Tema 1

Introducción a la Investigación Operativa

1.1. Historia, definiciones, metodología, técnicas

1.1.1. Introducción histórica

Se suele considerar que la Investigación Operativa como rama de la investigación científica tuvo su origen en la Segunda Guerra Mundial, cuando grupos interdisciplinares de científicos se plantearon y resolvieron problemas de tipo bélico no resueltos de forma satisfactoria hasta el momento, tales como la determinación del tamaño óptimo de convoyes navales, la táctica a seguir en las incursiones aéreas, el análisis de operaciones bélicas, etc.

- **Prehistoria de la Investigación Operativa**

  En la prehistoria de la Investigación Operativa es necesario citar a *Arquímedes (287-212 a.C.)*, que dirigió la defensa de Siracusa cuando ésta fue atacada por Roma. Construyó máquinas para lanzar piedras a gran distancia y consiguió incendiar las embarcaciones de los sitiadores por medio de un sistema de espejos, basándose en las propiedades de las parábolas. Este es el primer problema conocido de Investigación Operativa (en el sentido actual) de distribución óptima de recursos.

  Otros científicos notables que realizaron análisis de operaciones bélicas fueron *Leonardo da Vinci (1452-1519)* y *Galileo (1564-1642)*.

Jacques Bernoulli (1654-1705) inició la concepción subjetiva de la probabilidad en la cuarta parte de su obra, la cual, junto con la noción de utilidad introducida por *John von Neumann (1903-1957)*, fue posteriormente el fundamento de la Teoría de la Decisión, base conceptual de la Investigación Operativa.

En 1776, *G. Monge*, profesor de la Escuela de Ingenieros de Mézières, estudió el problema de planificar los trabajos de desmonte y terraplenado en los proyectos de Obras Públicas. Este es el primer problema conocido de organización del trabajo.

A principios del siglo XIX, *Napoleón Bonaparte* tuvo como asesores a *Lázaro Carrot*, organizador de sus victorias, y a *Pierre Simon Laplace*, analista operativo de la campaña de Rusia.

En 1877, *J.H. Poynting*, físico, extendió el análisis operativo a la Sociología.

Hacia 1881, *Edgeworth* publicó el primer tratado sobre licitaciones, el cual fue completado por *Cournot* en 1890.

En 1885, *F.W. Taylor* intentó resolver el problema de mover con una pala el máximo de material con el mínimo esfuerzo. Esta es la primera aplicación conocida del análisis científico a los problemas de manufacturación. Posteriormente, *Henry L. Gantt*, conocido por la planificación de la producción, junto con *Frank B.* y *Lillian E. Gilbreth*, introdujeron el nombre de "Ciencia de la Administración" (en inglés, "Management Science"), la cual aplica el análisis científico a problemas susceptibles de cuantificación. *Taylor* es reconocido hoy en día como el padre de la Ciencia de la Administración.

En 1886, un informe del "Board on Fortifications or other Defenses of the United States War Department" planteó la elección entre dos tipos de rifles, uno de acero de tipo Krupp de diseño estándar y otro de hierro colado de nuevo desarrollo, para ser utilizados en la defensa costera americana. Este es el primer problema conocido de selección de proyectos.

Hacia 1903, *Alvord* publicó tablas de vida para materiales industriales. Posteriormente, en 1910, la Compañía Telefónica de Nueva York publicó registros de vida de cables aéreos, subterráneos y submarinos. Estos son los primeros problemas conocidos de fiabilidad, mantenimiento y reemplazamiento.

En 1909, *A.K. Erlang* trabajó en transmisión telefónica con un sistema constituido por una central telefónica con un único operador. En 1917, el propio *Erlang* desarrolló la Teoría del Tráfico Telefónico. Su trabajo, publicado en danés, adquirió una gran difusión y fue inmediatamente traducido al inglés, alemán y francés. Este es el primer problema conocido de Teoría de Colas.

Durante la Primera Guerra Mundial se conocieron diversos ejemplos de Investigación Operativa a nivel embrionario en ambos lados del Atlántico.

En 1914-1915, *F.W. Lanchester* publicó en Inglaterra sus trabajos acerca de relaciones entre victoria, superioridad numérica y potencia de fuego. En Estados Unidos merece destacarse el trabajo de *Thomas Alva Edison* sobre la guerra antisubmarina: método de navegación para barcos mercantes que evitase que éstos fueran alcanzados por los submarinos. Construyó un tablero táctico para encontrar la solución a este problema.

En 1915, *Ford Harris*, de la “Westinghouse Corporation”, desarrolló el modelo más simple de inventario y obtuvo la regla de la raíz cuadrada para calcular el tamaño del lote más económico. Este es el primer problema conocido de Teoría de Inventarios.

En 1921, *Emile Borel* inició el estudio de la Teoría de Juegos en una comunicación presentada a la Academia de Ciencias. La forma actual se debe al Teorema del minimax de *Von Neumann*, que data de 1928. En 1930, *Kurtz* construyó por primera vez un modelo probabilístico para determinar tablas de vida al ajustar curvas del tipo VII de *Pearson* a datos telegráficos.

