

Tema II: Electroestática en medios materiales.

Conductores en campos electrostáticos. Concepto de capacidad. Materiales dieléctricos. Vectores Polarización y Desplazamiento

Bibliografía: Física. Volumen nº2. Tipler. Editorial Reverté. Física. Volumen nº2. Alonso y Finn. Editorial Addison-Wesley

Conocimientos previos: Las leyes fundamentales de la Mecánica, operaciones vectoriales, concepto de campo eléctrico

Objetivos: Entender como es el campo electroestático en el interior y en las cercanías de un conductor cargado o descargado. Comprender porque decimos que un conductor es un volumen equipotencial. Comprender que la capacidad de un sistema de conductores es una propiedad que depende de la geometría del sistema. Entender como se comportan los materiales dieléctricos en un campo electrostático, así como el significado del vector polarización y las densidades de carga de polarización.

Introducción

Hemos visto que la presencia de cargas eléctricas en un punto cualquiera del espacio, daba lugar a la existencia de un campo eléctrico, que hemos aprendido a detectar por la fuerza que aparecía sobre otra carga, y hemos entendido se encontraba en el aire o en el vacío. En este tema, vamos a estudiar tanto la influencia del medio en la distribución de campos generados por las cargas, como la influencia del campo eléctrico en la “distribución” de las cargas eléctricas que son los átomos y moléculas que forman un medio material.

Desde siempre se ha considerado que existían dos grandes grupos de medios materiales según fuese su comportamiento frente a los campos eléctricos. Así, al hablar de experiencias de triboelectricidad se calificó a los medios como eléctricos o aneléctricos según se manifestara o no con facilidad este fenómeno. Esta primera división de los medios materiales se consolidó cuando se estudió el comportamiento de la materia ante la conducción eléctrica, caso bien distinto del que nos interesa ahora, y con algunas matizaciones, dio lugar a la denominación de conductores (identificados con los metales) y aislantes (identificados con los no metales). La aparición de propiedades de conducción en ciertos no metales, dio paso a la división hoy en uso de los medios materiales como: conductores, semiconductores y dieléctricos. A continuación veremos como se comportan los distintos tipos de medios conductores en el seno de los campo electrostáticos.

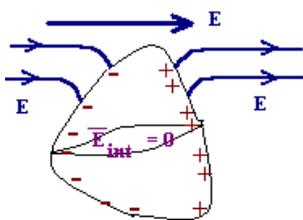
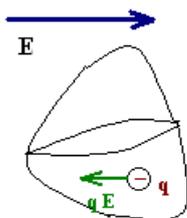
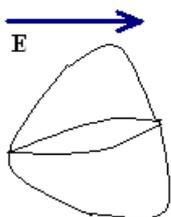
Conductores en campos electrostáticos

Vamos a iniciar el estudio de las interacciones entre campos electrostáticos y medios materiales, analizando el comportamiento de un medio conductor en un campo electrostático. Empezaremos

por comprender como se distribuyen sus cargas en esta situación, para conocer después como son el campo y el potencial en los conductores, terminaremos su estudio analizando el campo y el potencial debido a un conductor cargado, para llegar a entender el significado de la capacidad de un conductor y de un conjunto de ellos.

Distribución de carga en un conductor en equilibrio electrostático

Vamos a considerar ahora un medio conductor que, como sabemos, se caracteriza por la movilidad de los electrones en su volumen, al que supondremos inmerso en un campo electrostático.



Figuras 1, 2 y 3
Representación de la distribución de cargas en un conductor

En primer lugar supongamos que el conductor es neutro (no tiene carga adicional). Sin embargo, en el volumen del conductor existen electrones, que como sabemos se pueden mover con libertad por todo el volumen del conductor. Si el campo eléctrico actúa sobre un electrón, éste se verá sujeto a la acción de una fuerza $\vec{F} = q_e \cdot \vec{E}$ que tenderá a moverle en sentido opuesto al campo, y lo mismo ocurriría con todos los electrones del conductor. Ahora bien, cada electrón que se desplaza en contra del campo (en la figura, hacia la izquierda del conductor), provoca la aparición de una carga positiva en el conductor en el sentido del campo (en la figura, a la derecha). Esta nueva distribución de cargas causa la aparición de un nuevo campo eléctrico, opuesto al original, cuyo valor irá aumentando a medida que se desplazan nuevos electrones en contra del campo, y aparezcan cargas positivas en el otro extremo del conductor.

Este fenómeno se mantendrá hasta que se igualen los módulos del campo exterior aplicado y el nuevo (que se ha generado por el desplazamiento de los electrones) de modo que al final el campo electrostático en el volumen del conductor sea nulo, con lo cual no se ejercerá fuerza alguna sobre los electrones libres que posee el conductor. Por tanto la condición de equilibrio será: “El campo electrostático en el interior de un conductor descargado es nulo”.

Si el conductor está cargado, con una carga “Q” la situación será la misma, pues mientras exista un campo en el volumen del conductor las cargas libres (electrones) se mueven por efecto de ese campo buscando una distribución en la que exista equilibrio, que es aquella en la que el campo en el interior del conductor es nulo, con lo que no existen fuerzas eléctricas sobre las cargas. Este razonamiento nos lleva a que: **“el campo electrostático en el interior de un conductor es siempre nulo”**

Por otra parte, si el campo en el interior del conductor es nulo, aplicando el teorema de Gauss vemos que tiene que ocurrir que cualquier superficie cerrada que consideremos en el interior de ese conductor no debe encerrar ninguna carga, luego **“la carga en un conductor sólo se puede**

distribuir en la superficie del mismo”.

Problema 1.- Un objeto conductor es hueco. Si se introduce una carga puntual "Q" en la cavidad, demuéstrese que se induce una carga "-Q" en la superficie interna de la cavidad.

Consideremos el conductor hueco, cuya sección se representa en la figura, si en su cavidad interior existe una carga "Q", al aplicar el teorema de Gauss para una superficie "Σ" en

el interior del volumen del conductor, se cumplirá: $\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{encerrada}}{\epsilon_0}$.

Como la superficie de Gauss que hemos considerado está toda ella en el volumen del conductor, el campo eléctrico será nulo, lo que significa: $\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$, pero por otro lado

esto obliga a que la carga encerrada en la superficie de Gauss sea nula, como en la cavidad existe la carga "Q", se debe encerrar una carga "- Q". Por estar hablando de un conductor sólo puede estar en una superficie, en este caso la superficie interior del hueco, como nos pedían demostrar.

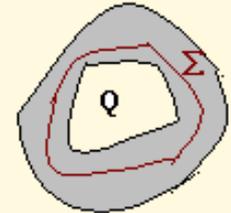


Figure 1 de problemas
La línea roja representa a la superficie de Gauss que consideramos en el volumen del conductor

Potencial eléctrico de un conductor en un campo eléctrico

La primera conclusión que se saca del hecho de que campo electrostático sea nulo en el interior de un conductor, es que: **“los conductores son un volumen equipotencial”**. Si el volumen del conductor no está todo él a un único potencial, existirían al menos dos puntos, de ese volumen que estarían a distinto potencial, lo que significaría que entre ellos existiría un campo electrostático, lo que sabemos no es posible.

Si aplicamos la definición de diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera del conductor, tendremos: $V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$. Según hemos visto, dentro del conductor se cumple siempre

que el campo electrostático es nulo ($\vec{E} = \vec{0}$) luego el integrando de la ecuación anterior es nulo, como sumar muchas veces cero da cero (no confundir con sumar cantidades muy pequeñas cuya suma no tiene por que ser nula) llegamos a que $V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$, luego el volumen del conductor está a potencial constante.

Campo eléctrico en la superficie de un conductor.

Veamos ahora, como tiene que ser al campo en la superficie de un conductor. Supongamos, como se muestra en la figura 4, que el campo no fuese perpendicular a la superficie del conductor,

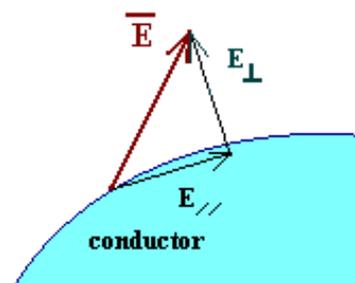


Figure 4
Componentes normal y paralela del campo eléctrico en la superficie de un conductor suponiendo que no fuese perpendicular a ella

podemos descomponer el vector campo en dos componentes una normal y otra paralela a su superficie. La componente paralela a la superficie, provocaría en los portadores (los electrones que se pueden mover libremente por el volumen del conductor) un movimiento paralelo a la superficie, lo que llevaría a una nueva distribución de cargas que modificaría el campo. La situación de equilibrio es aquella en la que no existe movimiento de cargas, lo que sólo ocurre cuando la componente del campo paralela a la superficie se anule. Por tanto, en la situación de equilibrio **“el campo electrostático es perpendicular a la superficie del conductor”**.

