

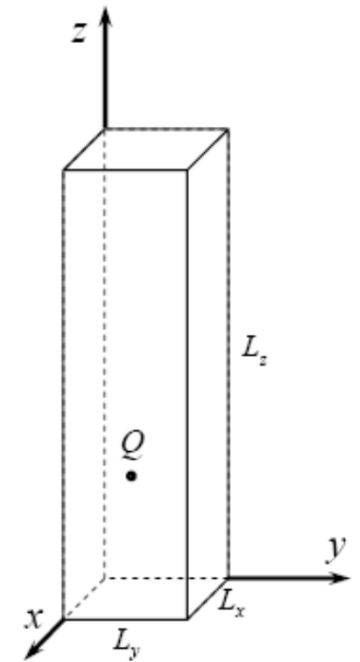
Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Transporte de electrones a través de un hilo metálico: saltos en la resistencia

Un hilo, de sección cuadrada $l \times l$, se puede modelar a través del potencial

$$U = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0, l], \text{ ó } y \in [0, l] \\ \infty, & \text{si } x \notin [0, l] \text{ ó } y \notin [0, l]. \end{cases}$$



Condiciones (i) los electrones no puedan atravesar las superficies laterales del metal y (ii) dentro del metal se comporten como partículas libres.

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

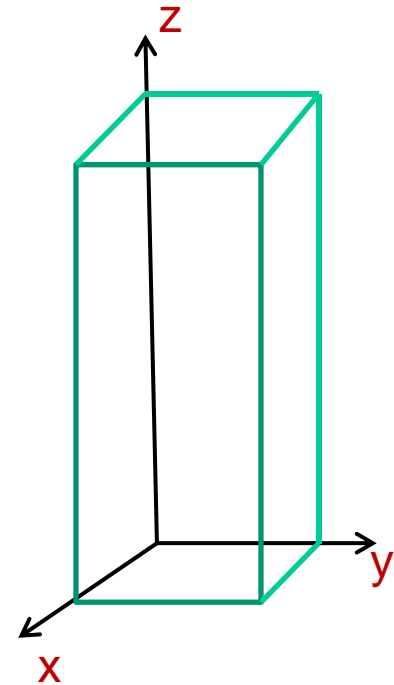
En el régimen cuántico, la ecuación de Schrödinger para la función de onda

$$-i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi = 0.$$

Condiciones Contorno

$$\begin{aligned}\Psi(0, y, z, t) &= 0, \\ \Psi(x, 0, z, t) &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi(l, y, z, t) &= 0 \\ \Psi(x, l, z, t) &= 0\end{aligned}$$



Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

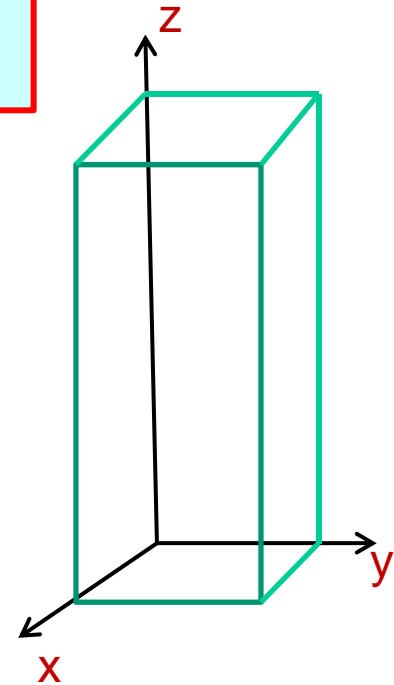
Supongamos que uno de los extremos del hilo ($z = 0$) se encuentra conectado a un "foco de electrones" de energía bien definida,

$$\Psi(x, y, 0, t) = \psi_0 e^{iEt/\hbar}$$

Condiciones Contorno para otro extremo (que es aislado de foco de electrones) $\leftrightarrow \Psi(x, y, L, t) = 0$

Sustituyendo en Ec. Schrödinger solución dentro de metal

$$\Psi = \psi(x, y, z) e^{iEt/\hbar}$$



Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Problema a solucionar:

$$\psi + \xi^2 \Delta \psi = 0,$$

$$\psi(0, y, z) = 0,$$

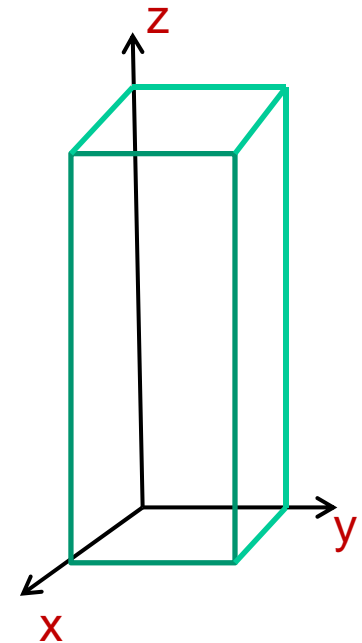
$$\psi(l, y, z) = 0,$$

$$\psi(x, 0, z) = 0,$$

$$\psi(x, l, z) = 0,$$

$$\psi(x, y, 0) = \psi_0,$$

$$\psi(x, y, L) = 0.$$



(**)

