Tema I: Electrostática en el vacío.

Carga eléctrica: Distribuciones discretas y continuas de carga. Interacciones entre cargas: Ley de Coulomb. El campo eléctrico. Ley de Gauss. El potencial electrostático. Dipolo eléctrico

Bibliografía: P. Lorrain y Dale R. Corson "Campos y Ondas Electromagnéticas". Edward M. Purcell "Electricidad y Magnetismo" Curso de Física de Berkeley

Conocimientos previos: Las leyes fundamentales de la Mecánica, operaciones vectoriales

Objetivos: Familiarizarse con el concepto de carga. Familiarizarse con el concepto de acción a distancia. Asentar el concepto de flujo de un campo vectorial. Comprender el significado de campo que deriva de un potencial, y su aplicación al campo eléctrico.

Introducción

La interpretación de los fenómenos naturales mostró que era imposible su explicación solamente a partir de fuerzas de tipo gravitatorio, puesto que no se podían explicar fenómenos como los elásticos, de tensión superficial, presión de vapor y otros muchos, entre otras razones porque las fuerzas gravitatorias resultaban demasiado pequeñas en varios órdenes de magnitud.

Por otra parte, y aun sin considerar la discrepancia cuantitativa, cuando se intentan describir los fenómenos moleculares es imposible entender la existencia de las fuerzas repulsivas que existen entre las partículas a nivel molecular, aplicando sólo los conceptos que son útiles en el estudio de los fenómenos gravitatorios.

Por tanto se requiere otro tipo de fuerzas de mayor magnitud mayores, que puedan representar estas interacciones, y estas no son otras que las fuerzas de origen eléctrico y magnético.

Nuestro primer contacto con fenómenos de tipo eléctrico, es probablemente, cuando en la escuela frotábamos un bolígrafo o una pluma sobre nuestro jersey, y atraíamos con él pedacitos de papel, estábamos, sin saberlo, realizando una experiencia de triboelectricidad (electricidad por frotamiento), que es probablemente, la primera forma en la que la humanidad puso de manifiesto la existencia de cargas eléctricas y normalmente la primera vez que tendríamos la oportunidad de pensar en la existencia de un campo de fuerzas. El estudio de la electrostática, nos va a permitir ordenar las ideas sobre fenómenos conocidos, por un lado la existencia de fuerzas que para su manifestación no necesitan del contacto, y por otro la naturaleza eléctrica de la materia.

Desde niños estamos acostumbrados a la existencia de la fuerza gravitatoria, por estar totalmente ligada a nuestra vida, y no nos sorprende que las cosas abandonadas en el aire caigan. Si recordamos la experiencia vivida con los trocitos de papel, veremos que nos pareció que estábamos haciendo magia, o que aquello tenía algún tipo de trampa, ya que por primera vez nos encontrábamos con una situación no habitual, la existencia de interacciones a distancia distintas de las gravitatorias.

Esa misma sensación se desarrolló a lo largo de Edad Media y el Renacimiento, con lo que el fenómeno eléctrico se ligó a la magia y a las ferias, por lo que su estudio desde el punto de vista científico quedó en una situación análoga a la que tenía en las épocas griega y romana. El prefijo “electro-“ proviene del nombre griego del ámbar (*elektron*), pues son las experiencias realizadas al frotar una varilla de ámbar con la piel de un animal (igual que la experiencia realizada por nosotros en la escuela), las que inician el desarrollo del estudio de los fenómenos eléctricos.

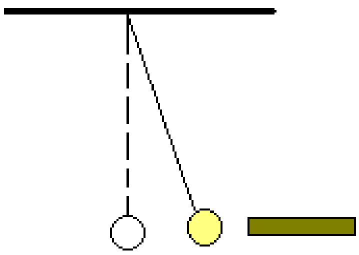

Figure 1
Al acercar al péndulo la varilla de ámbar electrizada, este pasa de su posición vertical a ser atraído por ella

Las experiencias de triboelectricidad realizadas con varillas de ámbar o vidrio que permiten atraer, en contra de las fuerzas gravitatorias, trocitos de papel, tuvieron una sistematización empleando péndulos eléctricos análogos al representado en la figura 1. Tras electrizar una varilla de ámbar frotándola con la piel de un animal, al aproximarla a un péndulo eléctrico, se observa que la esfera del péndulo es atraída por la varilla; otro tanto ocurre si la varilla electrizada por frotamiento es de vidrio. Si permitimos que la esfera del péndulo entre en contacto con la varilla desaparece la atracción. Realicemos esta experiencia con dos péndulos, uno lo ponemos en contacto con la varilla de ámbar y el otro con la de vidrio, al aproximar los péndulos veremos que se atraen.