Para calcular el valor del campo en la superficie del conductor, consideremos que está cargado con una densidad superficial de carga σ . Calcularemos el valor del campo aplicando el teorema de Gauss, para lo que tenemos que considerar una superficie cerrada. La superficie debe contener

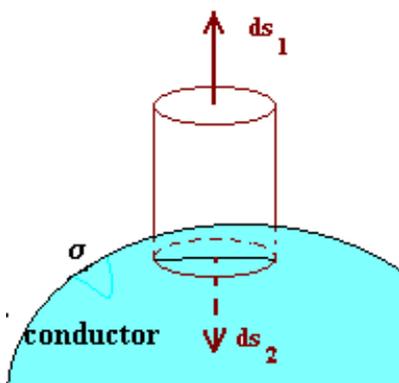


Figure 5

Para calcular el campo en las cercanías de un conductor tomamos como superficie de Gauss un cilíndrico recto una de cuyas bases está en el conductor.

los puntos en los que nos interesa calcular el campo y otros en los que sea fácil conocer el flujo del campo eléctrico. En este caso nos interesa considerar una superficie cilíndrica, como la que se muestra en la figura 5, una de cuyas bases está en el interior del conductor y la otra tan próxima a la superficie como queramos.

Aplicando el teorema de Gauss a esta superficie tendremos:

$$\oint_{\text{Sup cilindro}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{encerrada}}}{\epsilon_0}$$

Calculemos por separado los dos miembros de esta ecuación. El primer miembro lo podemos escribir como:

$$\oint_{\text{Sup cil.}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\text{base 1}} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{\text{base 2}} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{\text{sup lateral}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

calculemos ahora cada integral por separado.

Base 1

El vector superficie es normal a ella y dirigido hacia arriba, el vector campo, si consideramos la carga positiva, también será perpendicular a la superficie del conductor y por tanto a la base 1 del cilindro si la consideramos muy pequeña y tan próxima al conductor como queramos. Por tanto, los vectores campo y superficie son paralelos y:

$$\int_{\text{base 1}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\text{base 1}} E \cdot ds = \{ \text{como la superficie es pequeña el módulo del campo será constante} \} =$$

$$E \int_{\text{base 1}} ds \text{ llamando "S" al área de la sección recta del cilindro que es la superficie de Gauss}$$

$$\text{que hemos elegido, tendremos: } \int_{\text{base 1}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot S$$

Base 2

El vector superficie es normal a ella y ahora dirigido hacia abajo, el vector campo, por estar dentro del conductor será nulo, luego:

$$\int_{\text{base 2}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Superficie cilíndrica

El vector superficie será normal en cada punto a la superficie lateral del cilindro, es decir será horizontal, como el campo en las proximidades del conductor es perpendicular a la superficie del conductor, es decir es vertical, se cumple que los vectores campo y superficie son perpendiculares:

$$\int_{\text{sup lat}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0.$$

Por tanto, el calculo del primer miembro de la ecuación $\int_{\text{sup cil}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot S$

Veamos el valor del segundo miembro de la ecuación: $\frac{Q_{\text{encerrada}}}{\epsilon_0}$, la carga encerrada en el cilindro será exclusivamente la de la superficie del conductor que esté dentro del propio cilindro, si la densidad de carga es σ , y el área de la sección recta "S", la carga total encerrada en el cilindro de Gauss, será: $\sigma \cdot S$.

Igualando los dos términos de la ecuación obtenemos: $E \cdot S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$, es decir que el módulo del

vector campo será: $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, como sabemos que el campo es normal a la superficie del conductor en cada punto. Si llamamos " \vec{u}_n " al vector unitario normal a la superficie en cada punto, tendremos que en las proximidades de un conductor cargado el campo electrostático es:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_n$$

Veamos ahora que sucede en puntos más alejados del conductor, para lo cual vamos a considerar algunos casos sencillos como el de un conductor esférico.

Campo y potencial debidos a una esfera conductora cargada.

Consideremos una esfera conductora de radio "a", que está cargada con una carga +Q. Para calcular la distribución de campos a que dará lugar deberemos tener en cuenta que:

- la carga se sitúa en la superficie
- el campo en la superficie es radial (al ser siempre perpendicular a la superficie)
- la esfera tiene simetría, de manera que girando alrededor de su centro encontramos siempre la misma situación.

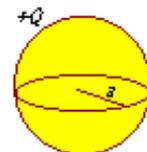


Figure 6
Esquema de una esfera de radio "a" cargada con carga +Q

Estas circunstancias tendrán como consecuencia que la distribución de campos a que de lugar tendrá también la misma simetría que la esfera. Lo que nos lleva a que en cualquier punto exterior:

- el campo será radial, y paralelo o antiparalelo a un vector unitario dirigido según el radio según sea la carga positiva o negativa. Es decir en nuestro caso $\vec{E} = E \vec{u}_r$.
- su módulo es el mismo en todos los puntos del espacio que equidisten del centro de la esfera.

Para calcular el módulo del campo, y considerando la simetría del problema, parece lógico aplicar el teorema de Gauss. En este caso la superficie con la simetría adecuada será otra superficie esférica concéntrica con la esfera generadora del campo, pero de radio "r" que será la distancia al centro de la esfera del punto genérico en el que estamos calculando el valor del campo.

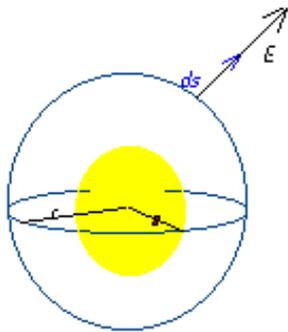


Figure 7
Como superficie de Gauss tomamos una esfera concéntrica con la esfera cargada

Según el teorema de Gauss: $\int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{total}}{\epsilon_0}$. Para calcular el primer miembro tendremos en cuenta que el campo será radial y el vector superficie por definición será normal a la superficie, $d\vec{s} = ds \vec{u}_r$, luego el producto escalar de los vectores campo y diferencial superficie será igual al producto de los módulos $\vec{E} \cdot d\vec{s} = E ds$

Como por simetría cualquier punto de la esfera de radio r es equivalente, el módulo del campo será constante en toda la superficie gaussiana que estamos considerando, luego $\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_{\Sigma} E ds = E \oint_{\Sigma} ds = E(4\pi r^2)$.

Para calcular el segundo miembro de la igualdad, debemos tener en cuenta que la única carga que tenemos encerrada por la superficie gaussiana, es la de la esfera conductora es decir:

$$\frac{Q_{total}}{\epsilon_0} = \frac{+Q}{\epsilon_0}$$

Igualando los dos miembros de la ecuación tenemos:

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}; \text{ el módulo del campo será:}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}, \text{ como sabemos que el campo es radial,}$$

$$\text{escribiremos: } \vec{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r.$$

Lo que nos dice que, a distancias suficientes ($r > a$), el campo generado por la esfera cargada es el mismo que el

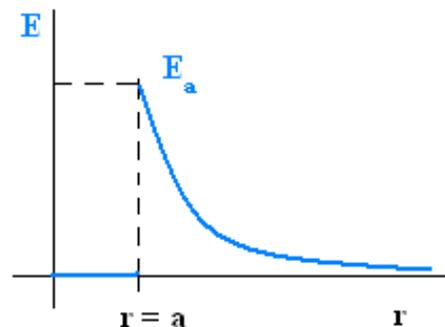


Figure 8
Variación del módulo del campo eléctrico debido a una esfera cargada de radio "a"

que crearía una carga puntual situada en el centro de la esfera.

Como el campo en el interior del conductor debe ser cero, existirá una discontinuidad en la superficie del mismo según se representa en la figura 8, **el módulo del campo en la cara exterior de la superficie valdrá:**

$$E(a)|_{\text{ext}} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 a^2} \text{ mientras que en el interior el campo será nulo.}$$

A partir de la expresión obtenida para el campo eléctrico podemos calcular el potencial teniendo en cuenta que:

$$V(r_B) - V(r_A) = - \int_{r_A}^{r_B} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Para calcular la integral desde el punto "A" hasta el punto "B" exteriores a la esfera, (figura 9), sabemos que podemos elegir cualquier camino, por tanto la podemos calcular yendo desde "A" hasta A' y de A' a "B". Por la estructura del campo, el tramo desde A hasta A' dará integral nula,

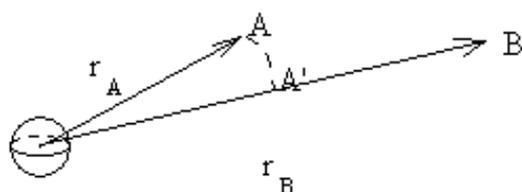


Figure 9

Para ir desde "A" hasta "B", trazamos un arco de circunferencia con centro en el de la esfera que nos define el punto A'

ya que el producto vectorial del campo (vector paralelo a \vec{u}_r) por el vector "movimiento" (vector paralelo a la tangente y en consecuencia perpendicular a \vec{u}_r) será el producto escalar de dos vectores perpendiculares que es nulo. La única contribución será la debida a el tramo entre A' y B en el que el vector "movimiento" es de la forma $d\vec{l} = dl \vec{u}_r$, lo que nos da el producto de dos vectores paralelos, con lo que:

$$V(r_B) - V(r_A) = - \int_{r_A}^{r_B} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{r_A}^{r_B} E dr = - \int_{r_A}^{r_B} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} dr = - \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{-1}{r} \right]_{r_A}^{r_B}; \text{ luego}$$

$$V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right].$$

Al estar la carga en la esfera, y por tanto no existir carga en el infinito podemos tomar como cero el potencial en el infinito ($r_A \rightarrow \infty, V(r_A) \rightarrow 0$), lo que nos permite hablar de potencial en un punto cualquiera exterior a la esfera $V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r}$.

$$V_a = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 a}, \text{ por tanto todos los puntos de el conductor tendrán este mismo potencial.}$$

En los puntos interiores en la esfera cargada, sabemos que el campo debe ser nulo y por tanto el potencial constante. Si consideramos un punto de la superficie del conductor, su valor será

$$V_a = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 a}, \text{ por tanto todos los puntos de el conductor tendrán este mismo potencial.}$$

Si representamos en uno ejes coordenados el valor del módulo del campo eléctrico y del

potencial nos encontramos con lo representado en la figura 10 (representamos en rojo el valor del potencial y repetimos en azul el módulo del vector campo en cualquier dirección del espacio).