$$\xi = \hbar / \sqrt{2mE}$$

Ec. Poisson

$$\Delta \psi = -\frac{1}{\xi^2} \psi$$

$\xi = \hbar/p$ = dimensionalidad de distancia (tamaño), p- momento

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

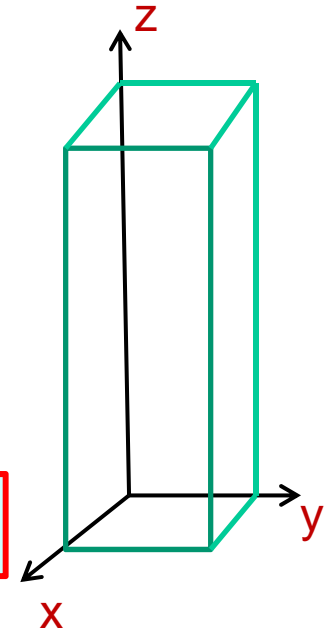
Buscamos solución del problema como:

$$\psi(x, y, z, t) = \sum_{n,m} C_{n,m}(z) \phi_{n,m}(x, y)$$

Con

$$\phi_{n,m}(x, y)$$

Solución de problema SL:



$$\Delta\phi + \lambda\phi = 0,$$

$$\phi(0, y) = 0,$$

$$\phi(l, y) = 0,$$

$$\phi(x, 0) = 0,$$

$$\phi(x, l) = 0.$$

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

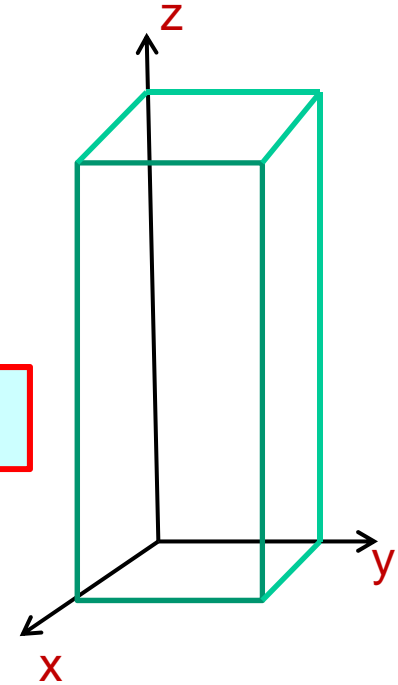
Encontramos anteriormente que:

$$\phi_{n,m}(x, y) = \text{sen}(n\pi x/l) \text{sen}(m\pi y/l)$$

Problema (***) se transforma entonces en

$$\frac{d^2 C_{n,m}(z)}{dz^2} + (\xi^{-2} - \lambda_{n,m}) C_{n,m}(z) = 0_x$$

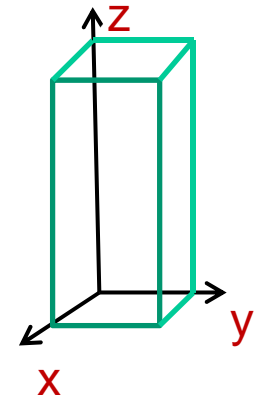
$$C_{n,m}(0) = C_{n,m}^{(0)}, \quad C_{n,m}(L) = 0$$



Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Con



$$C_{n,m}^{(0)} = \frac{4\psi_0}{L^2} \int_0^l \int_0^l \phi_{n,m}(x,y) dx dy = \begin{cases} \frac{2^4}{nm\pi^2} \left(\frac{l}{L}\right)^2 \psi_0 & \text{si } n \text{ y } m \text{ impar} \\ 0, & \text{si } n \text{ o } m \text{ par.} \end{cases}$$

NOTA:

1. Excitando presión homogénea (ejemplo anterior de gas) se puede propagar ondas a largas distancias con **PERFIL TRANSVERSAL HOMOGÉNEO**
2. Sin embargo, excitando potencial homogéneo extremo de tubo metálico → solo se puede propagar excitaciones en forma de onda estacionarias transversales

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Para problema:

$$\frac{d^2 C_{n,m}(z)}{dz^2} + (\xi^{-2} - \lambda_{n,m}) C_{n,m}(z) = 0,$$
$$C_{n,m}(0) = C_{n,m}^{(0)}, \quad C_{n,m}(L) = 0$$

Tenemos 3 soluciones dependiendo del signo \rightarrow

$$\xi^{-2} - \lambda_{n,m}$$

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

3 soluciones posibles dependiendo del signo →

$$\xi^{-2} - \lambda_{n,m}$$

$$C_{n,m}(z) = \begin{cases} \tilde{C}_{n,m}^{(0)} \text{sen} [\sqrt{\xi^{-2} - \lambda_{n,m}} (L - z)], & \text{si } \lambda_{n,m} < \xi^{-2} \\ C_{n,m}^{(0)} (L - z)/L, & \text{si } \lambda_{n,m} = \xi^{-2} \\ \tilde{C}_{n,m}^{(0)} \text{senh} [\sqrt{\lambda_{n,m} - \xi^{-2}} (L - z)], & \text{si } \lambda_{n,m} > \xi^{-2} \end{cases}$$