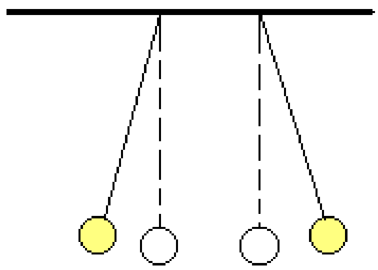

Figure 2
Los péndulos al haber estado en contacto con la misma varilla se repelen

Por el contrario, si tras tocar con la mano los péndulos descargarlos, ponemos a ambos en contacto con la misma varilla electrizada, veremos que los dos péndulos se repelerán. Al contrario de lo que ocurre si cada péndulo se pone en contacto con un tipo de varilla.

Hoy sabemos que la explicación es sencilla, al frotar la varilla de vidrio con un paño, la varilla pierde electrones (que comunica al paño), quedando cargada positivamente, ocurriendo al contrario con el ámbar, la carga que se adquiere por la varilla se traslada parcialmente al péndulo, produciéndose entonces los fenómenos de atracción y repulsión que hemos descrito. La existencia de dos tipos distintos de interacción eléctrica, que recibieron los nombres de electricidad resinosa y vítrea según quien la produjera, permite explicar fenómenos de atracción y repulsión que no pueden entenderse con la teoría gravitatoria.

Carga eléctrica.

La carga es una propiedad de la materia que se pone de manifiesto cuando sobre ella actúa un campo electromagnético. Vamos a sistematizar algunos de conocimientos que tenemos sobre la carga eléctrica.

Todos tenemos la imagen de un átomo como una carga positiva (cuyo valor depende del número de protones que contenga) alrededor de la cual giran cargas negativas (en igual número que el de los protones del núcleo) que son los electrones de la corteza, siendo el conjunto neutro (sin carga neta).

Esa imagen encierra tres características de la carga eléctrica. En primer lugar, estamos poniendo de manifiesto la ***existencia de "dos tipos de carga"***, la positiva y la negativa. Después, entendemos que ***la carga está "cuantizada"*** en el sentido de existir una unidad de carga y que la carga total de un sistema es la suma de diversas unidades de carga. Por último, estamos diciendo que ***"la unidad de carga es única"*** con independencia del signo de la misma, pues el valor de la unidad de carga positiva tiene que ser el mismo que el de la negativa, para que el átomo resulte neutro.

Por otra parte, se admite como ley fundamental de la naturaleza ***"la conservación de la carga***"a la que hoy día no se conoce ninguna excepción. Para entender esta ley fundamental tenemos en cuenta que la carga eléctrica es una propiedad de la materia, y que en conjunto la materia es neutra, de forma que cuando se carga un cuerpo otro tiene que adquirir una carga igual y de signo contrario.

Después de presentar algunas características de la carga vamos a ver como afrontaremos su estudio. Para simplificar utilizamos el concepto de "carga puntual". Para comprender esta idea podemos pensar en otras situaciones como las siguientes. Al considerar un núcleo atómico lo representamos por una esfera pequeña, ¿pero somos capaces de "ver realmente" un núcleo?, es un hecho que es imposible verlo, de ahí que para nosotros el núcleo atómico sea una carga puntual. Consideremos ahora el péndulo eléctrico, si poco a poco nos vamos alejando de él, pasaremos de considerarlo como una esfera de un diámetro apreciable a una esfera más pequeña para parecernos finalmente un punto, y otro tanto podemos decir del bolígrafo que usábamos en la escuela para atraer los pedacitos de papel. ¿Es, que la naturaleza o el tamaño del núcleo, del bolígrafo o del péndulo, varía según lo veamos nosotros?, la respuesta es evidente. Cuando hablamos de cargas puntuales, como en mecánica cuando hablamos de masa puntual, estamos diciendo que desde nuestro punto de observación las dimensiones del objeto son despreciables, y lo tomaremos como un punto geométrico que posee carga, es lo que denominamos: "carga puntual".

Distribuciones continuas de carga.