En 1928, el astrónomo *J.S. Stewart* desarrolló un modelo de interacción humana empleando los estudios de la compañía “Bell Telephone” sobre conferencias telefónicas, obteniendo la siguiente regla empírica: la cantidad de llamadas anuales entre dos ciudades es aproximadamente igual al producto del número de teléfonos de ambas dividido entre la distancia entre ellas. Esta regla, que se aplica actualmente a problemas de localización, se aplicó a la transmisión de señales ópticas mediante banderas y al desarrollo de batallas, modelos similares a los estudiados por *Lanchester*.

En 1939, *A.J. Lotka*, de la “Metropolitan Life Insurance Company”, como culminación de una serie de artículos comenzados en 1922, aplicó la Teoría de la Renovación a problemas de reemplazamiento.

En la década de los años 20 se produjo un fuerte impacto provocado por la Revolución Industrial, los estudios de tiempo y movimientos, el control de calidad, los problemas de venta al por menor y el análisis de mercados. En 1954, *Levinson* publicó sus experiencias en la denominada Investigación Operativa Comercial.

- **Segunda Guerra Mundial (1939-1945)**

  La Investigación Operativa nació como respuesta a una necesidad militar específica: la defensa británica frente a los ataques aéreos. Con la llegada de *Adolf Hitler* al poder en 1933 se anunció la determinación de crear una "Luftwaffe" igual en potencia a la combinación aérea anglofrancesa. En 1934 los británicos decidieron crear un comité de vigilancia para la defensa aérea, con objeto de realizar un análisis de los avances recientes en el conocimiento científico y técnico que pudiera ser utilizado como método de defensa frente a los ataques aéreos.

  El presidente de dicho comité fue *Sir Henry Tizard*, miembro respetado por sus colegas científicos y militares en su participación en la Primera Guerra Mundial. A principios de 1935, otro miembro del comité, *Sir Robert Watson*, sugirió la posibilidad de desarrollar un "rayo de muerte" que matara o incapacitara a los pilotos, o hiciera los ataques inoperables. Durante la investigación surgió la necesidad previa de localizar a los aviones. En su informe, el comité concluyó que era incapaz de producir el "rayo de muerte", pero creía que la investigación daría lugar a un método de localización de los aviones. Los experimentos para el proyecto "Radio Detecting and Ranging" (RADAR) comenzaron en mayo, y solo un mes después ya se disponía de recorridos de hasta 39 millas de los aviones conocidos en la época.

  Tras varios experimentos de simulación, el superintendente de la estación de Bawdsey, *A.P. Rowe*, sugirió la creación de dos equipos para estudiar la investigación desde el punto de vista operativo, de ahí el nombre de la disciplina que nos ocupa. En el verano de 1939, los dos equipos se fusionaron bajo la dirección de *Harold Larnder* en la denominada Sección de Investigación Operativa de Stanmore.

  A pesar de que el carácter de "ciencia particular" de la Investigación Operativa se perfiló en esa época e incluso recibió su nombre por ser el adecuado a los trabajos que realizaba (análisis de operaciones militares), atendiendo al conjunto de problemas que forman su objetivo se llega a la conclusión de que esta disciplina tiene un origen más antiguo que puede situarse en los siglos XVIII, XIX y más concretamente a principios del siglo XX, cuando la pequeña industria evolucionó hacia la industria de gran escala como consecuencia directa de la mecanización de la producción.

Durante la Segunda Guerra Mundial, el desarrollo de la Investigación Operativa alcanzó un considerable grado de madurez tanto en los trabajos ingleses como en los estadounidenses, después de la entrada de Estados Unidos en la guerra; en particular, en la explotación de los nuevos equipos de radar, en la detección de barcos y submarinos enemigos, en la defensa contra los ataques de los aviones suicidas japoneses, etc.

En 1954, *F.N. Trefethen* dijo lo siguiente: "La participación que el conjunto de la Investigación Operativa tuvo en la victoria final de los aliados no puede medirse. Fue, sin embargo, una aportación muy especial de los aliados y parece no haber tenido rival ni contrapartida en las fuerzas enemigas. Representó una visión de la guerra antitética a la que tenía *Hitler*, poniendo conjuntamente a disposición del mando medida, control y análisis de operaciones complejas contra las acciones más románticas e inspiradas de las fuerzas del Eje".

- **Después de la Segunda Guerra Mundial**

  Tras la Segunda Guerra Mundial, los éxitos alcanzados por los grupos de Investigación Operativa hicieron posible que la industria considerase todos los aspectos del problema. Inglaterra reorganizó sus grupos y mediante una ley creó grupos de investigación en el Ministerio de Comercio, los cuales eran los encargados de aplicar a problemas industriales y comerciales los métodos científicos y estadísticos que, bajo el nombre de "Investigación Operativa", habían sido tan fructíferos durante la guerra.