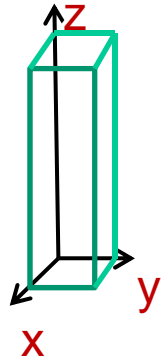
Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Con coeficientes para cada caso

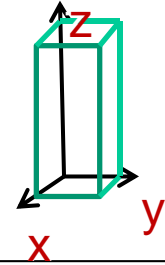
$$\tilde{C}_{n,m}^{(0)} = C_{n,m}^{(0)} / \text{sen} \left(\sqrt{\xi^{-2} - \lambda_{n,m}} L \right)$$

$$\tilde{C}_{n,m}^{(0)} = C_{n,m}^{(0)} / \text{senh} \left(\sqrt{\lambda_{n,m} - \xi^{-2}} L \right)$$



Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

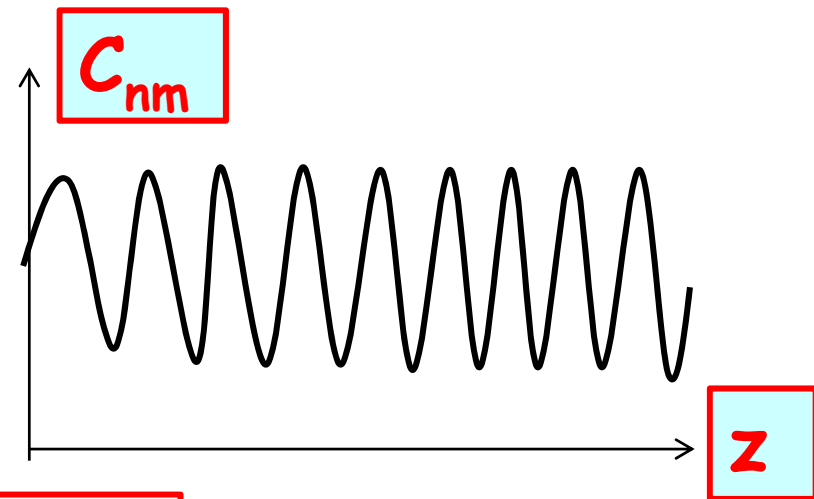


Consideramos dos casos de
Limite: → recordando que

$$\lambda_{n,m} = \pi^2 \left(\frac{n^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_y^2} \right)$$

1. Si $\lambda_{n,m} < \xi^{-2}$:

Ondas estacionarias se
extienden por todo hilo



Aumentando energía de electrones
paso a paso cumpliremos la condición
para nuevos (n,m) superado nuevo
umbral y aumentando la conductancia

$$\xi = \hbar / \sqrt{2mE}$$

Métodos Matemáticos en Física

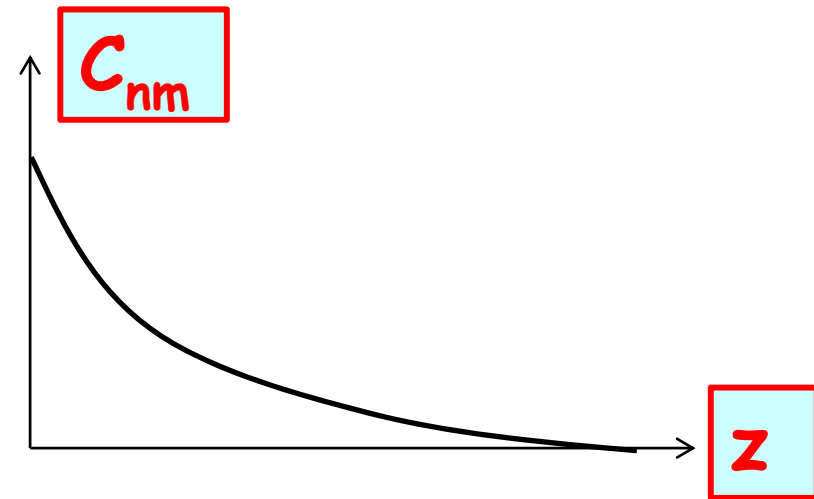
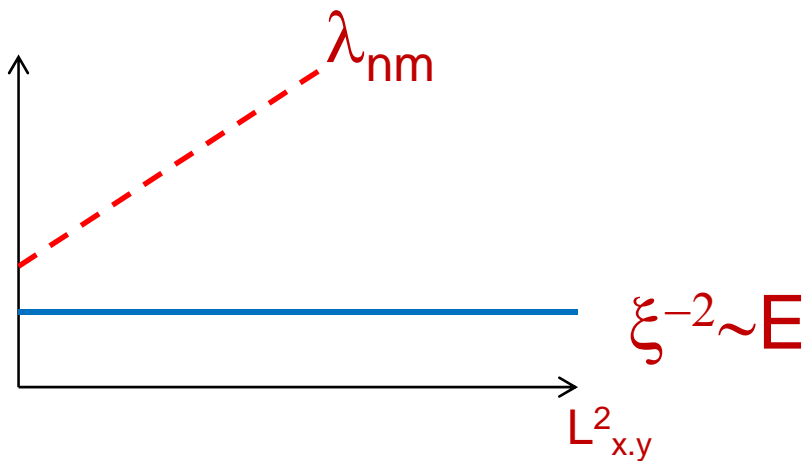
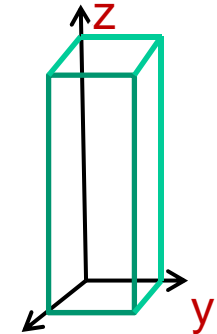
L6A Método Fourier: Barra gruesa