La figura nos permite ver que si bien tanto el campo como el potencial disminuyen con la distancia, la variación es mucho más rápida en el caso del campo, lo hace con la segunda potencia de la distancia, mientras el potencial lo hace con la inversa de la distancia.

Por tanto, todos los puntos que estén a la misma distancia del centro de la esfera tendrán el mismo potencial, es decir, las superficies equipotenciales serán esferas de centro él de la esfera cargada, y radio la distancia al centro del punto que consideremos.

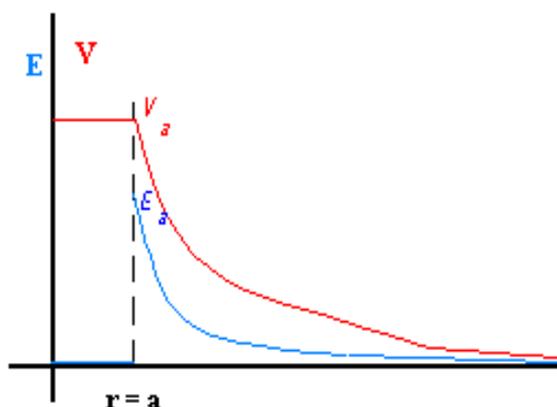


Figure 10
Variación del módulo del campo y del potencial debidos a una esfera cargada

Influencia de la geometría en la distribución de carga en un conductor

Vamos a estudiar cual es la influencia de la forma geométrica de un conductor en su comportamiento desde el punto de vista eléctrico. Para ello, vamos a considerar dos conductores esféricos “A” y “B” de radios “a” y “b” como se muestra en la figura 11. Originalmente supondremos que el conductor “A” está cargado con una carga ($Q_a = Q$) y el segundo descargado ($Q_b = 0$). Esto supondrá que cada uno tendrá un potencial inicial distinto.

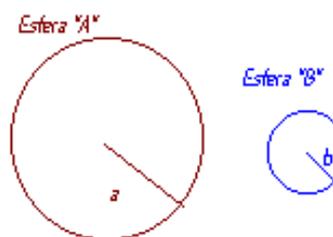


Figure 11
La esfera de radio “a” tiene una carga Q, y la de radio “b” está descargada

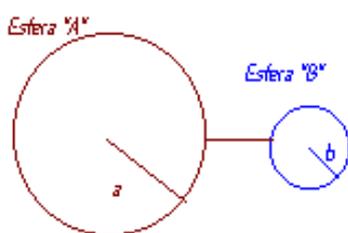


Figure 12
Las dos esferas de la figura anterior unidas por un conductor descargado

Supongamos ahora que los unimos por un hilo conductor muy fino, sin carga, como se muestra en la figura 12, formándose así un único conductor.

Al ser un sistema aislado la carga total se mantendrá constante e igual a Q . Además, al ser ahora un solo conductor su potencial será el mismo en todos los puntos, si bien por comodidad para el cálculo seguiremos hablando de cargas y potenciales de cada esfera, como se indica en la tabla adjunta.

| | Estado inicial | Estado final |
|-------------------------------------------------------------|----------------|--------------|
| Esfera “A” radio “a” densidad de carga σ_a | $Q_a = Q$ | Q_a' |
| | $V_a = V_a$ | $V_a' = V$ |

| | | |
|-------------------------------------------------------------|-------------|------------|
| Esfera "B" radio "b" densidad de carga σ_b | $Q_b = 0$ | Q_b' |
| | $V_b = V_b$ | $V_b' = V$ |

Los potenciales de cada esfera, según hemos calculado más arriba deberían ser: $V'_a = \frac{Q'_a}{4\pi\epsilon_0 a}$

y $V'_b = \frac{Q'_b}{4\pi\epsilon_0 b}$ si bien sabemos se cumple que $V'_a = V'_b = V$, es decir:

$$V = \frac{Q'_a}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{Q'_b}{4\pi\epsilon_0 b}$$

Por otro lado sabemos que la carga se conserva, por tanto: $Q'_a + Q'_b = Q$. De la igualdad de los potenciales obtenemos como relación entre cargas que: $b Q'_a = a Q'_b$ de donde:

$$\frac{Q'_a}{a} = \frac{Q'_b}{b}; Q'_b = b \frac{Q'_a}{a} \text{ luego: } Q'_a + b \frac{Q'_a}{a} = Q; Q'_a = Q \frac{a}{a+b} \text{ y } Q'_b = Q \frac{b}{a+b}$$

lo que nos lleva a que la carga de la esfera de mayor radio es mayor que la carga del conductor de menor radio: $Q'_a > Q'_b$

Al calcular la densidad de carga de cada esfera obtenemos: $\sigma_a = \frac{Q'_a}{4\pi a^2} = Q \frac{a}{a+b} \frac{1}{4\pi a^2}$, lo

que podemos escribir como: $\sigma_a = \frac{Q}{a} \frac{1}{4\pi(a+b)}$, operando de igual forma con la segunda esfera

tendremos: $\sigma_b = \frac{Q}{b} \frac{1}{4\pi(a+b)}$ con lo que las densidades de carga de las esferas son

inversamente proporcionales a sus radios, es decir: $\sigma_a < \sigma_b$

Si recordamos que el valor del módulo del vector campo eléctrico en las cercanías de un conductor es la densidad de carga en el punto dividido entre ϵ_0 ,

tendremos que: $\vec{E}_a = \frac{\sigma_a}{\epsilon_0} \vec{u}_n$ $\vec{E}_a = \frac{Q}{a} \frac{1}{4\pi\epsilon_0(a+b)} \vec{u}_n$ y

$\vec{E}_b = \frac{Q}{b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0(a+b)} \vec{u}_n$, es decir: $|\vec{E}_a| < |\vec{E}_b|$, luego a menor

radio mayor densidad de carga y en consecuencia mayor será el módulo del vector campo eléctrico.

Si consideramos un conductor como el que se muestra en la figura 13, cuyos radios de curvatura son muy distintos, aun cuando todo él este al mismo potencial, el campo en el extremo de radio de curvatura menor (punta) será mucho mayor que el campo en el otro extremo, y las cargas se acumularán en el extremo de menor radio de curvatura.

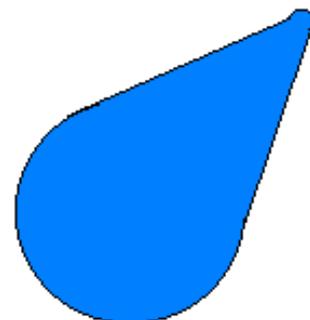


Figure 13
Esquema de un conductor terminado en dos semiesferas de radios muy distintos

Extrapolando la situación, supongamos que uno de los extremos es un plano, es decir, su radio de curvatura es infinito y el otro es una punta de radio de curvatura muy pequeño, el campo en la punta será muchísimo mayor que el campo en el resto del conductor, con lo cual las cargas que puedan estar en las cercanías del conductor caminarán hacia la punta. En esta propiedad de campo intenso en las puntas se funda el pararrayos pues en caso de una tormenta el rayo, que no es otra cosa que un movimiento de electrones sujetos a la acción de un campo capaz de atravesar el aire, lo harán por la zona en la que el campo eléctrico sea más intenso.

Capacidad de un conductor.

En los diversos casos de cálculo del potencial debido a un conductor cargado que hemos realizado, siempre nos encontramos que existe una relación entre la carga que tiene el conductor y el potencial que adquiere, lo cual nos lleva a pensar que podemos establecer la relación que existe entre ambas magnitudes para un conductor, para lo cual se define una nueva magnitud denominada **capacidad de un conductor**, $C = Q/V$, cuya unidad es el culombio partido por voltio, que se denomina faradio.