Hasta ahora hemos empleado cargas que podíamos suponer se encontraban perfectamente localizadas y separadas de otras, que hemos denominado "cargas puntuales". La realidad nos lleva a la existencia de regiones en las que las cargas se encuentran muy cerca unas de otras de manera que macroscópicamente las vemos como un continuo, en esa región podemos definir una función que nos da el valor de la carga en cada punto, en esa región diremos que existe una distribución continua de carga.

En los casos reales, como ocurre en la ionosfera o con el plasma generado en una campana de vacío, nos encontramos con la existencia de una carga "q" distribuida en un volumen " τ ". Si la distribución fuera uniforme en todo el espacio considerado, podríamos caracterizarla diciendo que existe una densidad volúmica de carga constante la región, dada por la expresión.

$$\rho = \frac{q}{\tau}$$

Problema 1.- El radio medio del núcleo de azufre (número atómico 16) es aproximadamente 1.37 × 10^{-13} cm. Suponiendo que la carga eléctrica este uniformemente distribuida en el núcleo, calcular la densidad de carga en C × m^{-3}.

<u>Datos</u>

Llamamos q_e *a la carga del electrón, cuyo valor sabemos que es* 1.6×10^{-19} *c*

Carga del núcleo (q) = $Z \cdot q_e = 16 \times \left(1.6 \times 10^{-19}\right) = 2.56 \times 10^{-18}$ *c*

Radio de la esfera (r) = 1.37×10^{-13} *cm* $= 1.37 \times 10^{-15}$ *m*

Volumen de la esfera (τ *) =* $\frac{4}{3}\pi r^3 = 1.07 \times 10^{-44}\ m^3$

Suponiendo que el núcleo sea una esfera, si la carga está uniformemente repartida en ella, la densidad volúmica de carga es: $\rho = \frac{dq}{d\tau}$ *, como nos dicen que la distribución es uniforme, podemos escribir:* $\rho = \frac{\Delta q}{\Delta \tau}$ *es decir:* $\rho = \frac{2.56 \times 10^{-18}}{1.07 \times 10^{-44}}$ $= 2.4 \times 10^{26}\ c\ m^{-3}$

$$\underline{\rho = 2.4 \times 10^{26}\ c\ m^{-3}}$$

A diferencia de la situación descrita anteriormente en la que la carga estaba uniformemente distribuida en la región del espacio considerada, lo normal es encontrarse situaciones en las que la carga no se distribuye de manera homogénea. Para caracterizar la distribución es preciso dar el valor de la densidad de carga $\rho(\vec{r})$ en todos y cada uno de los puntos ($\vec{r}$) de la región. La densidad de carga será la carga que existe en cada punto (considerando como tal el volumen elemental que lo rodea)

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta \tau} = \frac{dq}{d\tau}$$

siendo $d\tau$ un elemento de volumen centrado en el punto $\vec{r}$ y dq la carga elemental contenida en $d\tau$. La carga total en el volumen sera entonces:

$$q = \int_\tau dq = \int_\tau \rho(\vec{r})\, d\tau$$

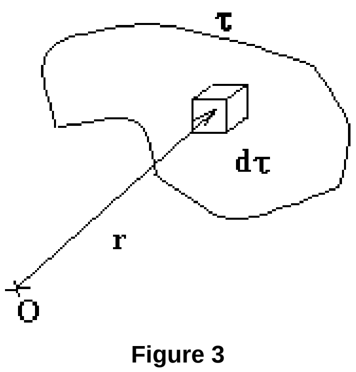

Figure 3
Volumen elemental " $d\tau$ " que rodea a un punto en el espacio

Problema 2.- La densidad de carga de una nube electrónica en el estado fundamental del átomo de hidrógeno viene dado por la función $\rho(\vec{r}) = \frac{q_e}{\pi a_0^3} e^{\frac{-2r}{a_0}}$, siendo q_e la carga del electrón y a_0 el radio de la primera órbita de Böhr. Calcular la carga total.