2. Si

$$\lambda_{n,m} > \xi^{-2}$$

Ondas estacionarias están localizadas cerca de

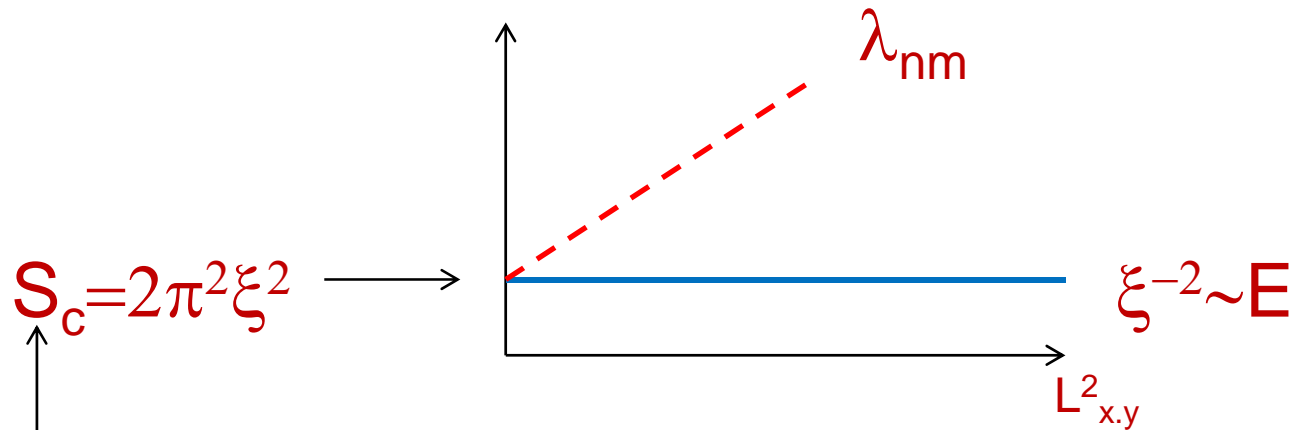
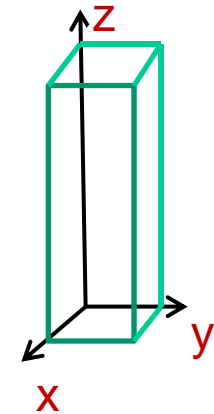
$$z = 0 \quad (l \ll L)$$



Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Para secciones de hilo menores de valor crítico:
(que corresponde a condición $\lambda_{\min} = \lambda_{11} = \xi^{-2}$)

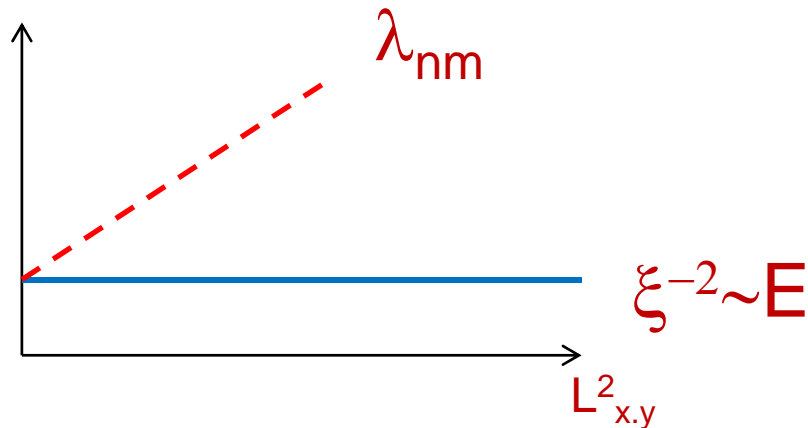
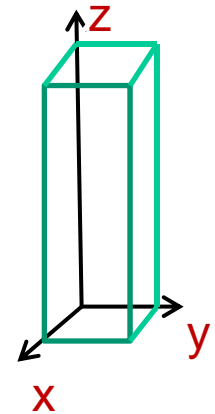


Error en libro APL

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Solamente se tiene el segundo tipo de ondas, y
→
la probabilidad de encontrar electrones en el extremo $z = L$ es prácticamente nula



Cuando esto sucede, se dice que no existen "canales" que permitan el paso de los electrones de un extremo a otro del hilo.

