Tema 2

Programación lineal

2.1. Introducción

La programación lineal estudia la optimización (es decir, minimización o maximización) de una función lineal cuyas variables deben satisfacer un conjunto de restricciones lineales de igualdad y/o desigualdad no estricta. Así, un **problema de programación lineal (continua)** puede expresarse de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar o Maximizar} & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\ \text{sujeto a:} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \sim b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \sim b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \sim b_m \\ & x_j \in \mathbb{R} \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}, \end{array}$$

donde $n, m \in \mathbb{N}$, $\{c_j\}_{j\in\{1,\ldots,n\}}$, $\{a_{ij}\}_{i\in\{1,\ldots,m\},\, j\in\{1,\ldots,n\}}$ y $\{b_i\}_{i\in\{1,\ldots,m\}}$ son números reales conocidos y, para cada restricción, "$\sim$" puede ser "$=$", "$\leq$" o "$\geq$".

La función $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ se denomina **función objetivo** (o **función criterio**), y suele denotarse por z, y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las **variables de decisión** (o **variables**, o **variables estructurales**, o **niveles de actividad**).

Una restricción de la forma $x_j \geq 0$, donde $j \in \{1, \ldots, n\}$, se llama **restricción de no negatividad**.

Un conjunto de valores reales de las variables $x_1, \ldots, x_n$ que satisface todas las restricciones se denomina **solución factible** del problema. El conjunto de todas las soluciones factibles es la **región factible** del problema. Si la región factible es vacía, se dice que el problema es **infactible**; en otro caso, se dice que el problema es **factible**.

Se dice que una solución factible $\begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}$ es una **solución óptima** del problema si para toda solución factible $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ se verifica que $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \leq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ si el problema es de minimización, o que $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ si el problema es de maximización.

Un problema de programación lineal está escrito en **forma estándar** si está expresado de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar o Maximizar} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{sujeto a:} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\} \\ & x_j \geq 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\} \end{array}$$

Un problema de programación lineal está escrito en **forma canónica** si está expresado de una de las dos siguientes formas:

$$\begin{array}{ll|ll} \text{Minimizar} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \text{Maximizar} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{sujeto a:} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\} & \text{sujeto a:} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\} \\ & x_j \geq 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\} & & x_j \geq 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\} \end{array}$$

2.2. Convexidad. Puntos extremos y direcciones extremas. Soluciones básicas

2.2.1. Convexidad. Conceptos básicos

El concepto de convexidad es de gran importancia en el estudio de problemas de programación matemática.

Definición 2.1. *Un conjunto $S \subseteq I\!R^n$ es* ***convexo*** *si $\forall \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in S$ se verifica que $\lambda \boldsymbol{x_1} + (1-\lambda)\boldsymbol{x_2} \in S$ $\forall \lambda \in [0,1]$.*

Lema 2.1. *Sean $S_1, S_2 \subseteq I\!R^n$ conjuntos convexos. Entonces $S_1 \cap S_2$ es un conjunto convexo.*

Definición 2.2. *Dado un conjunto $S \subseteq I\!R^n$, la* ***envoltura convexa*** *de S es el conjunto $H(S)$ de todas las combinaciones lineales convexas de puntos de S, es decir,*

$$H(S) = \left\{ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, \boldsymbol{x_j} \mid k \in I\!N,\ \boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_k} \in S,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0,\ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 \right\}.$$

Lema 2.2. *Sea $S \subseteq I\!R^n$. Entonces $H(S)$ es un conjunto convexo.*

Definición 2.3. *Un* ***politopo*** *en $I\!R^n$ es la envoltura convexa de un número finito de puntos $\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_{k+1}} \in I\!R^n$, donde $k \in I\!N$. Si los vectores $\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_{k+1}} - \boldsymbol{x_1}$ son linealmente independientes, la envoltura convexa de $\{\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_{k+1}}\}$ se denomina* ***símplex*** *en $I\!R^n$ de vértices $\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_{k+1}}$.*

Se observa que un símplex en $I\!R^n$ tiene a lo sumo $n+1$ vértices.

Definición 2.4. *Un* ***hiperplano*** *en $I\!R^n$ es un conjunto de la forma $H = \{\boldsymbol{x} \in I\!R^n \mid \boldsymbol{p}^t\boldsymbol{x} = \alpha\}$, donde $\boldsymbol{p} \in I\!R^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ y $\alpha \in I\!R$. Un hiperplano H define dos* ***semiespacios*** *cerrados*

$$H^{\geq} = \{\boldsymbol{x} \in I\!R^n \mid \boldsymbol{p}^t\boldsymbol{x} \geq \alpha\} \text{ y } H^{\leq} = \{\boldsymbol{x} \in I\!R^n \mid \boldsymbol{p}^t\boldsymbol{x} \leq \alpha\}.$$

Lema 2.3. *Sea H un hiperplano. Entonces H, $H^{\geq}$ y $H^{\leq}$ son conjuntos convexos.*

Definición 2.5. *Un* ***poliedro*** *en $I\!R^n$ es la intersección de un número finito de semiespacios cerrados en $I\!R^n$.*

De los Lemas 2.1 y 2.3 se deduce que todo poliedro es un conjunto convexo.