En los apartados anteriores hemos visto que un conductor cargado es siempre un volumen equipotencial. El valor del potencial que adquiere el conductor depende de su carga, pero también varía según como está distribuida esa carga, y hemos visto que esta distribución depende de la geometría del conductor. Por tanto, la capacidad del conductor será una característica que dependerá exclusivamente de la forma del conductor. Así, por ejemplo, para un conductor esférico el potencial adquirido cuando posee una carga Q es:

$$V = K \frac{Q}{R}, \text{ con lo que } C = \frac{Q}{V} = \frac{QR}{K_e Q} = \frac{R}{K_e}, \text{ o lo que es lo mismo } C = 4\pi \epsilon_0 R, \text{ que}$$

solamente depende del radio

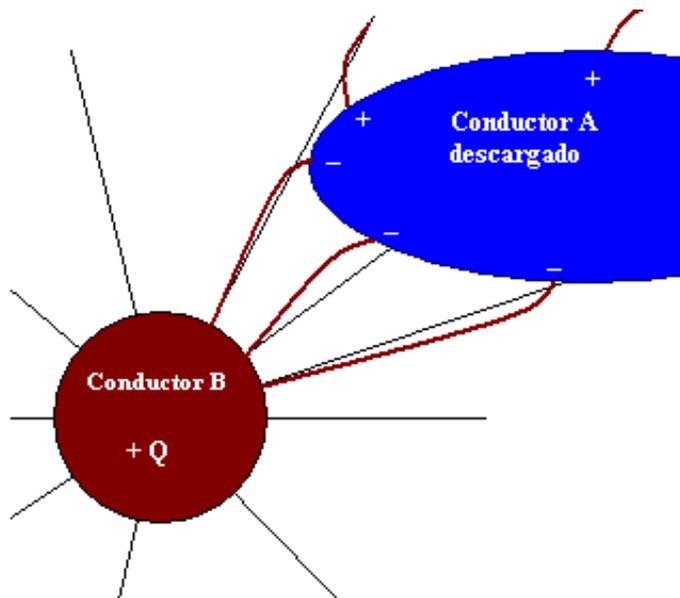


Figure 14

Las líneas de campo del conductor "B", originalmente en negro, se ven distorsionadas por la presencia del conductor "A"

Fenómenos de influencia

Por fenómenos de influencia entendemos los cambios en el potencial eléctrico que sufre un conductor por el mero hecho de estar próximo a otro conductor cargado.

Consideremos que introducimos un conductor "A" en el campo eléctrico creado por otro conductor cargado "B". Analizando la situación desde el punto de vista fenomenológico sabemos que el conductor cargado ("B") generará un campo eléctrico. Al colocar en su cercanía el conductor "A", queda

sometido a los efectos del campo creado por “B” lo que, según hemos visto, provoca una reordenación de las cargas de “A”, de manera que en su interior se cree un campo eléctrico que anule el provocado por “B”. Por tanto, aparecerán cargas negativas en la superficie de “A” próxima al conductor “B”.

Esta reordenación de cargas tendrá varias consecuencias:

- en el conductor “A” aparece un potencial que depende de la reordenación de sus cargas, y por tanto del campo creado por “B” y de la geometría.
- en el exterior del conductor “A” aparece un campo eléctrico, que a su vez altera la distribución de cargas, y por tanto el campo eléctrico y el potencial del conductor “B”

En total, el conductor “B” influye en el “A”, y a su vez lo que le sucede al conductor “A” influye en el “B”. Esta situación continuará hasta que se logre un equilibrio.

Un caso especial se produce en la práctica cuando dos conductores próximos reciben cargas del mismo valor y de signo contrario. En esta configuración, que recibe el nombre de **condensador**, también existirán fenómenos de influencia de un conductor sobre el otro de manera que al final se logrará una distribución de carga, dentro de cada conductor, para que finalmente exista un equilibrio. En ese momento cada uno de los dos conductores (que reciben el nombre de placas del condensador) tendrá una carga $+Q$ o $-Q$, y cada uno adquirirá un potencial diferente, pero constante para cada uno de ellos, de forma que se establece entre ambos una diferencia de potencial V .

De la misma forma que en el caso de un conductor único, el potencial de cada conductor, y por tanto la diferencia de potencial entre ellos dependerá de su carga y de la geometría (en este caso tanto de la forma y tamaño de cada conductor como de su posición relativa). Por consiguiente, también puede definirse la capacidad del condensador como la relación entre la carga (que en este caso es la de una de las placas) y la diferencia de potencial entre ellas, y también veremos que en este caso solo dependerá de la geometría de la configuración.

Capacidad de distintos tipos de condensadores.

Existen distintos tipos de condensadores en función de su geometría. Los más usuales son el condensador de placas plano paralelas, el condensador esférico y el condensador cilíndrico.

Condensador de placas plano paralelas.

Se compone de dos caras paralelas muy próximas de superficie “A” y separadas una distancia “d”, de forma que una tiene carga $+Q$ y la otra $-Q$. Esta configuración produce entre las placas un campo constante y uniforme.

Para calcular su capacidad partimos de que el campo creado por un plano cargado con densidad de carga σ en un punto próximo a su superficie viene dado por $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ perpendicular a la superficie. El campo en un punto del espacio comprendido entre las placas será la suma de los

creados por cada una de ellas, y como ambos serán de sentido contrario al ser sus cargas de distinto signo, en total obtenemos que el módulo del campo es: $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, y dado que el campo es

constante en todos los puntos de la región comprendida entre las placas, la diferencia de potencial entre ellas la podemos calcular como el producto de los módulos campo y distancia entre placas,

es decir será: $V = E \cdot d = \frac{\sigma \cdot d}{\epsilon_0} = \frac{Q \cdot d}{A \cdot \epsilon_0}$

con lo que la capacidad del condensador queda: $C = \frac{Q}{V} = \frac{Q \cdot A \cdot \epsilon_0}{Q \cdot d} = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{d}$

Condensador esférico

Un condensador esférico está formado por una esfera conductora de radio “a” y concéntrica con ella una corteza esférica de radio interior “b”, de forma que en la cara interior de la corteza y en

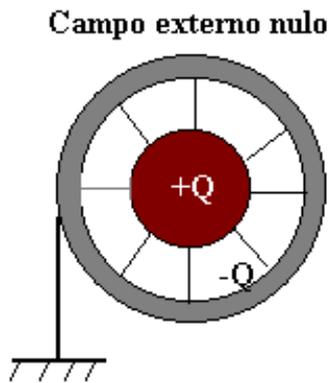


Figure 15
Esquema de un condensador esférico

la esfera interior existan cargas iguales “Q” y de signo contrario, distribución que puede conseguirse como indica la figura 15. Para calcular su capacidad procedemos de la misma forma que en el caso anterior. Sabemos que aplicando el teorema de Gauss a una superficie esférica concéntrica con los conductores que pase por un punto del espacio comprendido entre ellos, el campo eléctrico puede calcularse suponiendo que existe una carga Q en el centro de la esfera, con lo que la diferencia de potencial que existirá entre el conductor interior y el exterior será:

$$V(a) - V(b) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right]$$

Con lo que la capacidad quedará: $C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right]$

$= 4\pi\epsilon_0 \left[\frac{ab}{b-a} \right]$, que solamente depende de la geometría del condensador.

Problema 2.- Un condensador que consta de dos placas paralelas muy próximas, de superficie 10 cm² separadas 10⁻⁵ m. Se carga hasta que adquiere una diferencia de potencial de 50 V.

- a) Determinar la distribución de potenciales entre sus placas.
- b) La capacidad del condensador.
- c) La carga que adquiere.

a) Datos

Permitividad del vacío $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$

Superficie de las placas $S = 10^{-3} \text{ m}^2$

Separación entre las placas $d = 10^{-4} \text{ m}$

Para determinar la distribución de potenciales que tenemos entre las placas, podríamos calcularlo por integración directa o calculando el campo creado por una de ellas (un plano conductor cargado) en un punto cualquiera del espacio y a partir de el campo obtener el potencial en un punto cualquiera. Dada la simetría del problema emplearemos el teorema de Gauss para calcular el campo y por la definición de potencial obtener este.

Como el módulo del campo dependerá de la distancia a la carga, la simetría del problema nos lleva a tomar como superficie de Gauss un prisma recto una de cuyas bases estará en el conductor (en la figura se representa un corte de esta situación).

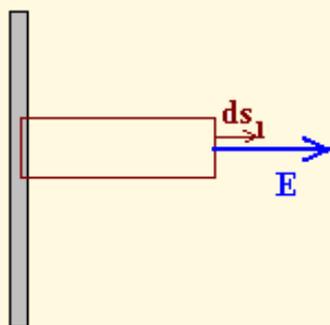


Figure 2 de problemas
Corte del plano conductor que es una placa del condensador

El teorema nos dice: $\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{encerrada}}{\epsilon_0}$, como siempre calcularemos cada uno de los términos de la igualdad por separado.

La $\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s}$ la calcularemos como: $\int_{base 1} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{base 2} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{sup lat} \vec{E} \cdot d\vec{s}$

En la base "1" el campo y el vector superficie son paralelos, luego será el producto de los módulos, que al depender el campo sólo de la distancia al plano será una constante en la integral, con lo que tenemos: $\int_{base 1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{base 1} E \cdot ds = E \int_{base 1} ds = E S$; siendo "S" el área de la base la superficie de Gauss que hemos considerado.

En la base "2" el campo es nulo, pues estamos en un conductor. Luego $\int_{base 2} \vec{E} \cdot d\vec{s} =$

0.

En la superficie lateral los vectores campo y superficie son perpendiculares luego su producto escalar es nulo: $\int_{sup lat} \vec{E} \cdot d\vec{s}$

= 0. Por tanto $\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E S$

Calculemos el segundo miembro. Como sólo existe carga en el conductor, tendremos que la carga encerrada será: $\sigma \cdot S$; siendo " σ " la densidad de carga del conductor. Igualando los dos miembros tenemos: $E \cdot S = \frac{\sigma \cdot S}{\epsilon_0}$; por

tanto el campo será: $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}$, donde \vec{u} es un vector unitario perpendicular

al plano cargado. (Observar que ahora hemos calculado el campo de distinta forma que en la parte teórica, pero sin embargo el resultado ha sido el mismo).