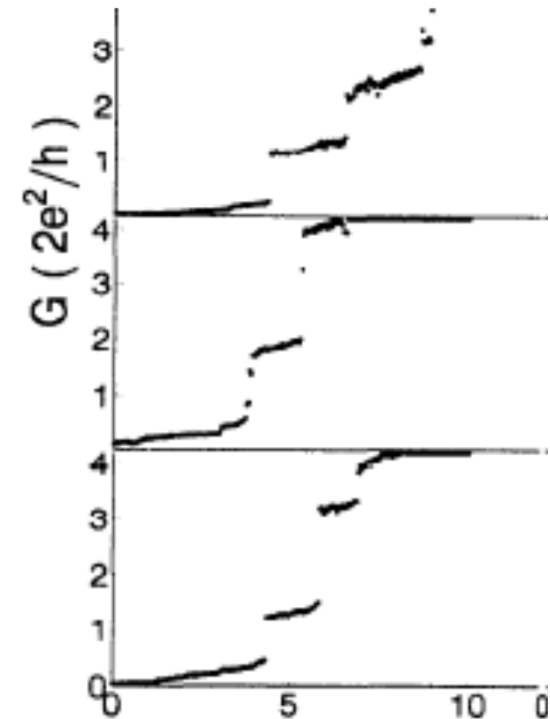
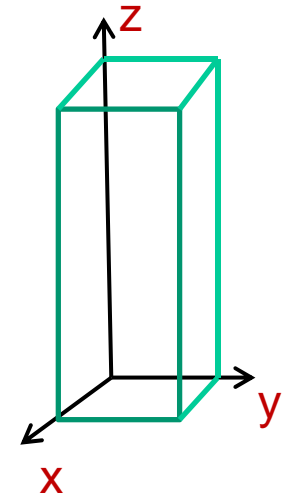
Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

$S < S_c$ resistencia de hilo es infinita
($\rho \neq \sim 1/S$)

A medida que la sección del hilo aumenta, el número de "canales" que permiten el paso de los electrones aumenta.

Pero este aumento no es continuo, lo cual se traduce en una dependencia de la resistencia con la sección del hilo a saltos.

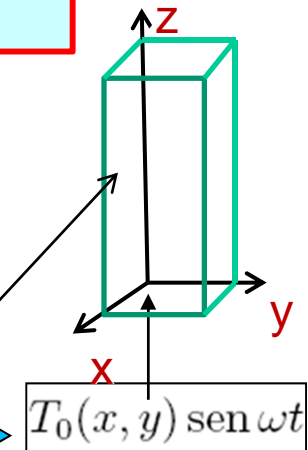


Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Ondas de temperatura (Cap 6.6 APL)

distribución de temperatura en una de las superficies de un cuerpo, con forma de prisma de base cuadrada de longitud L y sección $l \times l$,

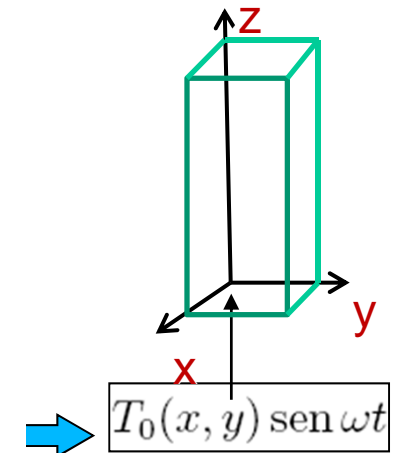


El resto de superficies se mantiene termo aislados

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Usaremos soluciones de problema SL $w_{nm}(x, y)$ para buscar distribución de temperatura como:



$$T(x, y, z, t) = \sum \Theta_{n,m}(z, t) w_{n,m}(x, y)$$

Sustituyendo en Ec. de conducción Calor 3D:

Métodos Matemáticos en Física

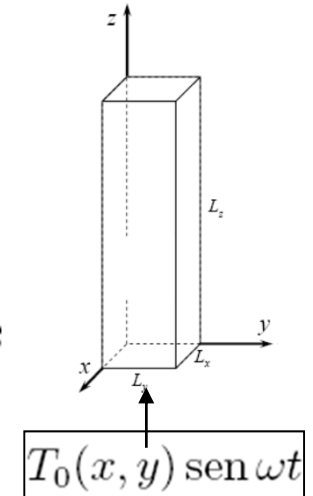
L6A Método Fourier: Barra gruesa

Funcion $\Theta(z,t)$ es solución de Ec. Con CC

$$\frac{\partial \Theta_{n,m}(z,t)}{\partial t} - \chi \left[\frac{\partial^2 \Theta_{n,m}(z,t)}{\partial z^2} + \lambda_{n,m} \Theta_{n,m}(z,t) \right] = 0,$$

$$\Theta_{n,m}(0,t) = \tilde{\Theta}_{n,m} \text{sen } \omega t, \quad \left. \frac{\partial \Theta_{n,m}(z,t)}{\partial z} \right|_{z=L} = 0,$$

Error APL



con

$$\lambda_{n,m} = (\pi/l)^2 (n^2 + m^2)$$

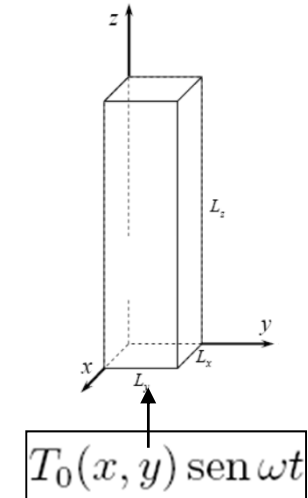
Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

con

$$\tilde{\Theta}_{n,m} \equiv \frac{\int_0^l \int_0^l T_0(x, y) w_{n,m}(x, y) dx dy}{\int_0^l \int_0^l w_{n,m}^2(x, y) dx dy}$$