<u>*Datos*</u>

Densidad de carga $\rho(\vec{r}) = \frac{q_e}{\pi a_0^3} e^{\frac{-2r}{a_0}}$

Si la densidad de carga viene dada por la expresión $\rho(\vec{r}) = \frac{q_e}{\pi a_0^3} e^{\frac{-2r}{a_0}}$ *, la carga total será:*

$Q = \oint \rho\, d\tau$ *, Para hacer esta integral debemos encontrar el elemento diferencial de volumen que nos permita generar la esfera. Como la densidad de carga viene expresada como una función de la distancia al centro debemos hacer que sea el radio el que nos marque el crecimiento del elemento de volumen, es decir el elemento de volumen será una corona esférica de anchura infinitesimal, cuyo volumen es:* $4\pi r^2 dr$ *. Por tanto la carga será:*

$Q = \int \frac{q_e}{\pi a_0^3} e^{\frac{-2r}{a_0}} (4\pi r^2 dr) = \frac{4q_e}{a_0^3} \int r^2 e^{\frac{-2r}{a_0}} dr$ *. Tomando como límites de integración los valores extremos del radio que permiten generar la esfera, es decir el radio variará desde el valor "0" hasta el infinito, luego debemos calcular:* $\int_0^\infty r^2 e^{\frac{-2r}{a_0}} dr$ *.*

La integral la haremos por partes, llamando $u = r^2$*,* $dv = e^{\frac{-2r}{a_0}} dr$ *, tendremos* $du = 2r\, dr$*;* $v = \frac{-a_0}{2} e^{\frac{-2r}{a_0}}$ *,*

recordando: $\int u\, dv = uv - \int v\, du$ *, tendremos:* $\int_0^\infty r^2 e^{\frac{-2r}{a_0}} dr = (r^2)\left(\frac{-a_0}{2} e^{\frac{-2r}{a_0}}\right) - \int \frac{-a_0}{2} e^{\frac{-2r}{a_0}} (2r\, dr)$

para calcular la segunda integral volvemos a aplicar la integración por partes. De nuevo haremos $dv = e^{\frac{-2r}{a_0}} dr$ *y ahora tomaremos como u = r, con lo que:* $v = \frac{-a_0}{2} e^{\frac{-2r}{a_0}}$ *, y du = dr, por tanto:*

$$\int_0^\infty r^2 e^{\frac{-2r}{a_0}} dr = \left[\left(\frac{-a_0}{2} e^{\frac{-2r}{a_0}}\right)\right]_0^\infty - \left[\left[a_0\left(r\frac{-a_0}{2} e^{\frac{-2r}{a_0}}\right) + \frac{a_0^2}{2}\left(-\frac{a_0}{2}\right) e^{-\frac{2r}{a_0}}\right]\right]_0^\infty =$$

$$= -\left[\frac{a_0 r^2}{2} e^{\frac{-2r}{a_0}} + \frac{a_0^2 r}{2} e^{\frac{-2r}{a_0}} + \frac{a_0^3}{4} e^{\frac{-2r}{a_0}}\right]_0^\infty$$ *al aplicar la regla de Barrow, obtenemos:*

$-\left(\infty^2 e^{-\infty} + \infty\, e^{-\infty} + \frac{a_0^3}{4} e^{-\infty} - 0e^0 - 0e^0 - \frac{a_0^3}{4} e^0\right) = \frac{a_0^3}{4}$ *, por tanto la carga total será:* $Q = \frac{4q_e}{a_0^3} \frac{a_0^3}{4}$ *, es decir:* <u>$Q = q_e$</u>

Que nos expresa que la carga total de la nube electrónica del hidrógeno es la carga del electrón, como esperábamos

Existen situaciones en las que se encuentra carga se encuentra distribuida en una región τ en la que una de sus dimensiones es mucho menor que las otras dos, es decir se puede considerar que la carga está distribuida en una superficie. En este caso es más cómodo acudir al concepto de densidad superficial de carga definida como

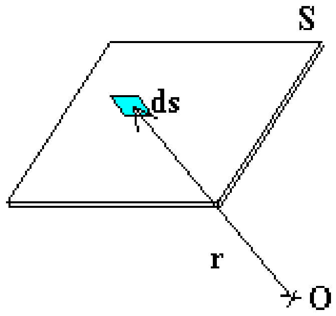

Figure 4
Superficie elemental que rodea a un punto en un plano

$$\sigma(\vec{r}) = \frac{dq}{dS}$$

de forma que se cumplirá que la carga total es:

$$q = \int_S \sigma(\vec{r})\, ds$$

Análogamente, puede considerarse una distribución de carga a lo largo de una línea y acudiríamos a su caracterización mediante la densidad lineal de carga

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

cumpliéndose también que la carga total venga dada por

$$q = \int_L \lambda\, dl$$

El caso limite sera aquel en que la carga total este concentrada en una región de dimensiones despreciables, a lo que, como ya hemos dicho, se denomina carga puntual. Este es, por ejemplo, el caso de un electrón o de un protón, que si bien ocupan una región finita, desde un punto de vista macroscópico, para dimensiones tan pequeñas como las citadas (10^{-15} m) pueden ser considerados como puntos geométricos.