2.2.2. Puntos extremos y direcciones extremas. Teorema de representación

Definición 2.6. *Sea $S \subseteq I\!R^n$ un conjunto convexo no vacío. Un punto $\boldsymbol{x} \in S$ es un* ***punto extremo*** *de S si $\boldsymbol{x} = \lambda\, \boldsymbol{x_1} + (1-\lambda)\boldsymbol{x_2}$ implica que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{x_2}$, donde $\lambda \in (0,1)$ y $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in S$.*

Definición 2.7. *Sea $S \subseteq I\!R^n$ un conjunto convexo no vacío. Un vector $\boldsymbol{d} \in I\!R^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ es una* ***dirección*** *de S si $\forall \boldsymbol{x} \in S$ se verifica que $\boldsymbol{x} + \lambda\, \boldsymbol{d} \in S \quad \forall \lambda \geq 0$.*

Dos direcciones $\mathbf{d_1}$ y $\mathbf{d_2}$ de S son ***distintas*** *si $\nexists \alpha > 0$ tal que $\mathbf{d_1} = \alpha\, \mathbf{d_2}$.*

Una dirección $\mathbf{d}$ de S es una ***dirección extrema*** *de S si $\mathbf{d} = \lambda_1\, \mathbf{d_1} + \lambda_2\, \mathbf{d_2}$ implica que $\exists \alpha > 0$ con $\mathbf{d_1} = \alpha\, \mathbf{d_2}$, donde $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ y $\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}$ son direcciones de S.*

Sea $S = \{\boldsymbol{x} \in I\!R^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$, donde $\boldsymbol{A}$ es una matriz real $m \times n$, $rg(\boldsymbol{A}) = m$ y $\boldsymbol{b} \in I\!R^m$.

Teorema 2.1 (Caracterización de puntos extremos)**.** *Un punto $\overline{\boldsymbol{x}} \in I\!R^n$ es un punto extremo de S si y solo si $\boldsymbol{A}$ y $\overline{\boldsymbol{x}}$ pueden expresarse de la forma $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{B} \;\; \boldsymbol{N})$ y $\overline{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{B}} \\ \overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{N}} \end{pmatrix}$, donde $\boldsymbol{B}$ es una matriz $m \times m$ con $rg(\boldsymbol{B}) = m$, $\boldsymbol{N}$ es una matriz $m \times (n-m)$, $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$ y $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{0}$.*

Corolario 2.1. *El máximo número de puntos extremos de S es $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$.*

Teorema 2.2 (Existencia de puntos extremos)**.** *Si $S \neq \emptyset$, entonces S tiene al menos un punto extremo.*

Lema 2.4. *Un vector $\mathbf{d} \in I\!R^n$ es una dirección de S si y solo si $\boldsymbol{A}\mathbf{d} = \boldsymbol{0}$, $\mathbf{d} \geq \boldsymbol{0}$ y $\mathbf{d} \neq \boldsymbol{0}$.*

Teorema 2.3 (Caracterización de direcciones extremas)**.** *Sea $m < n$. Un vector $\overline{\mathbf{d}} \in I\!R^n$ es una dirección extrema de S si y solo si $\boldsymbol{A}$ y $\overline{\mathbf{d}}$ pueden expresarse de la forma $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{B} \;\; \boldsymbol{N})$ y $\overline{\mathbf{d}} = \alpha\, \mathbf{d}$, donde $\boldsymbol{B}$ es una matriz $m \times m$ con $rg(\boldsymbol{B}) = m$, $\boldsymbol{N}$ es una matriz $m \times (n-m)$, $\alpha > 0$, $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{N_k}} \\ \boldsymbol{e_k} \end{pmatrix}$, $k \in \{1, \ldots, n-m\}$, $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{N_k}}$ es la k-ésima columna de la matriz $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{N_k}} \leq \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{e_k}$ es el k-ésimo vector unitario de dimensión $n-m$.*

Corolario 2.2. *El máximo número de direcciones extremas de S distintas dos a dos es $(n-m)\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$.*

Teorema 2.4 (Representación). *Sean* $S \neq \emptyset$, $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}}, \ldots, \overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{p}}$ *los puntos extremos de* S *y* $\overline{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{1}}, \ldots, \overline{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{q}}$ *las direcciones extremas de* S. *Entonces* $\boldsymbol{x} \in S$ *si y solo si puede expresarse de la forma* $\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{j}} + \sum_{j=1}^{q} \mu_j \overline{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{j}}$, *donde* $\lambda_j \geq 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, p\}$, $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1$ *y* $\mu_j \geq 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, q\}$.

Teorema 2.5 (Existencia de direcciones extremas). *El conjunto* S *tiene al menos una dirección extrema si y solo si no está acotado.*

Proposición 2.1. *Sean* (P) *un problema de programación lineal de minimización con vector de costes* $\boldsymbol{c}$ *cuya región factible es* S, *y* $\overline{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{1}}, \ldots, \overline{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{q}}$ *las direcciones extremas de* S. *Si* $\exists k \in \{1, \ldots, q\}$ *tal que* $\boldsymbol{c}^t \overline{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{k}} < 0$, *entonces el valor óptimo de la función objetivo de* (P) *no está acotado.*

Teorema 2.6. *Sean* $S \neq \emptyset$, (P) *un problema de programación lineal de minimización con vector de costes* $\boldsymbol{c}$ *cuya región factible es* S, *y* $\overline{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{1}}, \ldots, \overline{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{q}}$ *las direcciones extremas de* S. *Si* $\boldsymbol{c}^t \overline{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{j}} \geq 0$ $\forall j \in \{1, \ldots, q\}$, *entonces existe algún punto extremo de* S *que es solución óptima de* (P).

Corolario 2.3. *Sean* $S \neq \emptyset$, (P) *un problema de programación lineal de minimización con vector de costes* $\boldsymbol{c}$ *cuya región factible es* S, *y* $\overline{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{1}}, \ldots, \overline{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{q}}$ *las direcciones extremas de* S. *Entonces* (P) *tiene solución óptima si y solo si* $\boldsymbol{c}^t \overline{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{j}} \geq 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, q\}$.

Corolario 2.4. *Sea* (P) *un problema de programación lineal cuya región factible es* S. *Si* (P) *tiene solución óptima, entonces existe algún punto extremo de* S *que es solución óptima de* (P).