Intergando CC con autofunciones
y aplicando cond. de ortoganalidad



Métodos Matemáticos en Física

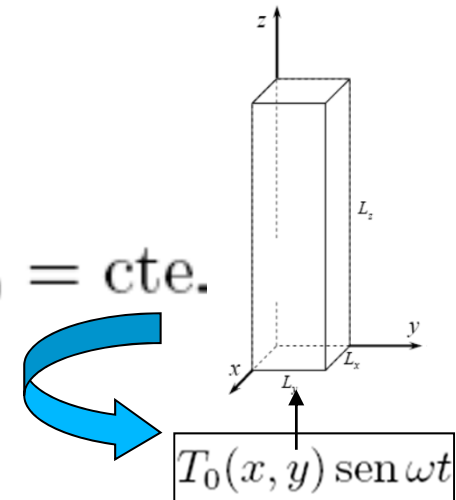
L6A Método Fourier: Barra gruesa

Temperatura homogénea en el extremo

Analicemos en primer lugar caso

$$T_0(x, y) = T_0 = \text{cte.}$$

En este caso se puede esperar que la temperatura del cuerpo resulte homogénea en las secciones paralelas al plano xy .



$$T_0 = \text{cte} \propto w_{0,0} \longrightarrow \tilde{\Theta}_{n,m} = T_0 \delta_{n0} \delta_{m0}$$

Como funciones $w_{n,m}$ son ortogonales entre si, el numerador de la expresión (***) solamente es distinto de cero si $n=m=0$.

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Entonces:

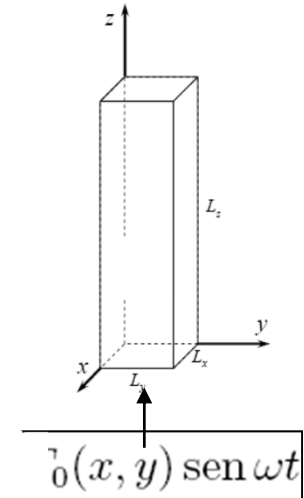
$$T = \Theta_{0,0}(z, t)$$

Problema 1D a solucionar:

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} - \chi \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} = 0,$$

$$T(0, t) = T_0 \text{sen } \omega t,$$

$$\left. \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \right|_{z=L} = 0$$



Ahora, en contraste con vibraciones en gas, barra, la solución NO puede ser →

$$T \propto \text{sen } \omega t:$$

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

la fase de las variaciones de temperatura, como se verá mas adelante, depende de frecuencia de perturbacion.

$$\frac{\partial \mathcal{T}(z, t)}{\partial t} - \chi \frac{\partial^2 \mathcal{T}(z, t)}{\partial z^2} = 0,$$

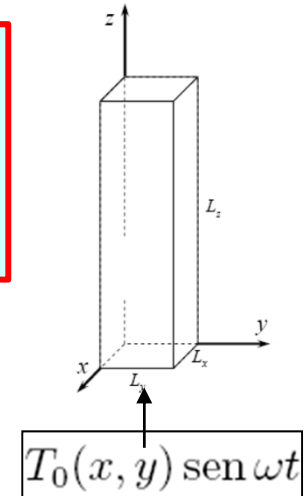
$$\mathcal{T}(0, t) = T_0 e^{i\omega t}, \quad \left. \frac{\partial \mathcal{T}(z, t)}{\partial z} \right|_{z=L} = 0$$

Buscamos solución como **parte imaginaria** de Función compleja

$$\mathcal{T}(z, t)$$

Ya que

$$\text{sen } \omega t = \text{Im } e^{i\omega t}$$

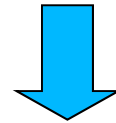


Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

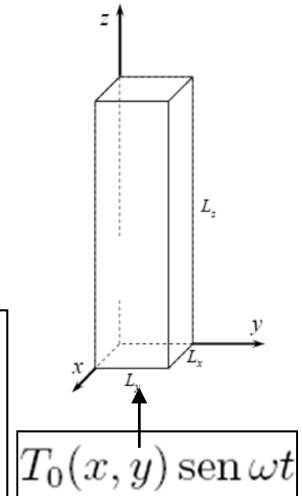
Tiene sentido suponer que

$$\mathfrak{T} = Z(z)e^{i\omega t}$$



$$i\omega Z(z) - \chi \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = 0,$$

$$Z(0) = T_0, \quad \left. \frac{\partial Z(z)}{\partial z} \right|_{z=L} = 0.$$



Métodos Matemáticos en Física

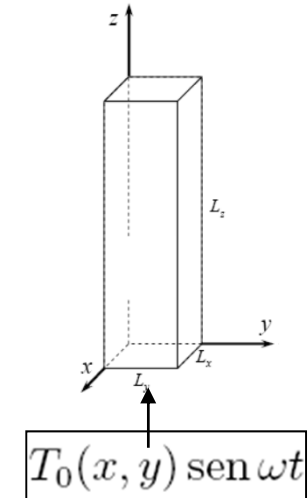
L6A Método Fourier: Barra gruesa

Solución general:

