1. Para cada uno de los siguientes problemas de programación lineal, se pide:

- Plantear su problema dual.
- En caso de que exista, identificar la solución óptima del problema dual en la tabla óptima del problema primal y comprobar que se satisfacen las condiciones establecidas en el Teorema de la holgura complementaria.
- Determinar cuál de las situaciones establecidas en el Teorema fundamental de la dualidad se presenta.
- Formularlo de distintas formas (expresándolo como un problema de minimización en lugar de maximización o viceversa, introduciendo variables de holgura, cambiando de sentido las desigualdades, ...), plantear sus problemas duales asociados y comprobar que todos ellos son equivalentes.

(a) Max $z = -2x_1 + x_2$

s.a:
$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ -7x_1 + 2x_2 &\leq 15 \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(b) Min $z = 3x_1 + x_2$

s.a:
$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ 7x_1 + 2x_2 &\geq 15 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(c) Max $z = x_1 + x_2$

s.a:
$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(d) Max $z = 3x_1 + 2x_2$

s.a:
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &\leq 6 \\ -4x_1 + 5x_2 &\leq 15 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(e) Min $z = 3x_1 + 4x_2$

s.a:
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ -3x_1 + 5x_2 &\geq 15 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

2. Resolver el siguiente problema de programación lineal aplicando el algoritmo dual del símplex:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ \text{sujeto a:} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

3. Resolver el siguiente problema de programación lineal aplicando el algoritmo dual del símplex y comprobar mediante algún resultado de dualidad que, en efecto, la solución que se obtiene es óptima.

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & z = 2x_1 - 3x_2 \\ \text{sujeto a:} & x_1 + x_2 \geq 3 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

4. Demostrar que si la matriz de restricciones de un problema de minimización escrito en forma estándar es simétrica y el vector de costes coincide con el vector del lado derecho, entonces toda solución factible del problema es óptima.

5. Resolver los siguientes problemas de programación lineal mediante los algoritmos primal y dual del símplex:

$$\begin{array}{ll} \text{(a) Max} & z = 2x_1 + x_2 + 4x_3 \\ \text{s.a:} & 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1 - 3x_3 \geq -4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{(b) Min} & z = -x_1 - \frac{3}{4}x_2 + 4x_3 \\ \text{s.a:} & x_2 + 4x_3 \leq -2 \\ & 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$