Interacción entre cargas.

Las acciones que unas cargas van a realizar sobre otras, se van a poner de manifiesto por las fuerzas que se van a ejercer entre ellas. Vamos a estudiar como se llegó a la actual formulación de la interacción entre cargas siguiendo un desarrollo histórico comenzando con el caso más sencillo la fuerza que se ejercen entre sí dos cargas que nos viene dada por:

Ley de Coulomb.

La formulación de las interacciones entre cargas puntuales se llevó a cabo en 1785 por Coulomb empleando una balanza de torsión, si bien, podríamos decir, por darle un carácter intuitivo, que el origen de esta ley experimental fue realizada con la ayuda de dos péndulos eléctricos cargados, dispuestos en la misma horizontal. De la experiencia se dedujo que la fuerza que aparecía en las cargas cumple:

- *Tiene la dirección de la línea que une las cargas.*
- *El módulo es proporcional al valor de ambas cargas.*
- *Puede ser atractiva o repulsiva según el signo de las cargas. Siendo atractiva para cargas de distinto signo y de repulsión para cargas del mismo signo.*
- *Es del tipo acción-reacción, con lo que la fuerza F_{21} que ejerce q_2 sobre q_1 es igual en magnitud pero de sentido opuesto a F_{12}, esto es:*

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

- *Varia con la distancia de forma inversamente proporcional a su cuadrado.*

Lo que se formula matemáticamente como:

$$\vec{F}_{12} = K_e \frac{q_1 q_2}{d_{12}^2} \vec{u}_{12}$$

siendo $\vec{F}_{12}$ la fuerza que ejerce la carga q_1 sobre la q_2, d_{12} la distancia entre ambas cargas, y $\vec{u}_{12}$ un vector unitario en la dirección definida por las cargas y en el sentido de q_1 a q_2. El valor de la constante K_e (constante eléctrica) varia según el sistema de unidades utilizado. En el Sistema Internacional (SI) vale 9×10^9 y sus unidades son Newton × metro^2 × culombio^{-2} (N m^2 C^{-2}).

Esta expresión, que es ***aplicable sólo a dos cargas puntuales***, es preciso generalizarala para poder considerar situaciones en las que aparecen distribuciones discretas o continuas de cargas.

En el caso de una distribución discreta de cargas puntuales, cada una de las cargas interaccionará con todas las demás, con lo que quedará sometida a varias fuerzas. Para el estudio de estas situaciones aceptaremos que se cumple el **principio de superposición** que establece que la fuerza sobre una de las cargas será la suma de las fuerzas que independientemente ejerzan las restantes. Por tanto, la fuerza que actúa sobre una carga (q), por la acción de varias (q'_i), vendrá dada por:

$$\vec{F}_e = K_e\, q \sum_{i=0}^{n} \frac{q'_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

Problema 3.- En los vértices de un triángulo equilátero de lado "r" se colocan cargas "-e" y en el centro se coloca la carga "Q > 0. ¿Cuál debe ser el valor de Q para que la fuerza sobre cualquiera de las cargas negativas sea nula?.

Dada la simetría del problema, si la fuerza que actúa sobre una carga de las situadas en un vértice es nula lo será la que actúe sobre cualquiera de las demás. Consideremos una cualquiera de ellas (por ejemplo la situada en el vértice "B"), la fuerza que actúa, será la suma de las fuerzas debidas a las demás cargas (tanto las "-e" como la "Q"), las debidas a las del mismo signo serán repulsivas y la debida a "Q" atractiva.

