CICLO EN EL ALGORITMO DEL SÍMPLEX

El siguiente problema de programación lineal fue proporcionado por Beale para demostrar que el algoritmo del símplex puede realizar infinitas iteraciones:

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & z = -\tfrac{3}{4}x_4 + 20x_5 - \tfrac{1}{2}x_6 + 6x_7 \\
\text{sujeto a:} \quad & x_1 + \tfrac{1}{4}x_4 - 8x_5 - x_6 + 9x_7 = 0 \\
& x_2 + \tfrac{1}{2}x_4 - 12x_5 - \tfrac{1}{2}x_6 + 3x_7 = 0 \\
& x_3 + x_6 = 1 \\
& x_1, \dots, x_7 \geq 0
\end{aligned}
$$

Criterio de entrada en la base:

Entra una variable x_{N_k} tal que $k = \operatorname{argmáx}\{z_{N_j} - c_{N_j} \mid j \in \{1, \dots, n-m\} \text{ con } z_{N_j} - c_{N_j} > 0\}$.

Criterio de salida de la base:

Sale la variable $x_{B_{l^*}}$ tal que $l^* = \text{mín}\left\{ l \mid \frac{\overline{x}_{B_l}}{y_{l,N_k}} = \text{mín}\left\{ \frac{\overline{x}_{B_i}}{y_{i,N_k}} \mid i \in \{1, \dots, m\} \text{ con } y_{i,N_k} > 0 \right\} \right\}$.

Tabla 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
	0	0	0	$\frac{3}{4}$	-20	$\frac{1}{2}$	-6	0	
x_1	1	0	0	$\mathbf{\frac{1}{4}}$	-8	-1	9	0	$\rightarrow$
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-12	$-\frac{1}{2}$	3	0	
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1	
				$\uparrow$					

Tabla 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
	-3	0	0	0	4	$\frac{7}{2}$	-33	0	
x_4	4	0	0	1	-32	-4	36	0	
x_2	-2	1	0	0	$\mathbf{4}$	$\frac{3}{2}$	-15	0	$\rightarrow$
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1	
					$\uparrow$				

Tabla 3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
	-1	-1	0	0	0	2	-18	0	
x_4	-12	8	0	1	0	$\mathbf{8}$	-84	0	$\rightarrow$
x_5	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1	$\frac{3}{8}$	$-\frac{15}{4}$	0	
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1	
						$\uparrow$			

Tabla 4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
	2	-3	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	3	0	
x_6	$-\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{8}$	0	1	$-\frac{21}{2}$	0	
x_5	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{8}$	0	$-\frac{3}{64}$	1	0	$\mathbf{\frac{3}{16}}$	0	$\rightarrow$
x_3	$\frac{3}{2}$	-1	1	$-\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{21}{2}$	1	
							$\uparrow$		

<u>Tabla 5</u>

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
	1	-1	0	$\frac{1}{2}$	-16	0	0	0	
x_6	$\mathbf{2}$	-6	0	$-\frac{5}{2}$	56	1	0	0	$\rightarrow$
x_7	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{16}{3}$	0	1	0	
x_3	-2	6	1	$\frac{5}{2}$	-56	0	0	1	
	$\uparrow$								

<u>Tabla 6</u>

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
	0	2	0	$\frac{7}{4}$	-44	$-\frac{1}{2}$	0	0	
x_1	1	-3	0	$-\frac{5}{4}$	28	$\frac{1}{2}$	0	0	
x_7	0	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	0	$\frac{1}{6}$	-4	$-\frac{1}{6}$	1	0	$\rightarrow$
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1	
		$\uparrow$							

<u>Tabla 7</u>

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
	0	0	0	$\frac{3}{4}$	-20	$\frac{1}{2}$	-6	0
x_1	1	0	0	$\frac{1}{4}$	-8	-1	9	0
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-12	$-\frac{1}{2}$	3	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1

La tabla 7 es igual que la tabla 1, luego el algoritmo del símplex ha entrado en un ciclo.

REGLA LEXICOGRÁFICA

Tabla 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
	0	0	0	$\frac{3}{4}$	-20	$\frac{1}{2}$	-6	0	
x_1	1	0	0	$\frac{1}{4}$	-8	-1	9	0	
x_2	0	1	0	$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$	-12	$-\frac{1}{2}$	3	0	$\rightarrow$
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1	
				$\uparrow$					

Tabla 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
	0	$-\frac{3}{2}$	0	0	-2	$\frac{5}{4}$	$-\frac{21}{2}$	0	
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	-2	$-\frac{3}{4}$	$\frac{15}{2}$	0	
x_4	0	2	0	1	-24	-1	6	0	
x_3	0	0	1	0	0	$\mathbf{1}$	0	1	$\rightarrow$
						$\uparrow$			

Tabla 3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{4}$	0	-2	0	$-\frac{21}{2}$	$-\frac{5}{4}$
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	0	-2	0	$\frac{15}{2}$	$\frac{3}{4}$
x_4	0	2	1	1	-24	0	6	1
x_6	0	0	1	0	0	1	0	1

La única solución óptima es $\boldsymbol{x}^* = (\frac{3}{4} \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0)^t$, y el valor óptimo de la función objetivo es $z^* = -\frac{5}{4}$.

REGLA DE BLAND

Se considera el siguiente orden para las variables: $x_1, \dots, x_7$

Las tablas 1, 2 y 3 no varían.

Tabla 4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
	2	-3	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	3	0	
x_6	$-\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{8}$	0	1	$-\frac{21}{2}$	0	
x_5	$\mathbf{\frac{1}{16}}$	$-\frac{1}{8}$	0	$-\frac{3}{64}$	1	0	$\frac{3}{16}$	0	$\rightarrow$
x_3	$\frac{3}{2}$	-1	1	$-\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{21}{2}$	1	
	$\uparrow$								

Tabla 5

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
	0	1	0	$\frac{5}{4}$	-32	0	-3	0	
x_6	0	-2	0	-1	24	1	-6	0	
x_1	1	-2	0	$-\frac{3}{4}$	16	0	3	0	
x_3	0	$\mathbf{2}$	1	1	-24	0	6	1	$\rightarrow$
		$\uparrow$							

Tabla 6

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	-20	0	-6	$-\frac{1}{2}$	
x_6	0	0	1	0	0	1	0	1	
x_1	1	0	1	$\frac{1}{4}$	-8	0	9	1	
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	-12	0	3	$\frac{1}{2}$	$\rightarrow$
				$\uparrow$					

Tabla 7

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{4}$	0	-2	0	$-\frac{21}{2}$	$-\frac{5}{4}$
x_6	0	0	1	0	0	1	0	1
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	0	-2	0	$\frac{15}{2}$	$\frac{3}{4}$
x_4	0	2	1	1	-24	0	6	1

La única solución óptima es $\boldsymbol{x}^* = (\frac{3}{4} \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0)^t$, y el valor óptimo de la función objetivo es $z^* = -\frac{5}{4}$.