  En 1946 se creó en Estados Unidos el proyecto "Research and Development" (RAND), que posteriormente se convirtió en la "Rand Corporation", con *G.B. Dantzig*, *Orchard-Hays*, *L.R. Ford*, *D.R. Fulkerson* y *D. Gale*; también se crearon el Departamento de Matemáticas de Princeton, con *A.W. Tucker* y *H.W. Kuhn*, y la "Graduate School of Industrial Administration", con *A. Charnes* y *G.C. Cooper*.

  En 1952 se creó en Estados Unidos la primera sociedad profesional de Investigación Operativa, "The Operations Research Society of America" (ORSA), que entonces comenzó a publicar la revista "Journal of the ORSA", actualmente denominada "Operations Research". En 1953 se creó "The Institute of Management Science" (TIMS), que publica la revista "Management Science".

En 1956 se creó en Italia el "Centro per la Ricerca Operativa", que publica el "Bolletino del Centro per la Ricerca Operativa".

En 1962 se creó en España la Sociedad de Estadística e Investigación Operativa, que comenzó a publicar la revista "Trabajos de Investigación Operativa", actualmente denominada "Top".

En 1975 se creó la "Association for European Operational Research Societies" (EURO), la cual está integrada en la "International Federation of Operational Research Societies" (IFORS) y publica la revista "European Journal of Operational Research" (EJOR).

1.1.2. Definiciones

Existen numerosas definiciones de "Investigación Operativa". Entre ellas destacan las siguientes:

- Operational Research Society (Inglaterra, 1948)

  "La Investigación Operativa es la aplicación del método científico a los complejos problemas que surgen en la dirección y gestión de grandes sistemas de hombres, máquinas, materiales y dinero, en Industria, Economía, Defensa, Farmacia, Sociología, Comercio, Administración, etc. El enfoque característico consiste en, incorporando medidas de factores tales como el azar y el riesgo, construir un modelo científico del sistema mediante el cual es posible predecir y comparar los resultados de las diferentes decisiones estratégicas. El objetivo es ayudar a los responsables a determinar de forma científica su política y acciones."

- Operations Research Society of America

  "La Investigación Operativa tiene por objeto ayudar a decidir, mediante el método científico, el diseño que optimiza el funcionamiento de sistemas hombre-máquina bajo condiciones que generalmente implican la utilización de recursos escasos."

- *A. Kaufmann* (1959)

  "La Investigación Operativa son las matemáticas de la organización." (Se entiende por fenómeno de organización a aquel que incluye relaciones activas entre hombres, máquinas y productos.)

- *J.G. Ecker* y *M. Kupferschmid* (1988)

  "La Investigación Operativa es el uso de modelos cuantitativos para analizar y predecir el comportamiento de sistemas que están influidos por decisiones humanas."

1.1.3. Metodología

La Investigación Operativa no es un método científico, ya que el método científico es único. La Ciencia es el conjunto de conocimientos generados por la aplicación del método científico a los fenómenos observados; lo que distingue a una ciencia de otra es el tipo de fenómenos que estudian. La Investigación Operativa estudia problemas en los que intervienen sistemas humanos con recursos humanos y/o materiales que están sujetos a decisiones humanas.

El desarrollo de un problema de Investigación Operativa consta de las siguientes fases:

1) <u>Formulación del problema</u>

   Generalmente, al equipo de Investigación Operativa se le plantea el problema de una manera vaga e imprecisa. Por ello, en primer lugar se deben determinar los objetivos que se desea conseguir y describir las posibles decisiones a tomar.

   Es importante la colaboración entre el cliente y el equipo de Investigación Operativa, para que éste pueda observar el problema desde el mismo nivel que aquél y encuadrarlo adecuadamente en un contexto global.

2) <u>Construcción del modelo</u>

   Consiste en representar el problema mediante un modelo matemático.

   Hay que identificar las *variables de decisión*, la *función objetivo*, las *restricciones* y los *parámetros* del modelo (si no se conoce con exactitud el valor de los parámetros, será necesario estimarlos de alguna forma).

   Pueden existir diversos modelos matemáticos para representar un mismo problema.

   Al construir un modelo, es recomendable comenzar con una versión sencilla del problema e ir construyendo sucesivamente modelos más elaborados hasta que se consiga representar de manera adecuada el problema real (si el problema es muy complejo, los modelos matemáticos que lo representan podrían ser inmanejables, por lo que podría ser necesario recurrir a aproximaciones y simplificaciones).

3) Obtención de una solución

Consiste en, entre todas las posibles decisiones, escoger aquella que mejor se adapte a los objetivos del cliente. En numerosas ocasiones esta es la fase más rápida y sencilla (si se dispone del algoritmo y del "software" adecuados).

La situación ideal sería determinar una *solución óptima*, es decir, la mejor. Aun en el caso de que sea posible obtenerla, ésta puede no ser óptima para el problema real si el modelo utilizado no lo representa fielmente. En otros casos, la obtención de una solución óptima puede requerir demasiado tiempo, por lo que habrá que limitarse a determinar una solución lo suficientemente buena que verifique unos requisitos mínimos establecidos (los procedimientos que se utilizan para ello se denominan *heurísticas*).