Para calcular la distribución de potenciales tendremos en cuenta, como siempre, que:

$$V(r) - V(r_A) = - \int_{r_A}^r \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{Siendo } r \text{ la posición de un punto intermedio}$$

cualquiera entre r_A y r_B .

Para ir desde r_A hasta r_B el vector desplazamiento es antiparalelo al campo eléctrico (suponemos que el potencial en r_b es mayor que en r_a), y como este no depende de la distancia, pues su módulo hemos visto vale $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$, la integral

nos queda: $V(r) - V_A = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (r - r_a)$, o lo que es lo mismo: $V(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} r - \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} r_A - V_A \right)$, que es expresable por: $V(r)$

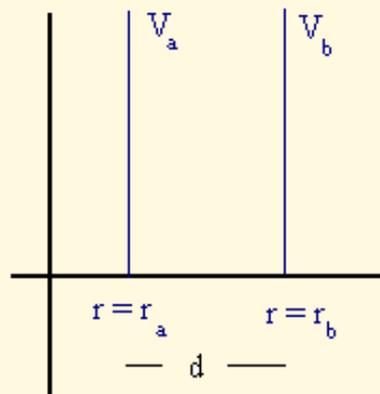


Figure 3 de problemas
En los planos $r = a$ y $r = b$ los potenciales son constantes

$$= A r + B$$

$$V(r) = A r + B$$

b) Para determinar la capacidad del condensador debemos conocer la diferencia de potencial entre las placas del condensador $V_B - V_A = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (r_b - r_a)$, teniendo en cuenta que hemos llamado "d" a la distancia entre los planos

obtenemos: $V_B - V_A = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$.

Recordando que la densidad de carga será la carga del plano dividida entre la superficie de la placa, podemos

escribir: $V_B - V_A = \frac{d}{\epsilon_0} \frac{Q}{S}$, luego la capacidad será: $C = \frac{Q}{V} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$ $C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$

La capacidad del condensador será: $C = 8.85 \times 10^{-12} \frac{10^{-3}}{10^{-4}} = 8.85 \times 10^{-13} \text{ F}$

$$C = 8.85 \times 10^{-13} \text{ F} = 8850 \text{ nF}$$

c) Para calcular la carga que adquiere el condensador tendremos en cuenta la relación entre carga capacidad y diferencia de potencial entre placas: $C V = Q$, luego la carga que será el producto de la capacidad por la diferencia de potencial será: $Q = 4.4 \cdot 10^{-11} \text{ C}$

$$Q = 4.4 \cdot 10^{-11} \text{ C}$$

Asociación de condensadores.

En los circuitos eléctricos es frecuente que nos encontremos dos o más condensadores conectados entre sí. Si tenemos dos condensadores podemos unirlos en serie o en paralelo según se conecten la placa de un signo del primero con la del otro signo del segundo (serie), o las placas del mismo signo de los dos condensadores entre sí (paralelo).

Condensadores en serie.

Al conectar la placa positiva de un condensador con la negativa del otro, el conjunto es equivalente a un condensador formado por las placas externas (no conectadas entre sí), entre las que existirá una diferencia de potencial igual a la suma de las diferencias de potencial de cada uno de los condensadores. Para que el conjunto forme un condensador único las placas extremas deberán tener la misma carga, de forma que:

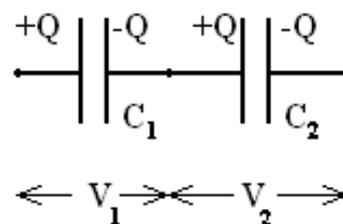


Figure 16
Esquema de dos condensadores conectados en serie

| | Carga | Diferencia de potencial | Capacidad |
|-------------------------|-------|-------------------------|---------------|
| Condensador 1 | Q | V_1 | $C_1 = Q/V_1$ |
| Condensador 2 | Q | V_2 | $C_2 = Q/V_2$ |
| Condensador equivalente | Q | $V = V_1 + V_2$ | $C = Q/V$ |

para buscar la expresión de C en función de C_1 y C_2 , vemos que podemos sumar las inversas de las capacidades parciales, ya que al tener entonces el denominador común la expresión resulta

sencilla, y $\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{V_1}{Q} + \frac{V_2}{Q} = \frac{V}{Q} = \frac{1}{C}$. es decir: la inversa de la capacidad equivalente es la

suma de las inversas de cada uno de los condensadores asociados en serie.

Condensadores en paralelo

Al conectar las placas con carga del mismo signo, el conjunto equivale a otro condensador con una sola placa de cada signo en la que existe una carga igual a la suma de las cargas de cada una de las placas, de forma que entre todas las placas positivas y las negativas existe la misma diferencia de potencial. Por tanto:

| | Carga | Diferencia de potencial | Capacidad |
|-------------------------|-----------------|-------------------------|-----------------|
| Condensador 1 | Q_1 | V | $C_1 = Q_1 / V$ |
| Condensador 2 | Q_2 | V | $C_2 = Q_2 / V$ |
| Condensador equivalente | $Q = Q_1 + Q_2$ | V | $C = Q/V$ |

Para buscar la expresión de la capacidad equivalente, sustituimos en la expresión de C , con lo que:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q_1 + Q_2}{V} = \frac{Q_1}{V} + \frac{Q_2}{V} = C_1 + C_2 .$$

Por tanto, el condensador

equivalente a varios condensadores en paralelo tiene una capacidad igual a la suma de las capacidades de cada uno de los condensadores asociados.

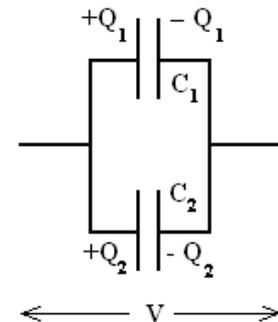


Figure 17
Esquema de dos condensadores conectados en paralelo

Electrostática en materiales dieléctricos

Hasta el momento hemos visto que ocurre cuando un conductor se encuentra en un campo eléctrico, veremos ahora que ocurre con los dieléctricos.

Por una parte, se observan algunos fenómenos relacionados con este tipo de materiales, por ejemplo, cuando se introduce un material dieléctrico entre las placas de un condensador, se comprueba que aumenta su capacidad, es decir, puede almacenar más carga con la misma diferencia de potencial entre placas. Por otra parte, sabemos que en los medios dieléctricos no existe la posibilidad de movimiento de los electrones en su volumen debido a que los electrones de cada átomo o molécula que componen el material se encuentran por tanto fuertemente ligados a ella. Pero, para poder explicar fenómenos como el mencionado es preciso que cuando el dieléctrico se encuentra en un campo eléctrico sucedan en su estructura atómica o molecular algunas modificaciones.

El fenómeno de la polarización

Para comenzar a analizar lo que ocurre cuando se sitúa un material dieléctrico en una región del espacio en la que existe un campo eléctrico analicemos en primer lugar, lo que ocurre a nivel microscópico, desde el punto de vista fenomenológico. Dado que el tipo de molécula va a condicionar la respuesta, examinaremos los distintos casos que se pueden presentar empleando modelos sencillos.

Supongamos en primer lugar que las moléculas con enlace covalente. En este caso la molécula puede ser polar o no polar según no coincidan (no polar) o si coincidan los “centros de gravedad” de las cargas positivas y negativas. En el caso de las moléculas polares, cada una de ellas tiene un momento dipolar ya que se puede asimilar a un dipolo. En el caso de las moléculas no polares, en una primera aproximación, podremos suponer que los electrones que forman el enlace forman una nube electrónica que envuelve completamente a la molécula, con lo cual cada molécula de la sustancia se puede representar, de la misma manera que ocurre con los átomos, por dos esferas concéntricas de radios muy distintos (ver figura 18), la interna con carga neta positiva y la externa con carga negativa.

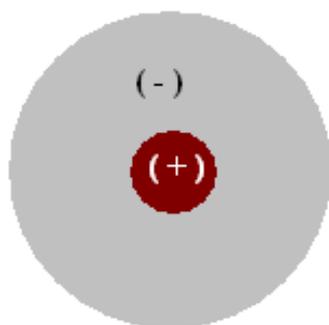


Figure 18
Representación de una molécula covalente muy simétrica

La aplicación de un campo eléctrico externo al material en cuestión, provocará el arrastre de la nube electrónica externa en sentido contrario al campo, mientras que el resto de la molécula (o el núcleo del átomo en el caso de moléculas monoatómicas) sufrirá un desplazamiento en el mismo sentido del campo al ser una carga positiva. El resultado será la deformación de la molécula, ya que el campo, en general en el caso de los dieléctricos, no será suficiente para arrancar un electrón de la corteza.

Esa deformación dará lugar a la separación de los centros de gravedad de las cargas positivas y negativas, lo que puede considerarse como la aparición de una carga neta positiva, separada de la negativa una distancia muy pequeña frente a la de observación, es decir, cada molécula puede ser sustituida por un dipolo paralelo al campo eléctrico y cuyo módulo dependerá del desplazamiento relativo de los centros de cargas y del valor de estas. Podemos decir que el campo eléctrico a polarizado la molécula con un momento dipolar que dependerá de la naturaleza del material y del valor del campo que actúe. Dado que todas las moléculas del material son iguales, todos los momentos magnéticos de cada una de las moléculas tendrán la misma dirección y sentido, con lo que, en conjunto, el material adquirirá un momento dipolar suma de los momentos dipolares de cada una de las moléculas.