$$Z(z) = C_+ e^{z/\zeta} + C_- e^{-z/\zeta} \quad *$$

con

$$\zeta^{-1} = \sqrt{i\omega/\chi} = \sqrt{\omega/(2\chi)} (1 + i).$$



Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

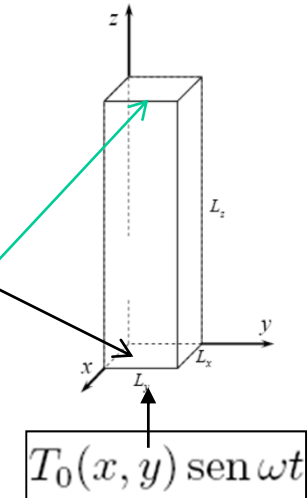
Obtenemos constantes
Imponiendo CC:

$$C_+ + C_- = T_0,$$

$$C_+ - e^{-2L/\zeta} C_- = 0.$$

$$\left. \frac{\partial Z(z)}{\partial z} \right|_{z=L} = 0$$

$$Z(0) = T_0,$$



Métodos Matemáticos en Física

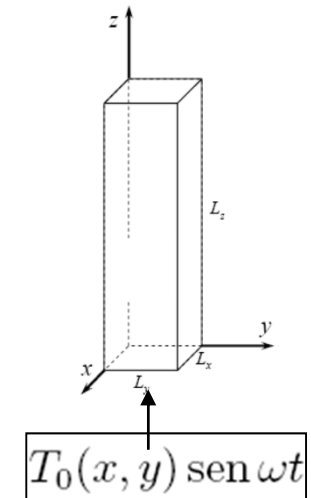
L6A Método Fourier: Barra gruesa

Consideramos límites para grandes longitudes

→ $C_{\pm} \rightarrow 0$

**Esto ocurre
para**

$$L \gg 2|\operatorname{Re} \zeta| = \sqrt{2\chi/\omega_*}$$



**En este caso primer termino
de expresión (*) es bastante
menor de segundo**

$$C_- \simeq T_0,$$

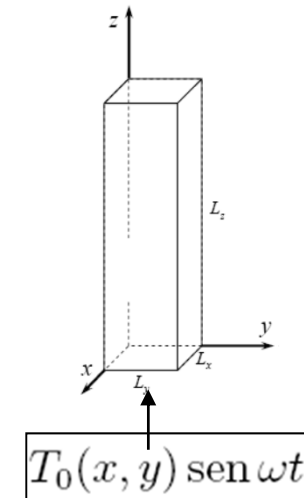
$$C_+ \simeq T_0 e^{-2L/\zeta} \ll C_-$$

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

En esta aproximación quedamos solo con segundo termino de (*) →

$$\mathfrak{T}(z, t) = T_0 e^{-\sqrt{\omega/(2\chi)}z} e^{i(\omega t - \sqrt{\omega/(2\chi)}z)}$$



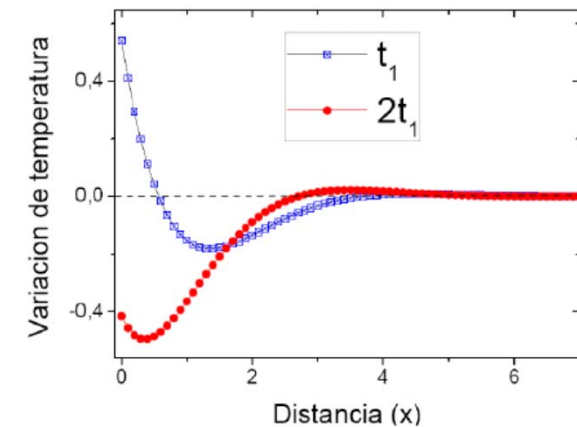
#

Recuperamos solución del problema conducción de calor en 1D con extremo calentado periódicamente (ver problemas resueltas en clase)

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

La distribución de temperatura en el cuerpo es entonces



$$T(z, t) = \text{Im } \mathfrak{T}(z, t) = T_0 e^{-\sqrt{\omega/(2\chi)}z} \text{sen} \left(\omega t - \sqrt{\omega/(2\chi)}z \right) \quad \#$$

Son ondas fuertemente atenuadas (sus amplitudes disminuyen por un factor $1/e$ en aprox. longitud de onda).

Longitud de onda coincide (salvo factor 2π) con longitud de atenuación

Nota: Vector de onda $k=\omega/c$ es para sonido y $k=(\omega/2\chi)^{0.5}$ aquí.