En ocasiones es importante no dar una única solución, aunque sea óptima, sino un abanico de buenas soluciones.

Cuando no ha sido posible estimar los parámetros del modelo con mucha precisión o cuando dichos parámetros van a ir variando con el tiempo, es necesario realizar un *análisis de sensibilidad* con objeto de estudiar el comportamiento de la solución considerando como posibles valores de los parámetros un entorno de los valores que se están considerando actualmente.

4) Verificación del modelo

Se trata de determinar si el modelo propuesto proporciona predicciones razonables del comportamiento del sistema bajo estudio.

A pesar de que el modelo pueda parecer correcto, es posible que se hayan cometido errores al estimar los parámetros, que no se haya considerado alguna restricción, que haya sido necesario simplificar demasiado el modelo para hacerlo manejable, . . .

Hay que comprobar que la solución obtenida tiene sentido.

Si se dispone de datos históricos, una forma de comprobar la validez del modelo es comparar los resultados que se han obtenido con los obtenidos en ocasiones anteriores. El modelo puede considerarse válido si, bajo condiciones iniciales similares, se obtienen resultados también similares.

Si no se dispone de datos históricos, una opción es recurrir al uso de la simulación para comprobar la validez del modelo.

5) Puesta en práctica de la solución

   Es la culminación del trabajo realizado. El equipo de Investigación Operativa ha de explicar al cliente el significado de la solución o soluciones obtenidas.

1.1.4. Técnicas

Los problemas que aborda la Investigación Operativa pueden agruparse en base a características comunes, lo cual da lugar a los denominados *modelos* de Investigación Operativa. En la resolución de problemas de los diversos modelos se utilizan distintas técnicas o procedimientos, entre los que cabe destacar la programación matemática (lineal, entera, no lineal, dinámica, ...), la optimización en redes, la simulación, la optimización multicriterio, etc.

1.2. Modelos clásicos (asignación, inventarios, colas, juegos, ...)

Una de las formas más clarificadoras de comprender una disciplina científica es poseer una visión global de los tipos de problemas que ésta aborda. A continuación se presentan algunos de los modelos clásicos de Investigación Operativa.

1.2.1. Asignación y distribución de recursos

Este tipo de problemas se caracteriza por la existencia de un cierto número de tareas a realizar, para lo cual se dispone de unos determinados recursos. En general, las tareas pueden llevarse a cabo de distintas formas exigiendo cantidades y combinaciones distintas de los recursos, ciertas formas de efectuar las tareas son mejores que otras y no existen recursos suficientes para realizarlas todas de la mejor forma. El problema consiste en distribuir los recursos entre las tareas de modo que, en su conjunto, el resultado sea lo mejor posible (por ejemplo, que el coste total sea mínimo o que el beneficio neto sea máximo).

Si la realización de cada tarea únicamente requiere una unidad de un recurso y existen tantas tareas como recursos, se dice que el problema es de *asignación* (por ejemplo, asignación de personas a puestos de trabajo). Si las tareas requieren más de una unidad de los recursos y éstos pueden utilizarse en varias tareas, se dice que el problema es de *transporte*. Si los recursos y las tareas se miden en escalas de diferente valor, se dice que el problema es de *producción*.

Otra categoría se presenta cuando hay más tareas de las que es posible realizar con los recursos: selección de proyectos, elección de productos a fabricar, distribución del presupuesto, etc.

Otra posibilidad es que se permita añadir o eliminar algunas tareas: localización de servicios, redistribución, etc.

Ejemplo 1.1 (**Problema de programación lineal continua**). *Una fábrica produce dos tipos de cerveza: rubia y negra. El precio de venta de cada kilolitro de cerveza rubia y negra es, respectivamente, de 300 y 180 euros. El coste de la materia prima adecuada para elaborar cada kilolitro de cerveza rubia y negra es, respectivamente, de 30 y 12 euros. Además, para producir cada kilolitro de cerveza rubia y negra se requiere, respectivamente, que ciertas máquinas estén en funcionamiento durante 3 y 5 horas. Sabiendo que semanalmente la fábrica dispone de un presupuesto de 60 euros y de 15 horas en las que las máquinas pueden estar en funcionamiento, modelizar el problema a resolver para determinar qué cantidad debe producirse de cada tipo de cerveza con objeto de maximizar el beneficio neto que se obtendrá con su venta.*

Ejemplo 1.2 (**Problema de programación lineal entera**). *Se dispone de cinco tipos distintos de mercancías y de un único envase (caja, barco, vehículo, ...) en el que transportarlas. Cada unidad de mercancía es indivisible. La siguiente tabla contiene el peso, el volumen y el valor unitario de cada tipo de mercancía (expresado en ciertas unidades de medida):*

Tipo	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Peso	*5*	*8*	*3*	*2*	*7*
Volumen	*1*	*8*	*6*	*5*	*4*
Valor	*4*	*7*	*5*	*6*	*4*

Sabiendo que los límites del envase son de 112 unidades de peso y 109 de volumen, modelizar el problema a resolver para determinar qué cantidad ha de transportarse de cada tipo de mercancía con objeto de maximizar el valor total de la carga.