Teorema 2.7. *Sea* (P) *un problema de programación lineal con vector de costes* $\boldsymbol{c}$ *cuya región factible es* S *y que tiene solución óptima, y sean* $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}}, \ldots, \overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{p}}$ *los puntos extremos de* S, $\overline{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{1}}, \ldots, \overline{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{q}}$ *las direcciones extremas de* S, z^* *el valor óptimo de la función objetivo de* (P), $\mathcal{P}^* = \{j \in \{1, \ldots, p\} \mid \boldsymbol{c}^t \overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{j}} = z^*\}$ *y* $\mathcal{Q}^* = \{j \in \{1, \ldots, q\} \mid \boldsymbol{c}^t \overline{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{j}} = 0\}$. *Entonces* $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{*}}$ *es solución óptima de* (P) *si y solo si puede expresarse de la forma* $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{*}} = \sum_{j \in \mathcal{P}^*} \lambda_j \overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{j}} + \sum_{j \in \mathcal{Q}^*} \mu_j \overline{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{j}}$, *donde* $\lambda_j \geq 0 \quad \forall j \in \mathcal{P}^*$, $\sum_{j \in \mathcal{P}^*} \lambda_j = 1$ *y* $\mu_j \geq 0 \quad \forall j \in \mathcal{Q}^*$.

2.2.3. Soluciones básicas. Teorema fundamental de la programación lineal

Considérese el conjunto S y supóngase que la matriz $\boldsymbol{A}$ se ha expresado de la forma $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{B} \;\; \boldsymbol{N})$, donde $\boldsymbol{B}$ es una matriz $m \times m$ con $rg(\boldsymbol{B}) = m$ y $\boldsymbol{N}$ es una matriz $m \times (n - m)$.

Definición 2.8. *La matriz $\boldsymbol{B}$ se denomina* ***matriz básica*** *o, simplemente,* ***base****, y la matriz $\boldsymbol{N}$ se denomina* ***matriz no básica****.*

Un vector n-dimensional de la forma $\overline{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{B}} \\ \overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{N}} \end{pmatrix}$*, donde $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ y $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{0}$, se llama* ***solución básica****.*

Las componentes de $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}}$ se denominan ***variables básicas****, y las de $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}}$* ***variables no básicas****.*

Una solución básica tal que $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{B}} \geq \boldsymbol{0}$ se llama ***solución básica factible****.*

Se dice que una solución básica factible es ***degenerada*** *si $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{B}} \not> \boldsymbol{0}$.*

Por el Teorema 2.1 se tiene que las soluciones básicas factibles se corresponden con los puntos extremos de S.

Teorema 2.8 (Fundamental de la programación lineal)**.** *Sea (P) un problema de programación lineal cuya región factible es S. Se verifican los siguientes resultados:*

1) Si (P) es factible, entonces existe al menos una solución básica factible.

2) Si (P) tiene solución óptima, entonces existe al menos una solución básica óptima.

2.3. Algoritmo del símplex

Se considera el siguiente problema de programación lineal escrito en forma estándar:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z = \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} \\ \text{sujeto a:} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \end{array} \qquad (P)$$

donde $\boldsymbol{c} \in I\!R^n$, $\boldsymbol{x} \in I\!R^n$, $\boldsymbol{A}$ es una matriz real $m \times n$, $rg(\boldsymbol{A}) = m$ y $\boldsymbol{b} \in I\!R^m$.

Sean $\boldsymbol{B}$ una matriz básica y $\boldsymbol{N}$ su matriz no básica asociada.

Notación. $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{B}\ \ \boldsymbol{N}) = (\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{B_1}} \dots \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{B_m}}\, \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{N_1}} \dots \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{N_{n-m}}})$

$\boldsymbol{c}^t = (\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^t\ \ \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{N}}^t) = (c_{B_1} \dots c_{B_m}\, c_{N_1} \dots c_{N_{n-m}})$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} \\ \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{B_1} \\ \vdots \\ x_{B_m} \\ x_{N_1} \\ \vdots \\ x_{N_{n-m}} \end{pmatrix}$$

Para cada $j \in \{1, \dots, n-m\}$, sean $\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{N_j}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{N_j}}$ y $z_{N_j} = \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^t\, \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{N_j}}$.

Lema 2.5. *Sea* $\overline{\boldsymbol{d}} = \alpha\, \boldsymbol{d}$, *donde* $\alpha > 0$, $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{y_{N_k}} \\ \boldsymbol{e_k} \end{pmatrix}$, $k \in \{1, \ldots, n-m\}$, $\boldsymbol{y_{N_k}} \leq \boldsymbol{0}$ *y* $\boldsymbol{e_k}$ *es el k-ésimo vector unitario de dimensión* $n - m$. *Entonces* $\overline{\boldsymbol{d}}$ *es una dirección extrema de la región factible de* (P). *Además,* $\boldsymbol{c}^t\overline{\boldsymbol{d}} = 0$ *si y solo si* $z_{N_k} - c_{N_k} = 0$.