Supongamos ahora que el material del que estamos hablando está formado por moléculas polares, por lo que cada una de ellas tiene ya un momento dipolar permanente.

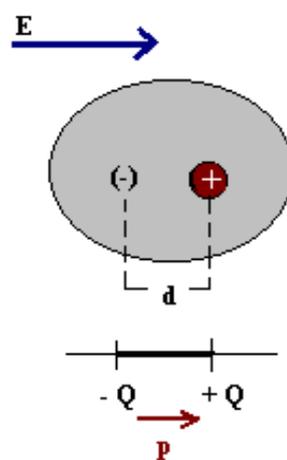


Figure 19
Deformación sufrida por una molécula simétrica, por efecto del campo eléctrico aplicado

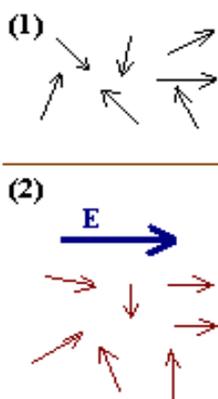


Figure 20
Representación de los dipolos permanentes de un fluido dipolar en ausencia y presencia de campo eléctrico. En (2) los dipolos están algo ordenados en el sentido del campo

Consideremos el caso más sencillo, es decir que sus moléculas están ordenadas totalmente al azar, por lo que no tienen porque presentar, desde el punto de vista macroscópico, un momento dipolar. La aplicación de un campo eléctrico dará lugar a la aparición de pares de fuerzas que producirán pequeñas rotaciones en las moléculas de forma que todas se orientarán tendiendo a la misma dirección con lo que aparecerá un momento dipolar resultante. De nuevo, el módulo de ese momento dipolar dependerá de la facilidad de reorientación de los dipolos ya existentes, es decir del medio de que se trate, y del módulo del campo eléctrico actuante.

Además de los dieléctricos constituidos por moléculas covalentes, existen otros cuya estructura se debe a un enlace iónico. Como ejemplo hemos tomado el cloruro sódico, al ser una red en la que en sus vértices se encuentran iones negativos y positivos, (Cl⁻) (Na⁺) (en la figura 21 sólo se ha puesto el símbolo del átomo). Al aplicar un campo eléctrico los iones positivos se verán empujados por el campo, mientras que los negativos se

desplazarán en sentido contrario. El resultado será la aparición de momentos dipolares de resultante no nula dirigida en la misma dirección y sentido del campo. El módulo del momento dipolar resultante dependerá, de nuevo, del valor del campo actuante y de lo fácil o difícil que sea desplazar los iones de su posición de origen, es decir de la naturaleza de la sustancia.

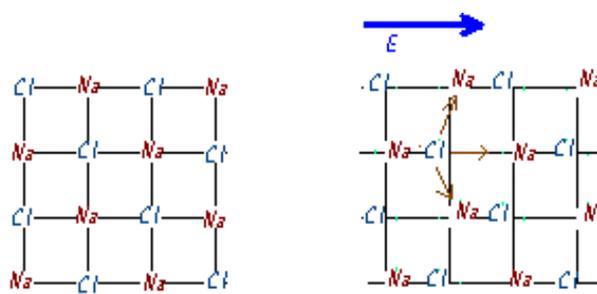


Figure 21
Representación de una estructura iónica en ausencia y en presencia de campo eléctrico

Vector polarización. Susceptibilidad eléctrica.

Del estudio fenomenológico anterior podemos inferir, que cuando un material dieléctrico cualquiera se encuentra en el seno de un campo eléctrico, cada una de sus moléculas tiene asociado un momento dipolar, aun cuando inicialmente no existiera dipolo alguno. Si consideramos un volumen cualquiera de dieléctrico, existirán en él un cierto número de dipolos de manera que podemos caracterizar el material por la **densidad de dipolos del material por unidad de volumen**, que llamaremos **vector polarización** o simplemente **polarización** (\vec{P}), de forma que si cada molécula tiene un momento dipolar \vec{p} y la sustancia tiene “N” moléculas por unidad de volumen es evidente que $\vec{P} = N\vec{p}$, al ser la polarización la densidad de momentos dipolares moleculares.

Como no todos los materiales son homogéneos e isotrópicos, está magnitud debe caracterizar punto a punto la sustancia, es decir debe ser una función vectorial definida en cada punto. Si queremos tener el valor en cada punto del vector polarización, el volumen que debemos considerar para definir esa densidad de momentos dipolares debe ser tan pequeño como necesitemos para rodear

sólo el punto en cuestión, es decir: $\vec{P} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta\tau}$; $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}$.

Las unidades del vector polarización serán las de un momento dipolar (culombios \times metro) divididas entre un volumen (m^3), es decir culombios \times metro⁻².

Este vector polarización dependerá por un lado del campo eléctrico, que es su origen, y del tipo de material del que se trate. En la mayoría de los materiales el vector polarización es directamente proporcional al campo, $\vec{P} \propto \vec{E}$, de forma que se puede introducir una constante de proporcionalidad que debe depender del medio y que escribiremos como $\chi_e \epsilon_0$; $\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$. Esta nueva constante “ χ_e ” característica del material se denomina **susceptibilidad eléctrica del medio**.

Analizando dimensionalmente la ecuación anterior se obtiene que la susceptibilidad así definida no tiene dimensiones

Densidades de carga de polarización

Según hemos dicho antes, cuando una sustancia se polariza aparece en su volumen una nueva distribución de cargas distinta de la del material en “reposo”. Esta reordenación interna de las cargas de la sustancia podrá dar lugar a que al considerar un volumen de la sustancia o un área de su superficie aparezca una densidad no nula de cargas.

Densidad superficial de cargas de polarización

Para analizar esta situación desde el punto de vista fenomenológico, vamos a considerar el caso de un material dieléctrico situado entre las placas de un condensador de placas planoparalelas, de forma que ambos tengan la misma superficie. En primer lugar consideremos que el medio dieléctrico es homogéneo e isótropo, es decir que su comportamiento es análogo en todos sus puntos. Por otra parte sabemos que el campo eléctrico creado por un condensador plano paralelo también puede considerarse homogéneo en todos los puntos del interior del condensador.

En estas condiciones el campo eléctrico creado en el interior del condensador orienta los dipolos del material dieléctrico en dirección paralela al campo, de forma que si consideremos una capa muy fina del paralelepípedo cuyo espesor venga definido por “d”, como se indica en la figura 22, sobre la superficie del dieléctrico paralela a la placa positiva del condensador aparecerá un exceso de carga negativa. De la misma forma, en la cara de dieléctrico próxima a la placa negativa aparecerá un exceso de carga positiva.

Si llamamos “N” al número de moléculas por unidad de volumen del material y “ q_p ” a la carga producida en cada una de ellas por la polarización, tendremos que la carga en esa capa superior (Q_p) será igual al número de moléculas por unidad de volumen multiplicado por el volumen que consideremos y por la carga de cada molécula, es decir:

$$Q_p = N (A d) q_p = A N p$$

siendo p el módulo del momento dipolar molecular (\vec{p}). La densidad superficial de carga de polarización σ_p será: $\sigma_p = Q_p / A = N p$, que es precisamente

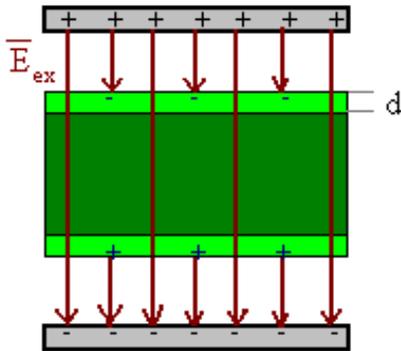


Figure 22
Representación del fenómeno de polarización dieléctrica

el módulo del vector polarización (\vec{P}) para un medio como el que hemos supuesto. Luego en estas condiciones (caras perpendiculares al campo) podemos decir que la densidad superficial de carga coincide con el módulo del vector polarización $\sigma_p = |\vec{P}|$.

En las caras laterales del dieléctrico no aparece carga superficial alguna debido a que el campo es paralelo a esta superficie y por tanto a la dirección en la que aparecen los dipolos, con lo que, de forma general escribiremos:

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

Esta densidad superficial de carga de polarización existe solamente cuando el dieléctrico está sometido a la acción del campo exterior, de manera que cuando desaparece el campo desaparecerán las cargas de polarización. En el ejemplo del condensador, si conectamos sus placas a tierra su carga desaparecerá por el hilo conductor al que esté unido el condensador para descargarse y por consiguiente desaparecerá el campo eléctrico. Sin embargo, las cargas de polarización, si bien es cierto que existen, no podrán viajar por el conductor al estar ligadas a la estructura del material, y lo que ocurrirá es que la densidad superficial de carga desaparecerá por reordenamiento de las moléculas (despolarización del material).

Densidad volúmica de carga de polarización

Veamos ahora lo que ocurre en el interior del material dieléctrico. Si el material es homogéneo todos los dipolos están igualmente orientados, con lo que en cualquier punto interior cada extremo positivo estará próximo al negativo de otro dipolo con lo que en conjunto no aparecerá densidad volúmica de carga.