Ejemplo 1.3 (Problema de asignación). *Una editorial desea vender cuatro enciclopedias a cuatro clientes. Para ello, contrata a cuatro vendedores que trabajan a comisión y cobran unas dietas por transporte proporcionales a la distancia entre su domicilio y el del cliente. La siguiente tabla contiene dichas distancias (expresadas en kilómetros):*

Cliente

Vendedor		1	2	3	4
	1	5	3	7	2
	2	1	4	3	1
	3	8	8	7	15
	4	2	5	3	4

Sabiendo que cada vendedor solo puede visitar a un cliente y que hay que asignar un único vendedor a cada cliente, modelizar el problema a resolver para minimizar el coste de la contratación de los vendedores.

Ejemplo 1.4 (Problema de transporte). *Una empresa de automóviles dispone de tres fábricas y dos centros de distribución. Las fábricas están situadas en Portugal, Grecia e Italia, y poseen una capacidad mensual de producción de 1000, 1500 y 1200 automóviles respectivamente. Los centros de distribución están situados en España y Francia, y poseen una demanda mensual de 1400 y 2300 automóviles respectivamente. El coste de transporte en tren de cada automóvil es de 0,75 euros por kilómetro recorrido. La siguiente tabla contiene las distancias entre las fábricas y los centros de distribución (expresadas en kilómetros):*

Centro de distribución

Fábrica		España	Francia
	Portugal	1000	2690
	Grecia	2250	2350
	Italia	1275	850

Modelizar el problema a resolver para determinar el número de automóviles que deben enviarse desde cada fábrica hasta cada centro de distribución de forma que se satisfaga la demanda y que el coste total del transporte sea lo menor posible.

Ejemplo 1.5 (**Problema de programación no lineal**). *Una empresa que se dedica a la comercialización de cereales desea importar 500000 toneladas de trigo para abastecer el mercado nacional. Los posibles vendedores son Centroamérica, Argentina, Australia y Sudáfrica, y sus precios de venta (expresados en una cierta unidad monetaria) dependiendo de la cantidad* x *de trigo adquirido vienen dados, respectivamente, por las funciones* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ *y* φ_4*:*

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 5000 + 4{,}5x & si \;\; 0 \leq x \leq 10000 \\ 35000 + 1{,}5x & si \;\; x \geq 10000 \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 15000 + 4x & si \;\; 0 \leq x \leq 8000 \\ 39000 + x & si \;\; x \geq 8000 \end{cases}$$

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} 25000 + 1{,}25x & si \;\; 0 \leq x \leq 12000 \\ 40000 + 10\sqrt{x - 12000} & si \;\; x \geq 12000 \end{cases}$$

$$\varphi_4(x) = \begin{cases} 10000 + 2{,}5x & si \;\; 0 \leq x \leq 4000 \\ 5x & si \;\; 4000 \leq x \leq 8000 \\ 20000 + 2{,}5x & si \;\; 8000 \leq x \leq 12000 \\ 32000 + 1{,}5x & si \;\; x \geq 12000 \end{cases}$$

Modelizar el problema a resolver para determinar qué cantidad de trigo ha de comprar la empresa a cada vendedor con objeto de minimizar el coste total.

Ejemplo 1.6 (**Problema de distribución de recursos de búsqueda**). *Dados un objeto y* n *lugares distintos, para cada* $j \in \{1, \ldots, n\}$ *sea* $p_j > 0$ *la probabilidad de que el objeto se encuentre en el lugar* j *(se verifica que* $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$*). Se dispone de una cantidad* R *de un determinado recurso para buscar el objeto. Si se dedica una cantidad* x *del recurso a buscar el objeto en un lugar* $j \in \{1, \ldots, n\}$*, la probabilidad de encontrarlo condicionada a que el objeto se halle en ese lugar, es* $1 - e^{-\alpha_j x}$*, donde* $\alpha_j > 0$ *es un indicador de la dificultad de búsqueda en el lugar* j *(cuanto más fácil sea la búsqueda en* j*, mayor será* α_j*).*

Modelizar el problema a resolver para determinar de qué modo debe distribuirse el recurso entre los n *lugares de forma que se maximice la probabilidad de encontrar el objeto.*

Ejemplo 1.7 (**Problema de localización de servicios**). *Se dispone de n lugares potenciales en los que construir almacenes para un determinado producto. Desde estos lugares ha de atenderse la demanda de m clientes. Sea f_j el coste de construir un almacén en el lugar $j \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}$.*

