Cálculo de una variable

Integrales

Definición de Integral Definida

Si *f* está definida en el intervalo [a,b] y dividimos el intervalo en n subintervalos de longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Sean $x_0 = a, x_1, x_2, \cdots, x_n = b$ los puntos extremos de estos subintervalos y $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$ cualquier punto muestral en esos subintervalos y x_i^* está en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, \ x_i]$ entonces la integral definida de *f* de a a b es:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

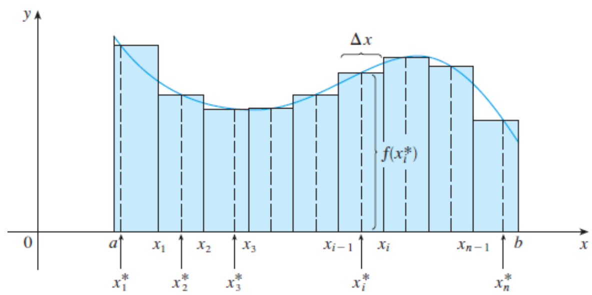


Ilustración 48.- Integral Definida

Si existe el límite decimos que *f* es integrable en [a, b]. Para simplificar haciendo $x_i^* = x_i$ queda la definición:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

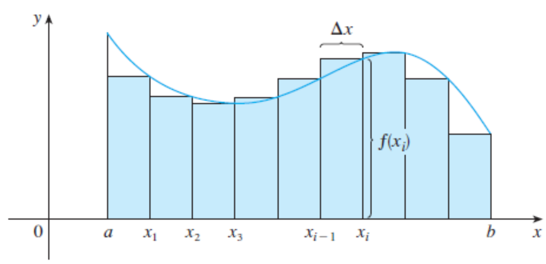


Ilustración 49.- Integral Definida

Teorema: si *f* es continua en [a, b] y sólo tiene un número finito de discontinuidades de salto, *f* es integrable en [a, b], esto es existe la integral definida $\int_a^b f(x)dx$.

Regla del punto medio: En lugar de utilizar los extremos de los subintervalos, utilizamos el punto medio para definir la integral que queda:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\,\Delta x \ \ con\ \Delta x = \frac{b-a}{n}\ y\ \overline{x_i} = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$$

Propiedades de la integral definida

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
2. $\int_a^a f(x)dx = 0$
3. $\int_a^b c dx = c(b-a)$
4. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
5. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$
6. $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$
7. $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$
8. Si $f(x) \geq 0$ para [a,b] entonces $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
9. Si $f(x) \geq g(x)$ para [a,b] entonces $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
10. Si $m \leq f(x) \leq M$ para [a,b] entonces $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

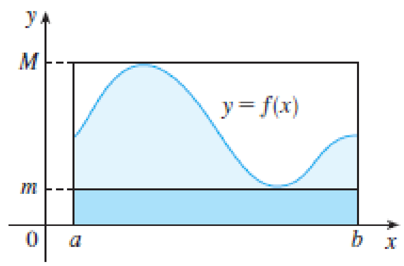


Ilustración 50.- Función con una cota inferior m

Teorema de la evaluación

Si *f* es continua en el intervalo [a, b] entonces $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ donde F es cualquier antiderivada de F, esto es $F' = f$

Demostración: Se tiene $F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \cdots + F(x_2) - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) = \sum_{i=1}^{n}[F(x_i) - F(x_{i-1})]$

Y por el teorema del valor medio $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = f(x_i^*)\Delta x$

Por lo que $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$ y tomando límites cuando $n \to \infty$ se tiene

$$F(b) - F(a) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

Integral Indefinida

$$\int f(x)dx = F(x) \Longrightarrow F'(x) = f(x)$$

Principales integrales indefinidas

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$ $\qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$

$\int e^x dx = e^x + C$ $\qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$ $\qquad \int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$

$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$ $\qquad \int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$

$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$ $\qquad \int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$

$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \tan^{-1} x + C$ $\qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{sen}^{-1} x + C$

Teorema del Cambio Neto

La integral de una rapidez de cambio es el cambio neto: $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$