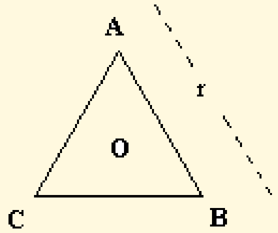

Figure 1 de problemas
Tres cargas en los vértices de un triángulo

Si la fuerza total que actúa es nula, lo serán las sumas de las componentes de las *fuerzas según los ejes. Tomaremos como eje "X" el definido por el segmento CB, en estas condiciones la fuerza debida a la carga situada en el vértice "C" será positiva y estará contenida en dicho eje, la fuerza debida a la carga situada en "A" formará un ángulo de $\pi/3$ con el eje "X" y la debida a la carga "Q", situada en el centro, formará un ángulo de $\pi/6$ con el semieje negativo.*

Veamos los valores de las componentes de las fuerzas. Para ello calcularemos previamente el valor de la distancia de la carga"Q" al vértice "B". Sabemos que en un triángulo equilátero su baricentro es su ortocentro, es decir que el punto "O" distará del vértice 2/3 de la altura, y ésta por Pitágoras es: $h = \frac{\sqrt{3}}{2}r$, luego la distancia al vértice del centro será: $\overline{OB} = \frac{\sqrt{3}}{3}r$.

<u>EJE "X"</u>

$$\left(\vec{F}_C\right)_X = \left|\vec{F}_C\right| = K_E \frac{e}{r^2}$$

$$\left(\vec{F}_A\right)_X = \left|\vec{F}_A\right| \cos\frac{\pi}{3} = K_E \frac{e}{r^2}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{K_E}{2}\frac{e}{r^2}$$

$$\left(\vec{F}_Q\right)_X = -\left|\vec{F}_Q\right| \cos\frac{\pi}{6} = -K_E \frac{3Q}{r^2}\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}\,K_E}{2}\frac{3Q}{r^2}$$

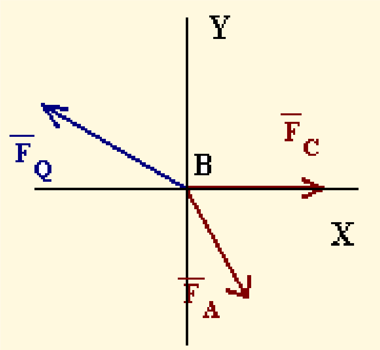

Figure 2 de problemas
Composición de las fuerzas F_A y F_C que actúan sobre la carga situada en "B" y su resultante

Si la componente "X" debe ser nula se cumplirá: $K_E\frac{e}{r^2} + \frac{K_E}{2}\frac{e}{r^2} + \left(-\frac{\sqrt{3}\,K_E}{2}\frac{3Q}{r^2}\right) = \frac{K_E}{r^2}\left[e\left(1+\frac{1}{2}\right) - \frac{3\sqrt{3}}{2}Q\right] = 0;$ *es decir:* $Q = \frac{\sqrt{3}}{3}e$

<u>EJE"Y"</u>

$$\left(\vec{F}_C\right)_Y = 0$$

$$\left(\vec{F}_A\right)_Y = -\left|\vec{F}_A\right| sen\frac{\pi}{3} = -K_E \frac{e}{r^2} sen\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}K_E}{2}\frac{e}{r^2}$$

$$\left(\vec{F}_Q\right)_Y = \left|\vec{F}_Q\right| sen\frac{\pi}{6} = K_E \frac{3Q}{r^2} sen\frac{\pi}{6} = \frac{K_E}{2}\frac{3Q}{r^2}$$

Si la componente "Y" debe ser nula se cumplirá: $0 + \left(-\frac{\sqrt{3}\,K_E}{2}\frac{e}{r^2}\right) + \left(\frac{K_E}{2}\frac{3Q}{r^2}\right) = 0;$ *es decir:* $Q = \frac{\sqrt{3}}{3}e$

Que como es lógico nos reproduce el valor de "Q" que hemos obtenido con la componente "X".

$$\underline{Q = \frac{\sqrt{3}}{3}e}$$

Hasta aquí hemos considerado la fuerza que actúa sobre una carga puntual por existir otras cerca de ella. Consideremos ahora la acción de una distribución continua de cargas sobre una carga puntual. Aplicamos de nuevo el principio de superposición, es decir, realizamos la suma de efectos producidos por cada elemento diferencial de carga, que podemos considerar como una carga puntual. Suponiendo que se trata de una distribución de cargas en volumen, cada elemento diferencial de carga puede expresarse como $dq = \rho\, d\tau$, con lo que tendremos:

$$\vec{F} = K_e q \int_\tau \frac{\rho(\vec{r})\, d\tau}{r^2}\, \vec{u}_r$$

siendo $\vec{u}_r$ un vector unitario en la dirección definida por cada elemento de volumen considerado y la carga puntual.

De la misma forma podemos considerar distribuciones lineales o superficiales de carga, en cuyo caso habrá que considerar la integral de línea o superficie respectivamente.