1. *Modelizar el problema a resolver para determinar en qué lugares deben construirse los almacenes y de qué forma ha de satisfacerse la demanda de los clientes con objeto de minimizar el coste total, suponiendo que c_{ij} es el coste de satisfacer la demanda total del cliente i desde el lugar $j \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}, \forall j \in \{1, \ldots, n\}$.*

2. *Modelizar el problema anterior suponiendo que cada lugar $j \in \{1, \ldots, n\}$ posee capacidad para almacenar b_j unidades del producto, que la demanda de cada cliente $i \in \{1, \ldots, m\}$ es de a_i unidades del producto y que c_{ij} es el coste de servir cada unidad del producto al cliente i desde el lugar j.*

1.2.2. Inventarios

En términos generales, un *inventario* es un conjunto de recursos útiles que se encuentran temporalmente ociosos. Este tipo de problemas surge siempre que deban mantenerse almacenados uno o varios productos en espera de atender la posible demanda de los mismos. El objetivo es determinar el *nivel de inventario* (es decir, la cantidad almacenada de cada producto) en cada instante, de forma que se minimicen los costes asociados.

Los problemas de inventarios pueden clasificarse en *deterministas* o *aleatorios*, dependiendo de que la demanda sea o no conocida. Otro tipo de clasificación tiene en cuenta la forma de revisión del inventario: *revisión continua* si los pedidos se realizan cuando el nivel de inventario baja de una cierta cantidad, o *revisión periódica* si los pedidos únicamente pueden realizarse a intervalos discretos de tiempo.

Ejemplo 1.8 (**Demanda constante y conocida; revisión continua**). *Se considera un único producto, del cual hay una demanda de una cantidad a (conocida) por unidad de tiempo. Se sabe que el coste en el que se incurre cada vez que se realiza un pedido es de K unidades monetarias, el coste unitario del producto es de c unidades monetarias y el coste de almacenamiento de cada unidad del producto es de h unidades monetarias por unidad de tiempo.*

1. *Determinar la cantidad Q del producto que ha de encargarse en cada pedido suponiendo que no se permite la falta de existencias en ningún momento.*

2. *Determinar la cantidad Q del producto que ha de encargarse en cada pedido suponiendo que se permite la falta de existencias y que el coste de no satisfacer a tiempo cada unidad demandada del producto es de r unidades monetarias por unidad de tiempo.*

Ejemplo 1.9 (**Problema de producción-inventario**). *Una fábrica elabora un determinado producto, y sabe que la demanda del mismo durante los próximos n meses será $a_1, \ldots, a_n$. Su capacidad de producción está limitada a P unidades mensuales. Actualmente la fábrica dispone de una cantidad I_0 del producto almacenada, y el coste mensual de almacenamiento de cada unidad del producto es de h unidades monetarias.*

1. *Modelizar el problema a resolver para determinar la cantidad del producto que ha de elaborar la fábrica durante los próximos n meses suponiendo que la demanda debe ser satisfecha en el momento en que se produce.*

2. *Modelizar el problema a resolver para determinar la cantidad del producto que ha de elaborar la fábrica durante los próximos n meses suponiendo que el coste mensual de no satisfacer a tiempo cada unidad demandada del producto es de r unidades monetarias.*

1.2.3. Colas

Los problemas de colas se plantean cuando determinados clientes demandan un cierto servicio y no pueden ser atendidos simultáneamente, lo cual origina una cola de espera. Por ejemplo, este tipo de problemas surge en las redes telefónicas, centros comerciales, sucursales bancarias, gasolineras, urgencias médicas, etc.

Los gestores del servicio desean determinar el número de unidades de servicio que deben ofrecer con objeto de que el tiempo de espera de los clientes sea aceptable. Hay que buscar un punto intermedio entre una prestación ágil del servicio (con un número elevado de servidores y el consiguiente coste) y una prestación con un número escaso de servidores (con la correspondiente pérdida de clientes y prestigio).

Las características principales mediante las que es posible describir un modelo de colas son las siguientes:

1. Llegadas de los clientes

   En el proceso de llegadas se considera principalmente el número medio de llegadas por unidad de tiempo y el tiempo medio entre dos llegadas consecutivas. También hay que tener en cuenta si en el instante en que comienza a prestarse el servicio hay clientes en la cola o no.

   Se distinguen dos tipos de llegadas: *determinista*, si se conocen los instantes en los que se producen las llegadas de los clientes; *aleatorio*, si no se conocen con exactitud.

   El proceso de llegadas se denomina *estacionario* si no varía con el tiempo, y *no estacionario* en caso contrario.

2. Servicios

   Los tiempos de servicio a los clientes pueden ser de dos tipos: *determinista*, si el tiempo de servicio es constante; *aleatorio*, si no lo es.

   Hay que tener en cuenta el número de unidades de servicio y si el proceso de tiempos de servicio es *estacionario* o *no estacionario*.

3. Colas

   Los principales factores a considerar son si hay una única cola para acceder a todos los servidores o si hay varias, si hay clientes que abandonan la cola después de permanecer un tiempo en espera sin ser atendidos, y si la capacidad de la cola es limitada o ilimitada.