Teorema Fundamental del Cálculo

Establece una conexión entre el cálculo integral y el diferencial. Si *f* es continua en [a,b], entonces la función *g* definida por $g(x) = \int_a^x f(t)dt \quad a \leq x \leq b$ es una antiderivada de *f*, es decir $g'(x) = f(x)$ para $a \leq x \leq b$

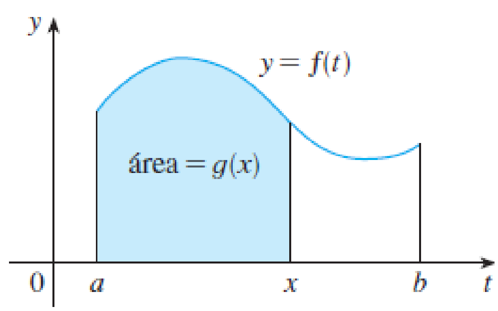


Ilustración 51.- Teorema fundamental del Cálculo

Por tanto se cumple que $\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$

Ahora supongamos que queremos sacar la derivada $\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$, como $g(t)$ es una antiderivada, la integral sería $g(b(x)) - g(a(x))$ y derivando quedaría al aplicar la regla de la cadena $g'\big(b(x)\big)b'(x) - g'\big(a(x)\big)a'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$

Por tanto si los límites de integración son distintos de x se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt\right) = f(b(x))\cdot b'(x) - f(a(x))\cdot a'(x)$$

Regla de Sustitución

Si $u = g(x)$ es una función derivable cuyo rango es un intervalo I y f es continua en I, entonces $\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int f(u)du$

Ejemplo: $\int x^3\cos(x^4+2)dx$ Haciendo el cambio $u = x^4+2 \to du = 4x^3dx$ se tiene

$$\int x^3\cos(x^4+2)dx = \frac{1}{4}\int \cos u\, du = \frac{1}{4}\operatorname{sen} u + C = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(x^4+2) + C$$

Regla de Sustitución para integrales definidas

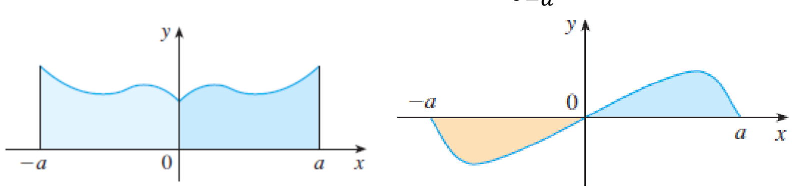
Si g' es continua en [a, b] y f es continua en el intervalo $u = g(x)$ entonces $\int_a^b f(g(x))\, g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$

Por ejemplo $\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx$ haciendo el cambio $u = 2x+1 \to du = 2dx$ y llevando el cambio a los límites de integración $\begin{matrix} x=0\to u=1 \\ x=4\to u=9\end{matrix} \Longrightarrow \int_1^9 \frac{1}{2}\sqrt{u}du = \frac{1}{2}\int_1^9 u^{\frac{1}{2}}du =$ $\frac{1}{2}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^9 = \frac{1}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_1^9 = \frac{26}{3}$

Integrales de funciones simétricas

Si f es continua en [-a,a] se cumple:

a) Si f es par $(f(-x) = f(x)) \Longrightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$
b) Si f es impar $(f(-x) = -f(x)) \Longrightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$



(a) f par, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ (b) f impar, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

Ilustración 52.- Funciones simétricas

Integración por partes

La regla del producto expresa que si f y g son funciones derivables se cumple que

$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$

Y tomando integrales indefinidas se cumple

$$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x)dx + \int f'(x)g(x)dx \Rightarrow \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Haciendo $\begin{matrix} u = f(x) \rightarrow du = f'(x)dx \\ v = g(x) \rightarrow dv = g'(x)dx \end{matrix} \Rightarrow \int udv = uv - \int vdu$

Por ejemplo obtener $\int x \operatorname{sen} x \, dx$. Tomamos $f(x) = x$ y $g'(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow g(x) = -\cos x$, con lo que la integral $\int x \operatorname{sen} x \, dx = -x\cos x - \int -\cos x \, dx = -x\cos x + \int \cos x \, dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$

Otro ejemplo. $\int \ln x \, dx$ hacemos $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$ y $g'(x) = 1 \Rightarrow g(x) = x$

