Lógica de Primer Orden: Ejercicios de Semántica (2019)

Ejercicio 1.

Definir una interpretación sobre el dominio {0,1} que sirva para demostrar que no se cumple la relación de consecuencia lógica:

$$\{ \forall y\, (A(y) \lor C(y)) , \exists x\, B(x) \} \not\models \forall x\, (B(x) \lor C(x))$$

Ejercicio 2.

Sea A la fórmula $\exists x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x)$. Probar que no es lógicamente válida. ¿Es A insatisfacible?

Ejercicio 3.

Defina un lenguaje de Primer Orden en el que formalizar el siguiente argumento. A continuación, demuestre mediante la construcción detallada de un contra-modelo en el dominio {Pedro, María}, que no hay relación de consecuencia lógica.

> Hay alguien que, o bien le gusta nadar, o bien le gusta correr. A Pedro no le gusta nadar. Luego a Pedro le gusta correr.

Ejercicio 4.

Encontrar, si existen, un modelo y un contramodelo de esta fórmula. Hay que especificar tanto el dominio como la interpretación de todos los símbolos relevantes.

$$\forall x\, \forall y\, (p(g(x),y) \rightarrow \exists z\, q(z,y) \lor p(y,g(y)))$$

Ejercicio 5.

Construir un modelo y un contramodelo de la siguiente fórmula sobre el dominio {1,2,3}:

$$\exists x \neg Q(f(x)) \land \neg \exists z (\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z)))$$

Ejercicio 6.

Encontrar, si existen, un modelo y un contramodelo para cada una de las siguientes fórmulas. Hay que escribir las interpretaciones por completo.

(1) $\forall x(p(x,a) \rightarrow q(f(x),x))$
(2) $\exists z\, r(z) \vee \forall x \forall w(s(x,w) \leftrightarrow s(b,x))$

Ejercicio 7.

Probar:

$$\forall x\ (\ P(x) \rightarrow Q(x) \nvDash \exists x\ P(x) \rightarrow \forall x\ Q(x)\ )$$

Ejercicio 8.

Demostrar con medios semánticos que el siguiente razonamiento no es correcto utilizando un dominio de dos elementos:

$$\{\ \exists x\ (\ P(x) \rightarrow Q(x,a)\ )\ ,\ P(a)\ ,\ \neg R(b)\ ,\ \forall x\ (\ Q(x,a) \rightarrow R(b))\ \} \vDash \forall x\ (\ P(x) \rightarrow R(x)\ )$$

Ejercicio 9.

Demostrar con análisis semántico la siguiente relación de consecuencia lógica:

$$\exists x\ (\neg P(x) \wedge Q(x)) \vDash \neg \forall x\ (Q(x) \rightarrow P(x))$$

Ejercicio 10.

Demostrar por medios semánticos:

$$\vDash \exists x\ (\ P(x) \rightarrow Q(x)\ ) \rightarrow (\ \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)\ )$$

Ejercicio 11.

Probar:

$$\exists x\ P(x) \rightarrow Q(a) \vDash \forall x\ (\ P(x) \rightarrow Q(a)\ )$$

Ejercicio 12.

Definir un contramodelo para demostrar que la siguiente relación de consecuencia lógica NO se verifica:

$$\{ \forall x\, (Q(x) \rightarrow R(x)), \forall x\, (P(x) \rightarrow R(x)), P(a), Q(b) \} \vDash \exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$$

Ejercicio 13.

Construir un modelo del siguiente conjunto de fórmulas sobre el dominio {1,2,3}:

$$S = \{ \forall x\, (Q(x) \rightarrow R(x))\, , \forall x\, \forall y (P(x, y) \rightarrow P(y, x)), \forall x\, \neg P(x, x)\, , \forall x\, (P(f(x), x) \rightarrow Q(f(x)))\, , \forall x\, (R(x) \leftrightarrow P(x, f(x)))\, , Q(f(a)) \}$$

Ejercicio 14.

Siendo D = {alumnos del grupo}, crea un lenguaje de Primer Orden y formaliza las siguientes 2 afirmaciones. Construye una interpretación que sea modelo de la primera y contramodelo de la segunda:

Si todos los alumnos trabajan, todos aprueban lógica
Si hay algún alumno que no trabaja, todos suspenden lógica

Ejercicio 15.

Averiguar si la fórmula $Q(a,b) \vee Q(c,c)$ es o no consecuencia lógica de cada uno de los siguientes conjuntos:

(1) $\{ \exists x\, P(x)\, , \forall y\, (P(y) \rightarrow Q(a,y)) \}$
(2) $\{ \exists x\, P(x)\, , \forall y\, (P(y) \rightarrow Q(c,c)) \}$

Ejercicio 16.

Demostrar con medios semánticos que el siguiente razonamiento no es correcto utilizando un dominio de dos elementos:

$$\{P(b), \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x,a)), \forall x(P(x) \rightarrow \exists y\, Q(x,y))\} \vDash \exists x\, Q(x,x)$$

Ejercicio 17.

Analizar si existe o no relación de consecuencia lógica en los siguientes esquemas de argumentación utilizando razonamiento semántico:

(a) $\{\forall z\, \exists x\, P(x,z), \exists x\, P(x,a)\} \vDash \exists x \forall z\, P(x,z)$
(b) $\{\forall x P(x) \rightarrow Q(c)\} \vDash \exists x\, (P(x) \rightarrow Q(c))$

Ejercicio 18.

Definir una interpretación en el dominio D = {0,1} que sirva para demostrar que la fórmula siguiente no es válida:

$$\neg\exists x(R(x) \land S(x)) \rightarrow \neg\exists x R(x) \land \neg\exists x S(x)$$

Ejercicio 19.

