Demostrar mediante deducción natural, justificando cada paso y <u>utilizando como mucho dos reglas derivadas en dos pasos de la demostración:</u>

$$T\ [\ \forall x \forall y\ (P(y) \rightarrow Q(y,x))\ ,\ \neg\exists y\ (R(a,y) \wedge Q(b,y))\ ,\ \exists z\ R(a,z)\ ]\ \vdash \neg P(b)$$

Examen julio 2017

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\forall x \forall y (P(y) \rightarrow Q(y,x))$ | premisa |
| 2. | $\neg\exists y (R(a,y) \wedge Q(b,y))$ | premisa |
| 3. | $\exists z R(a, z)$ | premisa |
| 4. | $R(a,c^*)$ | elim. $\exists$, 3 $\{z/c^*\}$ |
| 5. | $\forall y \neg (R(a,y) \wedge Q(b,y))$ | regla derivada 1 en línea 2: $\neg\exists x A(x) \rightarrow \forall x \neg A(x)$ |
| 6. | $\neg (R(a, c^*) \wedge Q(b, c^*))$ | elim $\forall$, 5 $\{y/c^*\}$ |
| 7. | $Q(b, c^*)$ | supuesto |
| 8. | $R(a,c^*) \wedge Q(b, c^*)$ | int $\wedge$ (4,7) |
| 9. | $(R(a,c^*) \wedge Q(b, c^*)) \wedge \neg (R(a, c^*) \wedge Q(b, c^*))$ | int $\wedge$ (8,6) |
| 10. | $Q(b, c^*) \rightarrow (R(a,c^*) \wedge Q(b, c^*)) \wedge \neg (R(a, c^*) \wedge Q(b, c^*))$ | int $\rightarrow$ (7, 10) |
| 11. | $\neg Q(b, c^*)$ | int $\neg$ (10) |
| 12. | $\forall y(P(y) \rightarrow Q(y, c^*))$ | elim $\forall$, 1 $\{x/ c^*\}$ |
| 13. | $P(b) \rightarrow Q(b, c^*)$ | elim $\forall$, 12 $\{y/ b\}$ |
| 14. | $\neg P(b)$ | regla derivada 2 en líneas 13 y 11: MT (13, 11) |