Con lo que la integral queda $\int \ln x \, dx = x\ln x - \int \frac{1}{x} x dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$

Técnicas adicionales de integración. Trigonométricas

Potencia impar de cos x

$$\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cos x \, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x \, dx = \int \cos x \, dx - \int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx = \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$$

También se puede resolver haciendo $u = \operatorname{sen} x \Rightarrow du = \cos x \, dx \Rightarrow \int du - \int u^2 du = u - \frac{u^3}{3} = \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$

Sustituciones trigonométricas

Se aplica a funciones algebraicas de la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ y $\sqrt{x^2 - a^2}$. Por ejemplo: Haciendo la sustitución $x = rsen\theta \Rightarrow dx = rcos\theta d\theta$

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - (rsen\theta)^2}\, rcos\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sqrt{1 - (sen\theta)^2}\, rcos\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 cos^2\theta d\theta$$

Y como $cos^2\theta = \frac{1+cos2\theta}{2}$ la integral queda $\frac{r^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+cos2\theta)d\theta = \frac{r^2}{2}\Big[\theta + \frac{1}{2}\text{sen } 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4}$

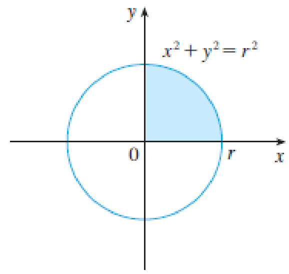


Ilustración 53.- Ilustración del ejemplo

Fracciones Parciales

Integramos funciones racionales (razones entre polinomios) al expresarlos como sumas de fracciones más sencillas, llamadas fracciones parciales que ya sabemos como integrar.

Para calcular $\int \frac{5x-4}{2x^2+x-1}dx$, para lo cual transformamos la fracción de la siguiente manera: $\frac{5x-4}{2x^2+x-1} = \frac{5x-4}{(x+1)(2x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-1}$ Se cumplirá que $5x - 4 = A(2x-1) + B(x+1) = (2A+B)x + B - A \Rightarrow \begin{cases} 2A + B = 5 \\ B - A = -4 \end{cases} \Rightarrow A = 3;\ \ B = -1$

$$\int \left(\frac{3}{x+1} - \frac{1}{2x-1}\right)dx = 3\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(2x-1) + C$$

Nota 1: Si el grado del numerado es mayor que el del denominador, primero se hace la división.

Nota 2: Si un factor lineal es múltiple se añade un término extra.

$$\frac{x}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x-1}$$

Nota 3: Si un factor cuadrático no se descompone en factores lineales se utiliza la fracción $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$

Integrales Impropias

Si $\int_a^t f(x)dx$ existe para $\forall t \geq a \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$ siempre que este límite exista.

Las integrales impropias $\int_a^\infty f(x)dx$ y $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ se denominan convergentes si existe el límite y divergentes si no existe.

Definimos $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx$

Ejemplo: $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to\infty} [\ln x]_1^t = \lim_{t\to\infty} (\ln t - \ln 1) = \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty \rightarrow$ Diverge

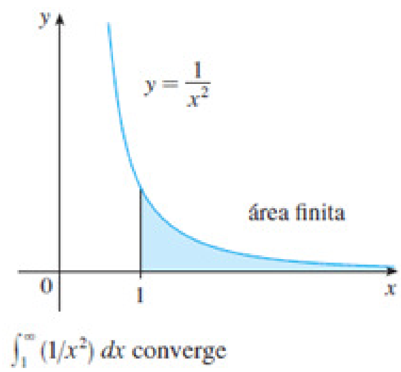


Ilustración 54.- Ejemplo de integral impropia convergente

Estudiar si converge $\int_0^\infty \frac{1}{x^p}dx$ para los distintos valores de p.
Por el ejemplo anterior sabemos que si p = 1 es divergente. Si suponemos que $p \neq 1$ se tiene:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-p}dx = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{t^{p-1}} - 1\right]$$

Si $p > 1$ entonces $p - 1 > 0$, con lo que cuando $t \to \infty$, $t^{p-1} \to \infty$, y $\frac{1}{t^{p-1}} \to 0$. Con lo que $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{p-1}$ si $p > 1$ y la integral converge.
Si $p < 1$ entonces $p - 1 < 0$ y $\frac{1}{t^{p-1}} \to \infty$ y la integral diverge.