Consideremos ahora un material cuya polarización no sea homogénea. Si tomamos un pequeño elemento de volumen imaginario (τ) en el interior del material que esté rodeado por una superficie " Σ ", no todos los dipolos contenidos son iguales, con lo que no tienen por qué anularse unos con otros, luego puede aparecer una carga en el volumen de forma que se puede definir una densidad volúmica de carga de polarización tal que $\Delta Q_p = \int_{\tau} \rho_p d\tau$

Vector desplazamiento eléctrico. Permitividad dieléctrica

Veamos que ocurre cuando cargamos un material dieléctrico. La existencia de cargas libres en el interior del dieléctrico dará lugar a la aparición de un campo eléctrico creado por ellas, este

campo eléctrico actuará sobre el propio dieléctrico de la misma forma que hemos visto en el caso de que el campo fuese exterior, de manera que polarizará el dieléctrico dando lugar a al aparición de densidades de cargas de polarización.

Para analizar lo que sucede en el interior del dieléctrico aplicaremos el teorema de Gauss. Tomemos como superficie gaussiana, una superficie cualquiera cerrada, situada en el interior del volumen del dieléctrico, como se muestra en la figura. Según el teorema de Gauss:

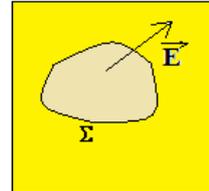


Figure 23
Superficie imaginaria en el interior del medio

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{total}}}{\epsilon_0} . \text{ La carga encerrada es tanto la carga libre como la carga de}$$

polarización del dieléctrico, es decir: $Q_{\text{total}} = Q_{\text{libre}} + Q_{\text{polarización}}$; con lo que podemos escribir

$$\epsilon_0 \cdot \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{libre}} + Q_{\text{polarización}}$$

pero sabemos que la densidad de carga de polarización está relacionada con el vector polarización, y que crea un campo en sentido contrario del exterior (debido a la orientación de los dipolos) de forma que

$$Q_{\text{polarización}} = \oint \vec{P} \cdot d\vec{s}$$

con lo que en total podemos poner al ser el campo creado por las cargas de polarización de sentido contrario al campo exterior \vec{E} queda

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{libre}} - \oint \vec{P} \cdot d\vec{s} , \text{ de donde } \epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} + \oint \vec{P} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{libre}} , \text{ expresión que podemos}$$

escribir de forma:

$$\oint (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{s} = Q_{\text{libre}}$$

A la suma comprendida en el paréntesis la denominamos vector desplazamiento $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

de forma que podemos escribir $\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{libre}}$

esta expresión es similar a la del teorema de Gauss considerando el vector desplazamiento en lugar del vector campo y teniendo en cuenta solamente las cargas libres, por lo que se conoce como la **ley de Gauss para medios materiales**. La ventaja de utilizar el vector desplazamiento es que al estar relacionado solamente con las cargas libres es independiente del medio en el que nos encontramos.

Para calcular el vector campo eléctrico a partir del vector desplazamiento veremos como están relacionados a partir de la definición del vector desplazamiento $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

Como sabemos que el vector polarización es proporcional al vector campo que le origina de forma que $\vec{P} = \chi_e \vec{E}$, queda: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$.

El producto $\epsilon_0 (1 + \chi_e)$, que nos relaciona el campo eléctrico en el medio con el nuevo vector desplazamiento, sólo depende de las características del dieléctrico, lo llamaremos **permitividad dieléctrica del medio**, que representaremos por ϵ , con lo que el vector desplazamiento y el campo eléctrico estarán relacionados por: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$.

Normalmente se emplea la *permitividad relativa* del medio que es la relación entre la permitividad dieléctrica y la permitividad del vacío: $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0(1 + \chi_e)}{\epsilon_0} = (1 + \chi_e)$, la relación: $\epsilon_r = (1 + \chi_e)$, entre los dos parámetros característicos del dieléctrico es la primera relación constitutiva del medio. A partir de ella podemos escribir: $\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$.

Esta expresión nos permite resolver el cálculo del campo eléctrico en cualquier material de una manera más sencilla, ya que podemos hallar el vector desplazamiento producido por las cargas libres, con lo que su valor se conserva independientemente del material que ocupe el espacio en el que se ha calculado. Si ahora ese espacio está ocupado por un dieléctrico podemos calcular el vector campo eléctrico en el material sin más que multiplicar el vector desplazamiento por la permitividad dieléctrica del medio, de forma que el vector campo es diferente según el material de que se trate.

Vamos a analizar y afianzar los conceptos en el siguiente ejemplo, que nos servirá de resumen de lo visto para los materiales dieléctricos.

Problema 3.- Se electriza una esfera de médula de saúco (de permitividad relativa 8), de 5 cm de radio, obteniéndose una distribución de carga de la forma $\rho(r) = 3 \times 10^{-12} r$ culombios/m³.

a) Calcular el campo y el desplazamiento eléctrico en todos los puntos del espacio.

Se recubre esta esfera con una corteza de radios 6 y 8cm, formada por un material de permitividad relativa 15.

b) Calcular ahora el campo y el desplazamiento eléctrico en todos los puntos del espacio.

c) Calcular el vector polarización en la corteza dieléctrica.

d) Calcular las densidades superficiales de carga de polarización en la corteza

e) Calcular la carga total en el volumen de la misma.

Datos

Radio de la esfera (a) = 5 cm = 5×10^{-2} m

Permitividad de la esfera (ϵ_r) = 8

Densidad de carga $\rho(r) = 3 \times 10^{-12} r$ culombios m⁻³

a) Nos piden calcular el campo y el desplazamiento eléctrico creado por la distribución en todos los puntos del espacio, tenemos dos regiones perfectamente diferenciadas: los puntos interiores y los puntos exteriores a la esfera.

a.) Consideremos primero los puntos interiores ($r < a$)

Como estamos en un dieléctrico, para calcular el campo y el desplazamiento, podemos recurrir al teorema de Gauss para dieléctricos, que en general será la forma más sencilla de calcular el campo al estar ligado exclusivamente a las cargas libres, y que nos dice: $\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{libre}}$. Tendremos que encontrar una superficie de Gauss que este de acuerdo con la distribución de carga que tenemos. La simetría del sistema implica que la superficie a considerar será una esfera, de radio (r), concéntrica con la distribución. Para aplicar el teorema de Gauss, debemos calcular cada uno de sus miembros.

El primero $\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{s}$ nos obliga a pensar como será el forma del vector desplazamiento a que de lugar la distribución, por simetría esta forma no puede ser otra que vectores radiales, $\vec{D} = D \vec{u}_r$. De otro lado el vector superficie, al ser normal a ésta, será de la forma $d\vec{s} = ds \vec{u}_r$, lo que nos lleva a que el producto escalar de ambos vectores será el producto de módulos. $\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{s} = \oint_{\Sigma} D ds$. Como la distribución de carga varía con la distancia al centro de la esfera (el radio de la superficie gaussiana), el vector desplazamiento tendrá el mismo módulo en todos los puntos que equidisten del centro de la esfera: $\oint_{\Sigma} D ds = D \oint_{\Sigma} ds$, y la integral de "ds" en estas condiciones será: $4\pi r^2$. Luego: $\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{s} = 4\pi r^2 D(\vec{r})$

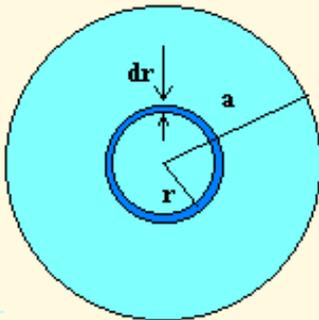


Figure 4 de problemas
Para calcular la carga encerrada por la superficie de Gauss, toamos como volumen elemental una casaca esférica de radio r y espesor dr

Vamos a calcular el segundo miembro, que es la carga libre encerrada en la esfera de Gauss. Como nos dicen que se distribuye según la densidad de carga $\rho(r) = 3 \times 10^{-12} r$ culombios m^{-3} , que por comodidad escribiremos como: $\rho(\vec{r}) = Kr$, con lo que tendremos:

$$Q_{\text{libre}} = \int_{\text{volumen esfera}(\tau)} \rho(\vec{r}) d\tau = \int_{\tau} Kr d\tau$$

el diferencial de volumen (ver figura 4 de problemas) será el producto del área de la superficie esférica por la altura diferencial: $d\tau = 4\pi r^2 dr$; $Q_{\text{libre}} = \int_0^r (Kr) (4\pi r^2 dr) = 4\pi K \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^r = \pi K r^4$.