Al iniciar el estudio de la interacción entre cargas eléctricas recurrimos a su comparación con la interacción gravitatoria, y acabamos de comprobar que la expresión de la fuerza que se ejerce sobre una carga por estar otra presente (ley de Coulomb) tiene una gran similitud formal con la ley de Gravitación Universal ($\vec{F}_g = G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$) que nos da la expresión de la fuerza sobre una masa debida a otra situada en sus proximidades. Pasemos a ver las analogías y diferencias de ambas leyes:

- *Ambas fuerzas son del tipo acción-reacción.*
- *Ambas varían con la inversa del cuadrado de la distancia que separa a los escalares.*

Sin embargo, aparece una diferencia fundamental ya que:

- *La fuerza eléctrica puede ser atractiva o repulsiva según sea la naturaleza de las cargas. La fuerza gravitatoria siempre es atractiva.*

Además, debemos resaltar la gran diferencia entre los órdenes de magnitud de los módulos de ambos tipos de fuerzas

Problema 4.- Comparar la fuerza eléctrica y la gravitatoria entre dos electrones

Datos

Carga del electrón (q_e) = 1.6x 10^{-19} C
Masa del electrón (m_e) = 2.0 x 10^{-31} Kg
Constante de gravitación Universal (G) = 6.67 x 10^{-11} N m^{-2} kg
Constante eléctrica K_e = 9 x 10^9 N m^2 C^{-2}

La fuerza gravitatoria entre dos masas sabemos que vale $\vec{F}_G = G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$ *, siendo “r” la distancia que las separa* *y $\vec{u}_r$ un vector unitario cuyo sentido es de una a otra masa.*

La fuerza electrostática entre los dos electrones será la fuerza de Coulomb, es decir $\vec{F}_E = K_E \frac{Q \cdot q}{r^2} \vec{u}_r$, siendo "r" la distancia que las separa y $\vec{u}_r$ un vector unitario cuyo sentido es, en este caso, el de repulsión de una a otra masa.

Una vez comparados los sentidos de las dos fuerzas, que en este caso son opuestas, al ser las cargas del mismo signo, vamos a comparar los módulos de las mismas. La mejor forma de compararlos será calculando su relación, recordando que la constante eléctrica en el sistema Internacional vale 9×10^9, tenemos: $\frac{F_E}{F_G} = \frac{K_E}{G} \frac{q^2{}_e}{m^2{}_e}$ sustituyendo obtenemos: $\frac{F_E}{F_G} = 1.35 \times 10^{20} \times 6.4 \times 10^{23} = 8.46 \times 10^{43}$. Lo que nos dice que:

la fuerza de naturaleza eléctrica es 43 órdenes de magnitud superior a la gravitatoria.

Campo eléctrico.

De nuevo vamos a comparar las interacciones entre masas y entre cargas eléctricas, para analizar si se pueden utilizar en el caso de las cargas algunos conceptos definidos para las masas, con su correspondiente modificación, debido al cambio de propiedad de la materia considerada.

En el caso de las masas, sabemos que se puede definir el campo gravitatorio creado por una masa, aunque en general nos solemos limitar a considerar de manera específica el campo gravitatorio terrestre, es decir el creado por la Tierra. Esto es debido a dos razones, por una parte estamos inmersos en él y nosotros mismos sentimos sus efectos, y por otra los otros campos gravitatorios creados por cuerpos de nuestros entornos tienen efectos que, en contra de lo que sucede con el campo gravitatorio terrestre, apenas podemos experimentar en nosotros mismos.

Estamos acostumbrados a la existencia del campo gravitatorio debido a la Tierra. Que sabemos, se pone de manifiesto por la fuerza (en este caso siempre de atracción) que la Tierra ejerce sobre cualquier objeto con masa situado en sus proximidades, por eso todos los cuerpos abandonados en el aire "caen". La representación del fenómeno la hacemos mediante un campo vectorial. Este campo, aunque siempre existe, sólo se observa por el movimiento originado, por acción de la fuerza, en el cuerpo con masa. El campo que empleamos para modelizar el fenómeno gravitatorio es un campo vectorial cuyas dimensiones son las de una fuerza por unidad de masa, (escalar sobre el que se detecta su existencia). Esta fuerza se calcula como el producto del vector campo en el punto, multiplicado por la masa del objeto (valor del escalar sobre el que vemos los efectos del campo, y solemos escribir: $\vec{F}_g = m \cdot \vec{g}$

El campo gravitatorio del que estamos hablando, está creado por una masa (la de la tierra) y, para detectar su presencia empleamos otra masa. Esto quiere decir que si bien en cualquier punto de nuestro entorno existe el campo gravitatorio, no lo detectamos si en ese punto no colocamos un escalar adecuado para que sobre el aparezca la fuerza gravitatoria. Para detectar el campo terrestre, no emplearíamos normalmente un rayo de luz por entender que no tiene masa.