Teorema 2.9. *Supóngase que* (P) *tiene solución óptima, y sean* $\overline{\boldsymbol{x}}^*_{\boldsymbol{1}}, \ldots, \overline{\boldsymbol{x}}^*_{\boldsymbol{p^*}}$ *las soluciones básicas óptimas de* (P), $\mathcal{J}^* = \{j \in \{1, \ldots, n-m\} \mid \boldsymbol{y_{N_j}} \leq \boldsymbol{0}, z_{N_j} - c_{N_j} = 0\}$ *y* $\overline{\boldsymbol{d}}^*_{\boldsymbol{j}} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{y_{N_j}} \\ \boldsymbol{e_j} \end{pmatrix}$ $\forall j \in \mathcal{J}^*$, *donde* $\boldsymbol{e_j}$ *es el j-ésimo vector unitario de dimensión* $n-m$ $\forall j \in \mathcal{J}^*$. *Entonces* $\boldsymbol{x}^* = \sum_{j=1}^{p^*} \lambda_j \overline{\boldsymbol{x}}^*_{\boldsymbol{j}} + \sum_{j \in \mathcal{J}^*} \mu_j \overline{\boldsymbol{d}}^*_{\boldsymbol{j}}$ *es solución óptima de* (P), *donde* $\lambda_j \geq 0$ $\forall j \in \{1, \ldots, p^*\}$, $\sum_{j=1}^{p^*} \lambda_j = 1$ *y* $\mu_j \geq 0$ $\forall j \in \mathcal{J}^*$.

Lema 2.6. *Sean* $\boldsymbol{x}$ *una solución factible de* (P) *y* $\overline{\boldsymbol{x}}$ *una solución básica factible de* (P). *Entonces* $\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}^t\overline{\boldsymbol{x}} - \sum_{j=1}^{n-m} (z_{N_j} - c_{N_j})\, x_{N_j}$.

Teorema 2.10. *Sea* $\overline{\boldsymbol{x}}$ *una solución básica factible de* (P). *Si* $z_{N_j} - c_{N_j} \leq 0$ $\forall j \in \{1, \ldots, n-m\}$, *entonces* $\overline{\boldsymbol{x}}$ *es una solución óptima de* (P).

Teorema 2.11. *Sea* $\overline{\boldsymbol{x}}$ *una solución básica factible de* (P). *Si* $\exists k \in \{1, \ldots, n-m\}$ *tal que* $z_{N_k} - c_{N_k} > 0$ *e* $\boldsymbol{y_{N_k}} \leq \boldsymbol{0}$, *entonces el valor óptimo de la función objetivo de* (P) *no está acotado.*

Teorema 2.12. *Sea* $\overline{\boldsymbol{x}}$ *una solución básica factible de* (P). *Si* $\exists k \in \{1, \ldots, n-m\}$ *tal que* $z_{N_k} - c_{N_k} > 0$ *e* $\boldsymbol{y_{N_k}} \not\leq \boldsymbol{0}$, *entonces el vector* $\overline{\boldsymbol{x}}' = \overline{\boldsymbol{x}} + \frac{\overline{x}_{B_l}}{y_{l,N_k}}\boldsymbol{d}$, *donde* $l = \operatorname{argmín}\left\{\frac{\overline{x}_{B_i}}{y_{i,N_k}} \mid i \in \{1, \ldots, m\} \text{ con } y_{i,N_k} > 0\right\}$, $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{y_{N_k}} \\ \boldsymbol{e_k} \end{pmatrix}$ *y* $\boldsymbol{e_k}$ *es el k-ésimo vector unitario de dimensión* $n - m$, *es una solución básica factible de* (P) *tal que* $\boldsymbol{c}^t\overline{\boldsymbol{x}}' \leq \boldsymbol{c}^t\overline{\boldsymbol{x}}$. *Además,* $\boldsymbol{c}^t\overline{\boldsymbol{x}}' < \boldsymbol{c}^t\overline{\boldsymbol{x}}$ *si y solo si* $\overline{x}_{B_l} > 0$.

Proposición 2.2. *Sea* $\overline{\boldsymbol{x}}$ *una solución básica factible de* (P). *Si* $z_{N_j} - c_{N_j} \leq 0$ $\forall j \in \{1, \ldots, n-m\}$, $\exists\, k \in \{1, \ldots, n-m\}$ *tal que* $z_{N_k} - c_{N_k} = 0$ *y se satisface una de las dos condiciones siguientes, entonces* (P) *tiene infinitas soluciones óptimas.*

1) $\boldsymbol{y_{N_k}} \leq \boldsymbol{0}$.

2) $\boldsymbol{y_{N_k}} \not\leq \boldsymbol{0}$ *y* $\overline{x}_{B_l} > 0$, *donde* $l = \operatorname{argmín}\left\{\frac{\overline{x}_{B_i}}{y_{i,N_k}} \mid i \in \{1, \ldots, m\} \text{ con } y_{i,N_k} > 0\right\}$.

Proposición 2.3. *Sea* $\overline{\boldsymbol{x}}$ *una solución básica factible de* (P). *Si* $z_{N_j} - c_{N_j} < 0$ $\forall j \in \{1, \ldots, n-m\}$, *entonces* $\overline{\boldsymbol{x}}$ *es la única solución óptima de* (P).

2.4. Inicialización del algoritmo del símplex. Método de las dos fases y método de las penalizaciones

Se considera el siguiente problema de programación lineal escrito en forma estándar:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z = \boldsymbol{c}^t \boldsymbol{x} \\ \text{sujeto a:} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \end{array} \tag{P}$$

donde $\boldsymbol{c} \in I\!R^n$, $\boldsymbol{x} \in I\!R^n$, $\boldsymbol{A}$ es una matriz real $m \times n$ y $\boldsymbol{b} \in I\!R^m$. Sin pérdida de generalidad, se supone que $\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$ (si inicialmente $\exists i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $b_i < 0$, se multiplica por -1 la i-ésima restricción).

El esfuerzo computacional necesario para determinar (en caso de que exista) una submatriz $\boldsymbol{B^0}$ de $\boldsymbol{A}$ a partir de la cual comenzar a aplicar el algoritmo del símplex para resolver el problema (P), puede llegar a ser muy elevado. Por ello, siempre se va a tomar $\boldsymbol{B^0} = \boldsymbol{I_m}$.