Igualando los resultados obtenidos para ambos miembros tenemos: $4\pi r^2 D(\vec{r}) = \pi K r^4$. El vector desplazamiento en los puntos interiores, será:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \frac{K}{4} r^2 \vec{u}_r$$

Conocida la expresión del desplazamiento eléctrico para puntos interiores podemos calcular el campo eléctrico recordando la relación entre ambos: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$. Luego: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{K}{4\epsilon} r^2 \vec{u}_r$, o lo que es lo mismo:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{K}{4 \epsilon_r \epsilon_0} r^2 \vec{u}_r$$

Substituyendo valores en ambas expresiones obtenemos para " $r < a$ ":

$$\vec{D}(\vec{r}) = 7.5 \times 10^{-13} r^2 \vec{u}_r \text{ C} \cdot \text{m}^{-2} \quad \text{y} \quad \vec{E}(\vec{r}) = 1.06 \times 10^{-2} r^2 \vec{u}_r \text{ V / m}$$

a) Puntos exteriores a la distribución "r > a"

En el caso de puntos exteriores a la distribución tendremos el campo creado por una carga esférica, que como sabemos se corresponde con el creado por una carga puntual situada en el centro de la distribución y cuyo valor sea el de la carga total de la esfera. Podríamos aplicar el teorema de Gauss, tomando una superficie de Gauss que fuese una esfera concéntrica, de radio "r", como la mostrada en la figura 5 de problemas y obtendríamos:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q_{total}}{r^2} \vec{u}_r .$$

Tendremos que calcular la carga total encerrada en el volumen de la esfera que será:

$$Q_{total} = \int_{esfera} \rho(\vec{r}) d\tau , \text{ como el caso de puntos interiores, el elemento de volumen será}$$

una cáscara esférica de espesor "dr", por tanto:

$$Q_{total} = \int_0^a (Kr)(4\pi r^2 dr) = \pi K a^4 , \text{ el campo debido a la distribución será:}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\pi K a^4}{r^2} \vec{u}_r , \text{ es decir} \quad \vec{E} = \frac{1}{4\epsilon_0} \frac{K a^4}{r^2} \vec{u}_r .$$

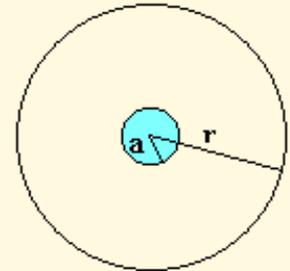


Figure 5 de problemas
Tomamos como superficie de Gauss una esfera concéntrica la dieléctrica de radio genérico r

Recordando la relación entre el campo y el vector desplazamiento, que por estar en el vacío será: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$,

obtenemos:

$$\vec{D} = \frac{1}{4} \frac{K a^4}{r^2} \vec{u}_r$$

Sustituyendo valores tendremos para "r > a"

$$\vec{E} = \frac{5.3 \times 10^{-7}}{r^2} \vec{u}_r \text{ V / m} \quad \text{y} \quad \vec{D} = \frac{4.7 \times 10^{-18}}{r^2} \vec{u}_r \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

Es de resaltar que el campo y el desplazamiento eléctrico, en la zona con carga libre van variando con el **cuadrado** de la distancia que nos separa del centro de la distribución, para variar con la **inversa del cuadrado** cuando nos encontramos fuera de la zona de carga.

b) Datos

Radio interior de la corteza esférica (b) = 6 cm = 6×10^{-2} m

Radio exterior de la corteza esférica (c) = 8 cm = 8×10^{-2} m

Para: $b < r < c$, $\epsilon_r = 15$.

Como la carga libre no varía por la inclusión de un nuevo dieléctrico, el vector desplazamiento no variará de los valores que hemos obtenido, otra cosa será el vector campo eléctrico, cuyo valor en cada punto del espacio lo podemos calcular recordando que: $\vec{E} = \epsilon \vec{D}$.

Con la nueva geometría tenemos el espacio dividido en 4 regiones de permitividades distintas: $0 < r < a$; $a < r < b$; $b < r < c$; y, $c < r$.

b) En la primera de ellas $0 < r < a$, si repasamos los razonamientos que hemos realizado, veremos que en los resultados obtenidos, no intervienen las propiedades eléctricas del medio circundante. Luego el vector desplazamiento

en los puntos interiores, será: $\vec{D}(\vec{r}) = \frac{K}{4} r^2 \vec{u}_r$ y $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{K}{4 \epsilon_r \epsilon_0} r^2 \vec{u}_r$, o lo que es lo mismo para "r < a":

$$\underline{\vec{D}(\vec{r}) = 7.5 \times 10^{-13} r^2 \vec{u}_r \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}} \quad \text{y} \quad \underline{\vec{E}(\vec{r}) = 1.06 \times 10^{-2} r^2 \vec{u}_r \text{ V} / \text{m}}$$

b₂) La segunda región: $a < r < b$. La situación desde el punto de vista eléctrico es la de puntos exteriores a la distribución, sin la existencia de nuevos dieléctricos. Coincidirá por tanto con lo estudiado en el apartado a₂). Luego:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\epsilon_0} \frac{Ka^4}{r^2} \vec{u}_r, \text{ y } \vec{D} = \frac{1}{4} \frac{Ka^4}{r^2} \vec{u}_r, \text{ o lo que es lo mismo para "a < r < b"}$$

$$\underline{\vec{E} = \frac{5.3 \times 10^{-7}}{r^2} \vec{u}_r \text{ V} / \text{m}} \quad \text{y} \quad \underline{\vec{D} = \frac{4.7 \times 10^{-18}}{r^2} \vec{u}_r \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}}$$

b₃) En la región: $b < r < c$, no existen nuevas cargas libres, son las mismas que en la región anterior, por tanto el vector desplazamiento eléctrico no variará respecto de la región anterior: $\vec{D} = \frac{1}{4} \frac{Ka^4}{r^2} \vec{u}_r$, recordando la relación entre campo y desplazamiento, que en este medio de permitividad relativa 15 será: $\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$, obtenemos:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\epsilon_r \epsilon_0} \frac{Ka^4}{r^2} \vec{u}_r, \text{ o lo que es lo mismo para "b < r < c"}$$

$$\underline{\vec{E} = \frac{3.5 \times 10^{-8}}{r^2} \vec{u}_r \text{ V} / \text{m}} \quad \text{y} \quad \underline{\vec{D} = \frac{4.7 \times 10^{-18}}{r^2} \vec{u}_r \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}}$$

b₄) En la última región: $c < r$, de nuevo el vector desplazamiento se conserva, pues no se añaden cargas libres nuevas, es decir: $\vec{D} = \frac{1}{4} \frac{Ka^4}{r^2} \vec{u}_r$. Como estamos en el vacío, el campo y el desplazamiento se relacionan por la permitividad del vacío, con lo que: $\vec{E} = \frac{1}{4\epsilon_0} \frac{Ka^4}{r^2} \vec{u}_r$, que resultan ser los mismos valores que sin la cascara dieléctrica. Para " $c < r$ "

$$\underline{\vec{E} = \frac{5.3 \times 10^{-7}}{r^2} \vec{u}_r \text{ V} / \text{m}} \quad \text{y} \quad \underline{\vec{D} = \frac{4.7 \times 10^{-18}}{r^2} \vec{u}_r \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}}$$

c) Para calcular el vector polarización en la corteza dieléctrica una vez conocido el valor del vector campo, sólo tendremos que recordar la relación entre campo y polarización $\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$, recordando que $\chi_e = \epsilon_r - 1$, y retomando el valor del campo en la zona considerada ($b < r < c$), tenemos: $\vec{P} = \frac{\epsilon_r - 1}{4\epsilon_r} \frac{Ka^4}{r^2} \vec{u}_r$, es decir:

$$\underline{\vec{P} = \frac{4.3 \times 10^{-18}}{r^2} \vec{u}_r \text{ V} / \text{m}}$$

d) Las densidades de carga de polarización son el producto escalar del vector polarización en el punto considerado por el vector superficie correspondiente: $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$, luego:

$(\sigma_p)_b = \vec{P}(b) \cdot \vec{n}$ el vector polarización será paralelo al campo, e irá por tanto en el mismo sentido que el radio, el vector superficie será saliente de la cascara y su sentido será el opuesto al de la polarización, luego:

$$(\sigma_p)_b = -|\vec{P}(b)| \cdot |\vec{n}| = -2.6 \times 10^{-19} \text{ C m}^{-2}$$

$$(\sigma_p)_b = -1.2 \times 10^{-15} \text{ C m}^{-2}$$

En la otra cara los vectores son paralelos y por tanto: $(\sigma_p)_c = |\vec{P}(c)| \cdot |\vec{n}| = 3.4 \times 10^{-19} \text{ C m}^{-2}$

$$(\sigma_p)_c = +6.7 \times 10^{-16} \text{ C m}^{-2}$$

e) Para calcular la carga de polarización total en la corteza debemos saber que la carga total de la corteza tiene que ser cero, pues hemos introducido la corteza descargada y no se ha generado carga sólo se ha redistribuido la existente. Si calculamos la carga de polarización que tenemos en las dos superficies la diferencia hasta cero será la que tengamos en el volumen.

En la superficie de radio "b" la carga total será: $(Q_p)_b = \int_{\text{Sup radio "b"}} \sigma_b \cdot ds$, teniendo en cuenta que la densidad superficial de carga de polarización en esa superficie es constante, la carga total será $(Q_p)_b = \sigma_b \cdot (4\pi b^2)$, como conocemos el valor de la densidad de carga que acabamos de calcular, tenemos $(Q_p)_b = -5,4 \times 10^{-17} \text{ C}$

Para la superficie externa de la corteza esférica razonaremos de igual forma obteniendo:

$$(Q_p)_c = \sigma_c \cdot (4\pi c^2) = +5,4 \times 10^{-17} \text{ C}$$

Por tanto la carga total entre las dos superficies esféricas que limitan la cáscara esférica es cero, de donde se infiere que la carga de polarización en el volumen de dicha corteza es nula