   La disciplina de la cola puede ser de varios tipos:

   - FIFO (first in, first out): primero en llegar, primero en ser servido.
   - LIFO (last in, first out): último en llegar, primero en ser servido.
   - SIRO (service in random order): servicio en orden aleatorio.
   - PRI (priority): servicio por orden de prioridad.

1.2.4. Conflicto o competencia: Teoría de Juegos

Cotidianamente se dan numerosas situaciones de conflicto o competencia en las que se encuentran involucrados dos o más adversarios: juegos de mesa, competiciones deportivas, combates, campañas electorales, campañas publicitarias, etc. La *Teoría de Juegos* estudia este tipo de problemas.

A los adversarios se les denomina *jugadores*. Las estrategias adoptadas por cada jugador interactúan con las del resto de los jugadores. Cada jugador posee unos objetivos, que pueden ser total o parcialmente opuestos a los de los demás jugadores.

Los juegos pueden clasificarse en *cooperativos* o *no cooperativos*, dependiendo de que los jugadores establezcan o no acuerdos entre ellos.

Ejemplo 1.10 (Juego de suma nula). *Dos políticos P_1 y P_2 pertenecientes a partidos de ideologías similares han de decidir de forma independiente en qué ciudades van a celebrar sus mítines los dos últimos días de la campaña electoral. Ambos pueden elegir entre tres posibles estrategias:*

1. *Pasar un día en Madrid y otro en Barcelona.*

2. *Pasar los dos días en Madrid.*

3. *Pasar los dos días en Barcelona.*

Se supone que todas las personas que acudirán a los mítines votarán a uno de los dos partidos y que, en consecuencia, todos los votos que gane un partido los perderá el otro. La siguiente tabla contiene los millares de votos que ganará el partido de P_1 en función de las decisiones de ambos políticos:

P_2

P_1		*Estrategia 1*	*Estrategia 2*	*Estrategia 3*
	Estrategia 1	*1*	*2*	*4*
	Estrategia 2	*1*	*0*	*5*
	Estrategia 3	*0*	*1*	*-1*

¿Qué estrategias deben adoptar los políticos?

Ejemplo 1.11 (Dilema del prisionero). *Dos delincuentes son detenidos y acusados de haber cometido un delito conjuntamente. Ambos están incomunicados y deben decidir si delatan o no al otro. Si se delatan mutuamente, cada uno irá 15 años a la cárcel. Si uno delata y el otro no, el delator quedará libre y el delatado irá 20 años a la cárcel. Si ninguno de los dos delata al otro, se les acusará de un delito menor y cada uno irá un año a la cárcel. ¿Qué decisión han de tomar los delincuentes?*

1.2.5. Grafos y redes

Un *grafo dirigido* o *digrafo* es un par $G = (V, U)$, donde V es un conjunto no vacío cuyos elementos se denominan *vértices* o *nodos* y $U \subseteq V \times V$ es un conjunto de pares ordenados de vértices llamados *arcos*.

Un *grafo no dirigido* o, simplemente, *grafo* es un par $G = (V, E)$, donde V es un conjunto no vacío cuyos elementos se denominan *vértices* o *nodos* y $E \subseteq V \times V$ es un conjunto de pares no ordenados de vértices llamados *aristas*.

Ejemplo 1.12 (Puentes de Königsberg). *En el siglo XVIII la ciudad de Königsberg estaba dividida en cuatro partes por el río Pregel, las cuales estaban conectadas mediante siete puentes. Euler planteó el problema de cruzar cada puente exactamente una vez y regresar de nuevo al punto de partida.*

Una *red* o *grafo valorado* es un par $R = (G, c)$, donde G es un digrafo o un grafo y c es una función numérica definida sobre el conjunto de arcos o aristas de G.

Algunos problemas clásicos de Teoría de Grafos son los siguientes:

- Problema del recorrido euleriano

  Dado un grafo, se trata de determinar una ruta que recorra exactamente una vez cada arista.

- Problema del recorrido de un laberinto

  Dado un grafo, se trata de determinar una ruta que recorra al menos una vez cada arista y regrese al punto de partida.

- Problema del recorrido hamiltoniano

  Dado un grafo o un digrafo, se trata de determinar una ruta que pase exactamente una vez por cada vértice.

- Problema del camino más corto

  Dada una red dirigida en la que las cantidades $c(u)$ representan la longitud de los arcos u, se trata de determinar un camino desde un vértice hasta otro cuya longitud sea lo menor posible.

- Problema del cartero chino

  Dada una red no dirigida en la que las cantidades $c(e)$ representan la longitud de las aristas e, se trata de determinar una ruta que recorra al menos una vez cada arista y cuya longitud total sea lo menor posible.

- Problema del viajante

  Dadas n ciudades, partiendo de la ciudad 1 un agente comercial debe visitar exactamente una vez las ciudades $2, \ldots, n$ y regresar a la ciudad 1. Se desea determinar una ruta que minimice la duración del viaje.