Si $\forall i \in \{1, \ldots, m\} \;\; \exists j(i) \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $a_{i,j(i)} > 0$ y $a_{i',j(i)} = 0 \quad \forall i' \in \{1 \ldots, m\} \setminus \{i\}$, dividiendo entre $a_{i,j(i)}$ la i-ésima restricción para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, será posible tomar $\boldsymbol{B^0} = \boldsymbol{I_m}$ y comenzar a aplicar el algoritmo del símplex. En otro caso, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\nexists j(i)$ satisfaciendo las condiciones anteriores, se sumará al término de la izquierda de la i-ésima restricción una **variable artificial** (que, por definición, será no negativa) y se aplicará el método de las dos fases o el método de las penalizaciones.

Sean $x_{n+1}, \ldots, x_{n+p}$ las variables artificiales que se han introducido en (P), donde $p \in \{1, \ldots, m\}$, y sea (P_a) el problema resultante (nótese que (P_a) es factible).

Se observa que $(x_1 \ldots x_n)^t$ es una solución factible de (P) si y solo si $(x_1 \ldots x_n \; x_{n+1} \ldots x_{n+p})^t$ es una solución factible de (P_a) tal que $x_{n+1} = \ldots = x_{n+p} = 0$.

2.4.1. Método de las dos fases

Como su nombre indica, este procedimiento consta de dos fases: en la primera se determina si el problema (P) es factible o infactible, y, en caso de que sea factible, en la segunda fase se continúa aplicando el algoritmo del símplex para resolver (P).

En la **Fase I** se aplica el algoritmo del símplex para resolver el siguiente problema tomando como base inicial $\boldsymbol{B^0} = \boldsymbol{I_m}$:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z_F = x_{n+1} + \ldots + x_{n+p} \\ \text{sujeto a:} & (x_1 \ldots x_n\ x_{n+1} \ldots x_{n+p})^t \text{ solución factible de } (P_a) \end{array} \qquad (P_F)$$

Se observa que el problema (P_F) es factible y el valor óptimo de z_F está acotado, luego (P_F) tiene solución óptima.

Considérese la tabla óptima del algoritmo del símplex. Pueden darse las siguientes situaciones:

1) $z_F^* > 0$.

   Entonces se verifica que el problema (P) es infactible.

2) $z_F^* = 0$ y no hay variables artificiales básicas.

   Se pasa a la **Fase II**, esto es, a partir de la base actual se continúa aplicando el algoritmo del símplex para resolver el problema (P) (para ello, basta con eliminar de la tabla las columnas de las variables artificiales y actualizar la fila 0).

3) $z_F^* = 0$ y hay variables artificiales básicas.

   Para cada variable artificial básica tal que sea posible realizar un pivotaje sobre un pivote no nulo de forma que salga de la base dicha variable y entre en su lugar una variable que no sea artificial, se realiza este pivotaje. Si ha sido posible realizar el pivotaje para todas las variables artificiales básicas, se pasa a la **Fase II**. Si no, se eliminan de la tabla las filas de las variables artificiales que continúan siendo básicas y se pasa a la **Fase II** (se verifica que las restricciones del problema (P) correspondientes a las filas que se han eliminado son redundantes).

2.4.2. Método de las penalizaciones

Se aplica el algoritmo del símplex considerando el Paso 4' para resolver el siguiente problema tomando como base inicial $\boldsymbol{B^0} = \boldsymbol{I_m}$:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z_M = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + Mx_{n+1} + \ldots + Mx_{n+p} \\ \text{sujeto a:} & (x_1 \ldots x_n\ x_{n+1} \ldots x_{n+p})^t \text{ solución factible de } (P_a), \end{array} \qquad (P_M)$$

donde M es una constante positiva lo suficientemente grande.

Se observa que el problema (P_M) es factible, luego (P_M) tiene solución óptima o el valor óptimo de z_M no está acotado.

Considérese la última tabla del algoritmo del símplex. Pueden darse las siguientes situaciones:

1) $z_{N_j} - c_{N_j} \leq 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, n-m\}$.

   Entonces el problema (P_M) tiene solución óptima.

   Si $\overline{x}_{n+1} = \ldots = \overline{x}_{n+p} = 0$, se verifica que el problema (P) tiene solución óptima y $(\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_n)^t$ es solución óptima de (P); en otro caso, (P) es infactible.

2) $\boldsymbol{y_{N_k}} \leq \boldsymbol{0}$, donde $k = \text{argmáx}\{z_{N_j} - c_{N_j} \mid j \in \{1, \ldots, n-m\} \text{ con } z_{N_j} - c_{N_j} > 0\}$.

   Entonces el valor óptimo de z_M no está acotado.

   Si $\overline{x}_{n+1} = \ldots = \overline{x}_{n+p} = 0$, se verifica que el valor óptimo de z no está acotado; en otro caso, el problema (P) es infactible.

2.5. Dualidad

Todo problema de programación lineal continua tiene asociado otro problema de programación lineal continua que posee importantes propiedades y puede utilizarse para resolver el problema original. Al problema original se le denominará **problema primal**, y a su problema asociado **problema dual**.

La **propiedad involutiva de la dualidad** establece que, dados un problema primal y su problema dual, se verifica que el problema dual del problema dual es el problema primal.

La siguiente tabla muestra las relaciones entre los problemas primal y dual:

Criterio de optimización: Minimización	Criterio de optimización: Maximización
Variable ≥ 0 Variable ≤ 0 Variable $\in \mathbb{R}$	Restricción $\leq$ Restricción $\geq$ Restricción $=$
Restricción $\geq$ Restricción $\leq$ Restricción $=$	Variable ≥ 0 Variable ≤ 0 Variable $\in \mathbb{R}$
Coeficientes de la función objetivo	Términos independientes de las restricciones
Términos independientes de las restricciones	Coeficientes de la función objetivo
Matriz de restricciones: $\boldsymbol{A}$	Matriz de restricciones: $\boldsymbol{A}^t$

Se considera el siguiente problema de programación lineal escrito en forma canónica:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \boldsymbol{c}^t \boldsymbol{x} \\ \text{sujeto a:} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \end{aligned} \tag{P}$$

donde $\boldsymbol{c} \in I\!R^n$, $\boldsymbol{x} \in I\!R^n$, $\boldsymbol{A}$ es una matriz real $m \times n$ y $\boldsymbol{b} \in I\!R^m$.