Sean A, B, C, D, E, F y G fórmulas de un lenguaje de Primer Orden sobre las que solo se sabe lo siguiente:

A es válida
E es la negación de A
B es insatisfacible
F es falsa para una interpretación concreta I
C es satisfacible
G es verdadera para una interpretación concreta I
D es la negación de C

Para cada una de las siguientes afirmaciones decir SI (si se cree que es correcta), NO (si se cree que es incorrecta) o DESC (si con la información que se tiene no es posible saberlo) (Nota: validez implica satisfacibilidad):

(1) $\neg B \lor C$ es satisfacible
(2) $B \rightarrow E$ es válida
(3) $(E \land C) \rightarrow G$ es insatisfacible
(4) $(A \land D) \lor F$ es verdad para la interpretación concreta I
(5) $G \rightarrow (C \land B)$ es falsa para la interpretación concreta I
(6) $(E \lor \neg B) \land C$ es verdad para la interpretación concreta I
(7) $D \land F$ es satisfacible
(8) $(\neg E \lor \neg B)$ es válida

Ejercicio 20.

Demostrar que la siguiente argumentación no es correcta, mediante la construcción de interpretaciones en el dominio {do, re, mi}. Justifica la respuesta desarrollando el significado de las fórmulas en dichas interpretaciones.

$$\{ \exists x\, (P(x) \wedge Q(x)), \forall x\, ((P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow R(x)), P(a) \wedge \neg P(c) \wedge \neg Q(c) \} \vDash R(a) \vee R(c)$$

Ejercicio 21.

Encontrar, si existen, un modelo y un contramodelo para cada una de las siguientes fórmulas; si no existen, decir que no existen y por qué. (Hay que escribir las interpretaciones por completo).

(1) $\exists z\, (\, p(z, a) \leftrightarrow q(f\,(z), z)\,)$
(2) $\forall x\, \exists w\, (\, p(x, w) \wedge \neg p(w, x)\,) \wedge \exists z\, p(z, g(z))$

Ejercicio 22.

Demostrar con medios semánticos que el siguiente razonamiento no es correcto utilizando un dominio de dos elementos:

$$\{ P(b)\, ,\, \exists x\, (\, P(x) \wedge \neg Q(x,a)\,),\, \forall x\, (\, P(x) \rightarrow \exists y\, Q(x,y)\,)\, \} \vDash \exists x\, Q(x,x)$$

Ejercicio 23.

Dados las siguientes frases o argumentos demostrar con métodos semánticos (es decir, sin usar en ningún caso deducción natural) si son o no correctos.

(1) Nunca he criado o criaré en mi granja un animal que no tenga 4 patas. Si compro un animal es para comerlo o para criarlo en mi granja. Los pollos tienen dos patas. Un animal no puede tener 2 y 4 patas a la vez. He comprado un pollo que se llama a. Luego me lo voy a comer.
(2) Existe un melón tal que si es rojo, entonces es cuadrado. Luego si hay melones rojos, entonces hay melones cuadrados.

Ejercicio 24.

Dado el lenguaje L = { a, b, f, P } donde a y b son símbolos de constante, f es símbolo de función unaria y P es símbolo de predicado binario; y dada la interpretación cuyo dominio es D = {1,2},las constantes a y b se interpretan como los individuos 1 y 2 respectivamente; el símbolo f seinterpreta como f(1) = 2, f(2) = 1 y asignando al símbolo P el significado P(1,1) = V, P(1,2) = V, P(2,1) = F, P(2,2) = F probar que:

(a) Las fórmulas $P(a,f(b)) \wedge P(b,f(b))$ y $\forall x\, \forall y\, P(y,x)$ son falsas en esa interpretación.
(b) Las fórmulas $\forall x\, \exists y\, P(y,x)$ y $\forall x\, P(f(x),x) \rightarrow \forall y\, P(y,f(y))$ son verdaderas en esa interpretación.

Ejercicio 25.

Determinar por medios semánticos si los siguientes razonamientos son correctos o no, justificando los pasos principales del desarrollo.

(1) $\{\ \exists x\, P(x), \forall x\, R(x), \forall x(R(x) \land P(x) \to Q(x)), \forall x(Q(x) \to P(x))\ \} \vDash \forall x\, P(x)$

(2) $\{\ \forall y(q(y) \to r(y)),\ r(a) \to p(a),\ \forall z\, q(z)\ \} \vDash \exists x\, p(x)$

Ejercicio 26.

Probar que la siguiente argumentación no es correcta mediante la definición de la correspondiente interpretación en un dominio de tres elementos (elegir los tres elementos). Justificar brevemente la respuesta desarrollando el significado de las fórmulas en dichas interpretaciones.

$$\{\ \exists x P(x,a), \forall y(P(y,y) \to P(b,y) \land S(b)), \exists x(P(x,a) \land \forall z E(x,z))\ \} \vDash P(b,c) \to S(c)$$

Ejercicio 27.

Demostrar por medios semánticos y con dominio D = { 1, 2} que no hay consecuencia lógica. Justificar adecuadamente los pasos principales del procedimiento.

$$\{\ \forall x \forall y\, (P(x,y) \to Q(y) \land R(x)), \neg\exists x\, P(a,x), \exists x P(x,b)\ \} \nvDash \exists x(P(x,x)) \to Q(a) \lor R(a)$$

Ejercicio 28.

Después de haberlo formalizado en el lenguaje de la Lógica de Primer Orden, establecer por medios semánticos si el siguiente razonamiento es o no correcto:

Un número natural es azul si y solo si es el doble de algún número primo
14 es el doble de 7, y 7 es un número primo
Un número es par si y sólo si es el doble de algún número natural
Para todo número par, su sucesor no es el doble de ningún número natural
15 es el sucesor de 14
Por tanto, 15 no es un número azul