \neg 4, dos veces
6.	$\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$	$\forall y Q(y) \equiv \forall x Q(x)$
7.	$\forall x (P(x) \wedge Q(x))$	$\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \equiv \forall x (P(x) \wedge Q(x))$
8.	$\neg \forall x (P(x) \wedge Q(x))$	iteración 1
9.	$\neg \neg (\exists x \neg P(x) \vee \exists y \neg Q(y))$	int \neg 2, 7, 8
10.	$\exists x \neg P(x) \vee \exists y \neg Q(y)$	elim \neg 9