El problema dual de (P) es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & \boldsymbol{b}^t \boldsymbol{w} \\ \text{sujeto a:} \quad & \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{w} \leq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{w} \geq \boldsymbol{0}, \end{aligned} \tag{D}$$

donde $\boldsymbol{w} \in I\!R^m$.

Lema 2.7. *Sean $\overline{\boldsymbol{x}}$ y $\overline{\boldsymbol{w}}$ soluciones factibles de (P) y (D) respectivamente. Entonces $\boldsymbol{c}^t\overline{\boldsymbol{x}} \geq \overline{\boldsymbol{w}}^t\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{b}^t\overline{\boldsymbol{w}}$.*

Corolario 2.5. *Sean $\overline{\boldsymbol{x}}$ y $\overline{\boldsymbol{w}}$ soluciones factibles de (P) y (D) respectivamente. Si $\boldsymbol{c}^t\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^t\overline{\boldsymbol{w}}$, entonces $\overline{\boldsymbol{x}}$ y $\overline{\boldsymbol{w}}$ son soluciones óptimas de (P) y (D) respectivamente.*

Corolario 2.6. *Si uno de los problemas (P) o (D) tiene valor óptimo de la función objetivo no acotado, entonces el otro problema es infactible.*

Lema 2.8. *Si uno de los problemas (P) o (D) tiene solución óptima, entonces ambos tienen solución óptima y los valores óptimos de sus funciones objetivo coinciden.*

Teorema 2.13 (Fundamental de la dualidad)**.** *Dados un problema primal y su problema dual asociado, exactamente una de las siguientes afirmaciones es cierta:*

1) Ambos problemas tienen solución óptima y los valores óptimos de sus funciones objetivo coinciden.

2) Uno de los problemas tiene valor óptimo de la función objetivo no acotado y el otro problema es infactible.

3) Ambos problemas son infactibles.

Teorema 2.14 (Holgura complementaria)**.** *Sean $\overline{\boldsymbol{x}}$ y $\overline{\boldsymbol{w}}$ soluciones factibles de (P) y (D) respectivamente. Entonces ambas soluciones son óptimas para sus problemas respectivos si y solo si $(c_j - \overline{\boldsymbol{w}}^t\boldsymbol{a_j})\overline{x}_j = 0 \quad \forall j \in \{1,\ldots,n\}$ y $\overline{w}_i(\boldsymbol{a^i}\overline{\boldsymbol{x}} - b_i) = 0 \quad \forall i \in \{1,\ldots,m\}$.*

2.6. Algoritmo dual del símplex

Se considera el siguiente problema de programación lineal escrito en forma estándar:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z = \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} \\ \text{sujeto a:} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \end{array} \tag{P}$$

donde $\boldsymbol{c} \in I\!R^n$, $\boldsymbol{x} \in I\!R^n$, $\boldsymbol{A}$ es una matriz real $m \times n$, $rg(\boldsymbol{A}) = m$ y $\boldsymbol{b} \in I\!R^m$.

El problema dual de (P) es el siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{w} \\ \text{sujeto a:} & \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{w} \leq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{w} \in I\!R^m \end{array} \tag{D}$$

Definición 2.9. *Sea $\overline{\boldsymbol{x}}$ una solución básica de (P). Si $z_{N_j} - c_{N_j} \leq 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, n-m\}$, se dice que $\overline{\boldsymbol{x}}$ es una **solución dual factible** de (P).*

Lema 2.9. *Sean $\overline{\boldsymbol{x}}$ una solución dual factible de (P) y $\overline{\boldsymbol{w}}^t = \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^t\boldsymbol{B}^{-1}$. Entonces $\overline{\boldsymbol{w}}$ es una solución factible de (D) y $\boldsymbol{c}^t\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^t\overline{\boldsymbol{w}}$.*

Lema 2.10. *Sea $\overline{\boldsymbol{x}}$ una solución dual factible de (P). Si $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{B}} \geq \boldsymbol{0}$, entonces $\overline{\boldsymbol{x}}$ es una solución óptima de (P).*

Teorema 2.15. *Sea $\overline{\boldsymbol{x}}$ una solución dual factible de (P). Si $\exists\, l \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\overline{x}_{B_l} < 0$ e $y_{l,N_j} \geq 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, n-m\}$, entonces (P) es infactible y el valor óptimo de la función objetivo de (D) no está acotado.*

Teorema 2.16. *Sea $\overline{\boldsymbol{x}}$ una solución dual factible de (P). Si $\exists\, l \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\overline{x}_{B_l} < 0$ y $\exists\, j \in \{1, \ldots, n-m\}$ tal que $y_{l,N_j} < 0$, entonces al pivotar sobre y_{l,N_k}, donde $k = \text{argmín}\left\{\dfrac{z_{N_j} - c_{N_j}}{y_{l,N_j}} \mid j \in \{1, \ldots, n-m\} \text{ con } y_{l,N_j} < 0\right\}$, se obtiene una solución $\overline{\boldsymbol{x}}'$ dual factible de (P) tal que $\boldsymbol{c}^t\overline{\boldsymbol{x}}' \geq \boldsymbol{c}^t\overline{\boldsymbol{x}}$. Además, $\boldsymbol{c}^t\overline{\boldsymbol{x}}' > \boldsymbol{c}^t\overline{\boldsymbol{x}}$ si y solo si $z_{N_k} - c_{N_k} < 0$.*

2.7. Inicialización del algoritmo dual del símplex. Método de la restricción artificial

Se considera el siguiente problema de programación lineal escrito en forma estándar:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z = \boldsymbol{c}^t \boldsymbol{x} \\ \text{sujeto a:} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \end{array} \qquad (P)$$

donde $\boldsymbol{c} \in I\!R^n$, $\boldsymbol{x} \in I\!R^n$, $\boldsymbol{A}$ es una matriz real $m \times n$, $\boldsymbol{I_m}$ es una submatriz de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{b} \in I\!R^m$.