- Problemas de rutas de vehículos

  Una empresa dispone de una flota de vehículos mediante la cual debe abastecer a sus clientes de un determinado producto. Se trata de determinar una ruta para cada vehículo de la flota de forma que todos los clientes sean servidos y el coste total del transporte sea lo menor posible.

  En general, habrá que considerar la capacidad de los vehículos, precedencias entre los clientes, intervalos de tiempo en los que el producto debe ser recibido por los clientes, etc.

- Problema de flujo máximo

  Dada una red dirigida en la que las cantidades $c(u)$ representan la capacidad de los arcos u, y dados un vértice origen (es decir, un vértice hasta el cual no llega ningún arco) y un vértice destino (es decir, un vértice desde el cual no parte ningún arco), se trata de enviar la mayor cantidad posible de flujo desde el vértice origen hasta el destino a través de los arcos del grafo, respetando las restricciones de capacidad.

- Problema de flujo con coste mínimo

  Dada una red dirigida en la que las cantidades $c(u)$ representan la capacidad de los arcos u y, además, cada arco tiene asociado un coste por cada unidad de flujo que lo atraviesa, y dados un vértice origen y un vértice destino, se trata de enviar una cantidad determinada de flujo desde el vértice origen hasta el destino de forma que se respeten las restricciones de capacidad de los arcos y el coste total del envío sea lo menor posible.

1.2.6. Planificación

En los proyectos a gran escala se deben planificar, programar y coordinar numerosas actividades interrelacionadas.

Si se conoce la duración exacta de cada actividad, generalmente el objetivo será determinar en qué instante debe comenzar a realizarse cada actividad de forma que el proyecto esté finalizado lo antes posible. En este caso, se aplicará el *método CPM (Critical Path Method)*. Dicho método también puede utilizarse para determinar cuánto puede retrasarse el comienzo de cada actividad sin retrasar la finalización del proyecto.

Si no se conoce con exactitud la duración de las actividades, generalmente el objetivo será calcular la probabilidad de que el proyecto esté finalizado en la fecha límite impuesta por el cliente. Para ello, se aplicará el *método PERT (Program Evaluation and Review Technique)*.

Un proyecto puede representarse gráficamente mediante una red, denominada *red del proyecto* o *diagrama del proyecto*.

En general, dado el conjunto de actividades que componen el proyecto, para cada actividad existirá un subconjunto de actividades (denominadas *predecesores*) que deberán estar finalizadas antes de comenzar a realizar dicha actividad.

En la red del proyecto, cada actividad estará representada por un único arco, que tendrá asociada la duración de esa actividad. Los vértices representarán la finalización de un subconjunto de actividades. No se permite que haya más de un arco que una dos vértices.

Ejemplo 1.13. *Una fábrica va a comenzar a elaborar un nuevo producto P. Para elaborar una unidad de dicho producto, deberá ensamblar una unidad de un producto Q y una unidad de otro producto R. A su vez, antes de poder comenzar a elaborar los productos Q y R, los trabajadores de la fábrica deberán asistir a un cursillo de aprendizaje, y se deberá disponer de una cierta materia prima. Finalmente, antes de ensamblar los productos Q y R, deberá comprobarse que la calidad del producto R es lo suficientemente alta.*

1.2.7. Secuenciación

Se dispone de un conjunto de máquinas para realizar un conjunto de tareas entre las que hay relaciones de precedencia. Se desea determinar en qué orden debe realizar cada máquina las tareas de forma que se consiga un cierto objetivo como, por ejemplo, finalizar todas las tareas en el menor tiempo posible.

Ejemplo 1.14. *Una fábrica de muebles ha recibido un pedido de tres sofás A, B y C. La fabricación de los sofás se realiza en dos etapas: en primer lugar, un carpintero construye el armazón y, posteriormente, un tapicero lo tapiza. La fábrica únicamente dispone de un carpintero y de un tapicero, y se supone que cuando están trabajando en un sofá no pueden interrumpir su trabajo para comenzar a trabajar en otro sofá.*

La siguiente tabla contiene el número de días que el carpintero y el tapicero le tienen que dedicar a cada sofá:

	Carpintero	*Tapicero*
A	*4*	*9*
B	*2*	*4*
C	*5*	*3*

Se desea determinar en qué orden deben trabajar el carpintero y el tapicero con objeto de finalizar los tres sofás en el menor tiempo posible.

1.2.8. Fiabilidad

En términos generales, la *fiabilidad* de un sistema se define como la probabilidad de que dicho sistema funcione correctamente durante un periodo de tiempo dado.

Si un sistema consta de n componentes, se definen las variables aleatorias

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i\text{-ésima componente funciona correctamente} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

La *función de estructura* asociada al sistema es

$$\varphi(y_1, \dots, y_n) = \begin{cases} 1 & \text{si el sistema funciona correctamente} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así, la fiabilidad del sistema es la función $P(\varphi(y_1, \dots, y_n) = 1)$.