Resumiendo $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ es convergente cuando $p > 1$ y divergente si $p \leq 1$.

Impropias con integrandos discontinuos

Si *f* es una función continua positiva definida en un intervalo finito [a, b) pero tiene asíntota vertical en b. Sea S la región no acotada bajo la gráfica de *f* y arriba del eje X entre a y b. El área de S comprendida entre a y t es $A(t) = \int_a^t f(x)dx$. Si A(t) se aproxima a un número definido A cuando $t \to b^-$, entonces decimos que el área de la región S es A y escribimos:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx.$$

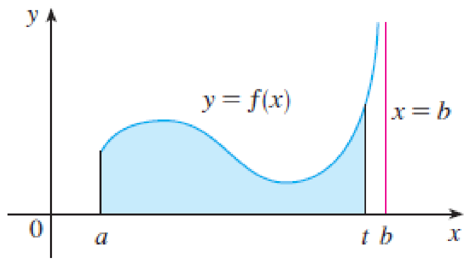


Ilustración 55.- Integral impropia con integrandos discontinuos

Esta definición es útil aún cuando *f* no es positiva.

Podemos definir además la integral impropia si la discontinuidad está en a y *f* se define en (a,b] como $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$.

La integral impropia se dice convergente si existe el límite y si no es divergente. Si la discontinuidad está en un punto intermedio *c*, con $a < c < b$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to c^-} \int_a^t f(x)dx + \lim_{t\to c^+} \int_t^b f(x)dx$$

Ejemplo: $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{t\to 2^+} \int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{t\to 2^+} \left[2\sqrt{x-2}\right]_t^5 = \lim_{t\to 2^+} 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{t-2}\right) = 2\sqrt{3}$. En este caso es convergente!

Ejemplo: $\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1}$

$\int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to 1^-} [\ln(x-1)]_0^t = \lim_{t\to 1^-} (\ln\|t-1\| - \ln\|-1\|) =$
$\lim_{t\to 1^-} \ln(1-t) = -\infty \;\; \to$ Diverge

Teorema de la comparación
Si *f* y g son funciones continuas con $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para $x \geq a$

a) Si $\int_a^\infty f(x)dx$ es convergente entonces $\int_a^\infty g(x)dx$ es convergente
b) Si $\int_a^\infty g(x)dx$ es divergente entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ es divergente.

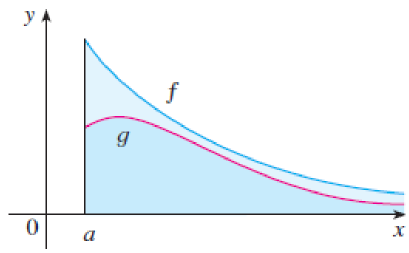


Ilustración 56.- Teorema de la Comparación

Examen Final Julio 2018. Dada la región comprendida entre la gráfica de la función $y = 2x - x^2$ y el eje x . Se pide: Área de dicha región; valor promedio de dicha función sobre el intervalo en que es positiva; volumen que genera dicha región al girar alrededor del eje x.

La función $y = 2x - x^2$ tiene cortes con el eje OX en 0 y 2

$$A = \int_0^2 (2x - x^2)dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

El valor promedio es

$$A = \frac{1}{2-0}\int_0^2 (2x - x^2)dx = \frac{1}{2}\left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2}{3}$$

Y el volumen engendrado alrededor de OX es

$$V = \int_0^2 \pi r^2 = \int_0^2 \pi(2x - x^2)^2 dx = \pi\int_0^2 (4x^2 + x^4 - 4x^3)dx = \pi\left[\frac{4}{3}x^3 + \frac{x^5}{5} - x^4\right]_0^2$$
$$= \frac{16\pi}{15}$$

Examen Final Julio 2018. Calcular, si converge, el valor de la integral $\int_0^\infty x\, e^{-x^2}\, dx$

$$\int_0^\infty x\, e^{-x^2}\, dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t x\, e^{-x^2}\, dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{e^{-x^2}}{-2}\right]_0^t = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2e^{t^2}}\right] = \frac{1}{2}$$