Siempre se va a tomar la matriz identidad como base inicial para resolver el problema (P).

Sea $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I_m}$. Si la solución básica asociada a $\boldsymbol{B}$ es una solución dual factible de (P), se aplica el algoritmo dual del símplex partiendo de $\boldsymbol{B}$. En otro caso, se aplica el método de la restricción artificial. Para ello, se considera la **restricción artificial**, esto es,

$$\sum_{j=1}^{n-m} x_{N_j} \leq M,$$

donde $\boldsymbol{N}$ es la matriz no básica asociada a $\boldsymbol{B}$ y M es una constante positiva lo suficientemente grande, y se añade al conjunto de restricciones de (P) transformándola previamente en una igualdad introduciendo una variable de holgura x_{n+1}, resultando así el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z_R = \boldsymbol{c}^t \boldsymbol{x} \\ \text{sujeto a:} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{n-m} x_{N_j} + x_{n+1} = M \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, x_{n+1} \geq 0 \end{array} \qquad (P_R)$$

(nótese que la región factible de (P_R) está acotada, luego el valor óptimo de z_R está acotado y, en consecuencia, (P_R) es infactible o tiene solución óptima; además, el problema (P) es infactible si y solo si (P_R) es infactible).

A continuación, se construye la tabla del algoritmo del símplex para (P_R) tomando como variables básicas a $x_{B_1}, \ldots, x_{B_m}, x_{n+1}$ (nótese que la base asociada es $\boldsymbol{I_{m+1}}$), se pivota sobre y_{m+1,N_k}, donde $k = \text{argmáx}\{z_{N_j} - c_{N_j} \mid j \in \{1, \ldots, n-m\} \text{ con } z_{N_j} - c_{N_j} > 0\}$ (se verifica que al realizar este pivotaje se obtiene una solución dual factible de (P_R)), y se continúa aplicando el algoritmo dual del símplex para resolver el problema (P_R). Pueden darse las siguientes situaciones:

1) (P_R) es infactible.

   Entonces el problema (P) es infactible.

2) (P_R) tiene solución óptima.

   Considérese la tabla óptima del algoritmo dual del símplex.

   - Si $x^*_{n+1} > 0$, se verifica que el problema (P) tiene solución óptima y $(x^*_1 \dots x^*_n)^t$ es solución óptima de (P).
   - Si $x^*_{n+1} = 0$, hay dos posibilidades:
     - Si $z_{n+1} - c_{n+1} = 0$, se verifica que el problema (P) tiene solución óptima y es posible determinar una solución óptima de (P) a partir de $(x^*_1 \dots x^*_n)^t$.
     - Si $z_{n+1} - c_{n+1} < 0$, se verifica que el valor óptimo de z no está acotado.

2.8. Postoptimización y análisis de sensibilidad

Dado un problema de programación lineal continua que ya ha sido resuelto, la **postoptimización** consiste en resolver de forma eficiente el problema que resulta al modificar los valores de algunos de los parámetros del problema original. El **análisis de sensibilidad** consiste en determinar el rango de variación de algunos de los parámetros del problema de forma que la base óptima del problema original continúe siéndolo.

Se considera el siguiente problema de programación lineal escrito en forma estándar:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z = \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} \\ \text{sujeto a:} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \end{array} \qquad (P)$$

donde $\boldsymbol{c} \in I\!R^n$, $\boldsymbol{x} \in I\!R^n$, $\boldsymbol{A}$ es una matriz real $m \times n$ y $\boldsymbol{b} \in I\!R^m$.

Supóngase que el problema (P) tiene solución óptima y que ha sido resuelto mediante el algoritmo primal o dual del símplex. Considérese la tabla óptima de dicho algoritmo, y sean $\boldsymbol{B}$ la matriz básica óptima y $\boldsymbol{N}$ su matriz no básica asociada.

2.8.1. Postoptimización

1) Modificación del vector de costes

Se desea reemplazar el vector $\boldsymbol{c}$ por otro vector $\boldsymbol{c'} \in I\!R^n$.

Hay que actualizar la fila 0 de la tabla. Sean $z'_{N_j} = \boldsymbol{c'}^t_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{y_{N_j}} \quad \forall j \in \{1, \ldots, n-m\}$ y $\overline{z}' = \boldsymbol{c'}^t_{\boldsymbol{B}} \overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{B}}$.

Si $z'_{N_j} - c'_{N_j} \leq 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, n-m\}$, la solución básica actual es óptima. En otro caso, se continúa aplicando el algoritmo (primal) del símplex.

Se observa que si $\boldsymbol{c'_B} = \boldsymbol{c_B}$ entonces $z'_{N_j} = z_{N_j} \quad \forall j \in \{1, \ldots, n-m\}$ y $\overline{z}' = \overline{z}$.

2) Modificación del vector de términos independientes

Se desea reemplazar el vector $\boldsymbol{b}$ por otro vector $\boldsymbol{b'} \in I\!R^m$.