Métodos Matemáticos en Física

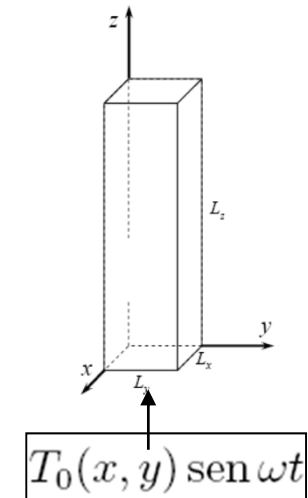
L6A Método Fourier: Barra gruesa

Temperatura **NO** homogénea en el extremo

Hay que considerar todos modos (n, m) .
Siguiendo apartado anterior, la solución se busca como

$$\mathfrak{T}_{n,m} = Z_{n,m}(z)e^{i\omega t}$$

$$\Theta_{n,m} = \text{Im } \mathfrak{T}_{n,m}$$



Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

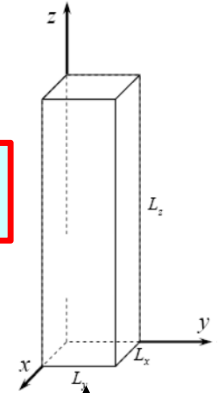
Temperatura NO homogénea en el extremo

$$\frac{\partial^2 Z_{n,m}(z)}{\partial z^2} - \left(\lambda_{n,m} + i \frac{\omega}{\chi} \right) Z_{n,m}(z) = 0,$$

$$Z_{n,m}(0) = \tilde{\Theta}_{n,m},$$

$$\left. \frac{\partial Z_{n,m}(z)}{\partial z} \right|_{z=L} = 0$$

%



$T_0(x, y) \text{ sen } \omega t$

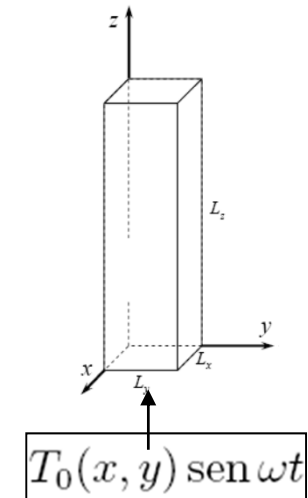
Ec. mas compleja que en pag. 72

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Ecuación (*) tiene solución general:

$$Z(z) = C_+ e^{z/\zeta} + C_- e^{-z/\zeta}$$



con:

$$\zeta_{n,m}^{-1} = \sqrt{\lambda_{n,m} + i\omega/\chi}$$

Métodos Matemáticos en Física

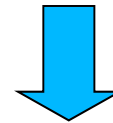
L6A Método Fourier: Barra gruesa

Para limite de frecuencias
suficientemente bajas

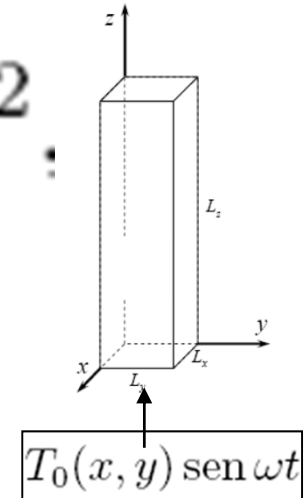


Para todos $n, m \neq 0$

$$\omega \ll \pi^2 \chi / l^2,$$



$$\zeta_{n,m}^{-1} \simeq \sqrt{\lambda_{n,m}}$$



Usando procedimiento semejante a anterior

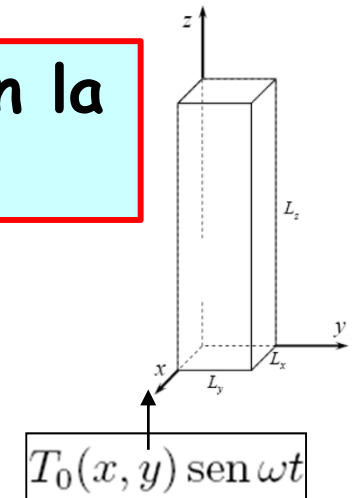
$$\Theta_{n,m}(z, t) \sim \tilde{\Theta}_{n,m} e^{-\sqrt{\lambda_{n,m}} z} \text{sen } \omega t.$$

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

! Oscilaciones que se encuentran casi en fase con la perturbación, PERO con amplitud casi nula para:

$$z \gtrsim 1/\sqrt{\lambda_{n,m}} = l/(\pi\sqrt{n^2 + m^2})$$

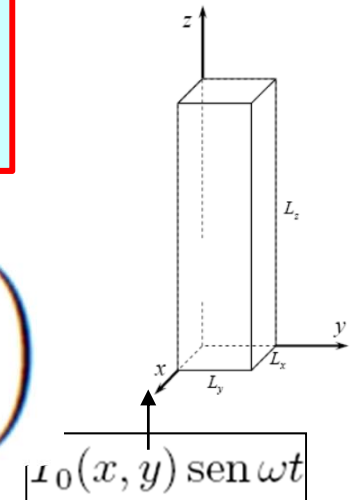


Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Para perfil $n = m = 0$, se obtiene una solución de la forma similar a (#)

$$T_0 e^{-\sqrt{\omega/(2\chi)}z} \text{sen} \left(\omega t - \sqrt{\omega/(2\chi)}z \right)$$



donde T_0 debe entenderse ahora como el valor medio de la distribución de temperatura $T_0(x, y)$ en la superficie $z = 0$ del cuerpo.

Soluciones para perfiles $n, m \neq 0$, son mas complicados