Hay que actualizar la última columna de la tabla. Sean $\overline{\boldsymbol{x}}'_{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b'}$ y $\overline{z}' = \boldsymbol{c}^t_{\boldsymbol{B}}\, \overline{\boldsymbol{x}}'_{\boldsymbol{B}}$.

Si $\overline{\boldsymbol{x}}'_{\boldsymbol{B}} \geq \boldsymbol{0}$, la solución básica actual es óptima. En otro caso, se continúa aplicando el algoritmo dual del símplex.

Se observa que $\boldsymbol{B}^{-1} = (\boldsymbol{y_{B^0_1}} \ldots \boldsymbol{y_{B^0_m}})$, donde $\boldsymbol{B^0} = (\boldsymbol{a_{B^0_1}} \ldots \boldsymbol{a_{B^0_m}}) = \boldsymbol{I_m}$ es la base a partir de la cual se comenzó a resolver el problema (P).

3) Introducción de una nueva variable

Se desea introducir en (P) una nueva variable x_{n+1} cuyo coeficiente en la función objetivo es $c_{n+1} \in I\!R$ y sus coeficientes en las restricciones vienen dados por el vector $\boldsymbol{a_{n+1}} \in I\!R^m$. Sin pérdida de generalidad, se supone que $x_{n+1} \geq 0$.

Hay que añadir a la tabla la columna correspondiente a x_{n+1}. Sean $\boldsymbol{y_{n+1}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a_{n+1}}$ y $z_{n+1} = \boldsymbol{c}^t_{\boldsymbol{B}}\, \boldsymbol{y_{n+1}}$.

Si $z_{n+1} - c_{n+1} \leq 0$, la solución básica actual es óptima. En otro caso, se continúa aplicando el algoritmo (primal) del símplex.

4) Introducción de una nueva restricción

Se desea introducir en (P) una nueva restricción con vector fila de coeficientes de las variables $\boldsymbol{a^{m+1}} \in I\!R^n$ y término independiente $b_{m+1} \in I\!R$.

- **Restricción de desigualdad**

  Sin pérdida de generalidad, se supone que la restricción es una desigualdad "$\leq$".

  - Si $\sum_{i=1}^{m} a_{m+1,B_i}\,\overline{x}_{B_i} \leq b_{m+1}$, la solución básica actual es óptima.
  - Si $\sum_{i=1}^{m} a_{m+1,B_i}\,\overline{x}_{B_i} > b_{m+1}$, hay que transformar la nueva restricción en una igualdad introduciendo una variable de holgura x_{n+1}, tomar como $(m+1)$-ésima variable básica a x_{n+1}, y añadir a la tabla la fila correspondiente a la restricción $\boldsymbol{a^{m+1}x}+x_{n+1}=b_{m+1}$ y la columna correspondiente a x_{n+1}. Sean $y_{m+1,N_j} = a_{m+1,N_j} - \sum_{i=1}^{m} a_{m+1,B_i}\,y_{i,N_j}$ $\forall j \in \{1,\dots,n-m\}$ y $\overline{x}_{n+1} = b_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} a_{m+1,B_i}\,\overline{x}_{B_i}$. Como $\overline{x}_{n+1} < 0$, se continúa aplicando el algoritmo dual del símplex.

- **Restricción de igualdad**

  - Si $\sum_{i=1}^{m} a_{m+1,B_i}\,\overline{x}_{B_i} = b_{m+1}$, la solución básica actual es óptima.
  - Si $\sum_{i=1}^{m} a_{m+1,B_i}\,\overline{x}_{B_i} > b_{m+1}$, hay que introducir una variable artificial x_{n+1}, tomar como $(m+1)$-ésima variable básica a x_{n+1}, y añadir a la tabla la fila correspondiente a la restricción $\boldsymbol{a^{m+1}x} + x_{n+1} = b_{m+1}$ y la columna correspondiente a x_{n+1}. Sean $y_{m+1,N_j}=a_{m+1,N_j}-\sum_{i=1}^{m}a_{m+1,B_i}y_{i,N_j}$ $\forall j\in\{1,\dots,n-m\}$ y $\overline{x}_{n+1}=b_{m+1}-\sum_{i=1}^{m}a_{m+1,B_i}\overline{x}_{B_i}$. Como $\overline{x}_{n+1} < 0$, se realiza una iteración del algoritmo dual del símplex, se elimina de la tabla la columna correspondiente a x_{n+1} y se continúa aplicando el algoritmo dual del símplex.
  - Si $\sum_{i=1}^{m} a_{m+1,B_i}\,\overline{x}_{B_i} < b_{m+1}$, hay que multiplicar por -1 la restricción, introducir una variable artificial x_{n+1}, tomar como $(m+1)$-ésima variable básica a x_{n+1}, y añadir a la tabla la fila correspondiente a la restricción $-\boldsymbol{a^{m+1}x} + x_{n+1} = -b_{m+1}$ y la columna correspondiente a x_{n+1}. Sean $y_{m+1,N_j} = -a_{m+1,N_j} + \sum_{i=1}^{m} a_{m+1,B_i}\,y_{i,N_j}$ $\forall j \in \{1,\dots,n-m\}$ y $\overline{x}_{n+1} = -b_{m+1} + \sum_{i=1}^{m} a_{m+1,B_i}\,\overline{x}_{B_i}$. Como $\overline{x}_{n+1} < 0$, se realiza una iteración del algoritmo dual del símplex, se elimina de la tabla la columna correspondiente a x_{n+1} y se continúa aplicando el algoritmo dual del símplex.

2.8.2. Análisis de sensibilidad

1) Determinación del rango de variación de los costes manteniendo la optimalidad de B

Se deduce del apartado 1) de la Sección 2.8.1.

2) Determinación del rango de variación de los términos independientes manteniendo la optimalidad de B

Se deduce del apartado 2) de la Sección 2.8.1.