Podemos actuar de la misma forma con el fenómeno eléctrico e intentar definir un campo, el eléctrico, creado por una carga. Manteniendo el paralelismo con el campo gravitatorio, buscamos definir también un campo vectorial. El vector que caracteriza el campo tendrá las unidades de una fuerza dividida por el escalar sobre el que actúa la fuerza (la carga)", y que por tanto será:

$$\vec{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}_e}{q}, \qquad q > 0$$

Vamos a analizar la expresión anterior. En primer lugar, debemos tener claro, que **el campo eléctrico no es una fuerza. El campo eléctrico se pone de manifiesto por la aparición de una fuerza**, como le ocurría también al campo gravitatorio. Para que podamos detectar esa fuerza, debemos colocar una carga eléctrica, como para detectar el campo gravitatorio, lo hacíamos viendo la fuerza que se ejercía sobre un cuerpo con masa.

Si bien en el caso del campo gravitatorio terrestre es difícil apreciar que la fuerza ejercida sobre una masa depende de su posición, en cuanto pensemos en la Ley de Gravitación universal aplicada a los planetas entenderemos que la fuerza es distinta en cada posición. Cuando tenemos una carga "Q" sabemos que si colocamos otra carga "q" aparece sobre ella una fuerza, que depende de la distancia entre ambas, por tanto al variar la posición de la carga "q" la fuerza que aparece sobre ella variará, lo que en términos de campo eléctrico significa que el vector campo ha variado, por tanto, el campo eléctrico depende del punto que consideremos.

En este sentido, se define campo eléctrico como la región del espacio en la que al colocar en un punto cualquiera, un cuerpo con la propiedad adecuada (carga eléctrica) aparece una fuerza sobre este cuerpo.

En la expresión que nos ha servido para definir el campo, no hemos tenido en cuenta que el fenómeno eléctrico se presenta sobre cargas positivas o negativas, y el sentido de sus efectos es el opuesto para un tipo de cargas que para el otro. Para definir la dirección y el sentido del vector que define el campo, tomaremos como **sentido del campo en cada punto, el que seguiría una carga positiva colocada en él**..

En la expresión hemos empleado el límite del cociente (fuerza/carga) cuando la carga es muy pequeña y positiva. Pedimos que la carga sea muy pequeña a fin de que no modifique el valor del campo en el punto que estamos considerando y en sus cercanías.

De lo anterior se deduce que el campo creado por una carga puntual en un punto cualquiera del espacio "P", tendrá la forma:

$$\vec{E} = K_e \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

siendo Q la carga que crea el campo, r el módulo del vector que une la carga "Q" y el punto "P" en el que queremos conocer el campo (la distancia de la carga al punto) y $\vec{u}_r$ un vector unitario en esa dirección, su sentido vendrá determinado por el del movimiento que tendría una carga positiva colocada en el punto "P".

Campo eléctrico creado por una distribución puntual de cargas.

Usando de nuevo el principio de superposición, la expresión del campo en un punto cualquiera del espacio, "P", debido a varias (n) cargas puntuales vendrá dada por la suma de las contribuciones al campo de cada una de las cargas, es decir:

$$\vec{E} = K_e \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

siendo Q_i cada una de las "n" cargas generadoras del campo, r_i el módulo del vector posición que une cada una de ellas y el punto "P", y $\vec{u}_i$ un vector unitario en cada una de esas direcciones, cuyo sentido, como siempre, vendrá dado por el que tendría el movimiento de una carga positiva colocada en el punto "P" si sólo existiera la carga "Q_i", lo que hace necesaria la suma vectorial de los resultados obtenidos.

Problema 5.- Tres cargas puntuales de 3×10^{-9} C, se sitúan en los vértices de un cuadrado de 20 cm de lado. Hallar el módulo, la dirección y el sentido del campo eléctrico en el vértice vacante del cuadrado.

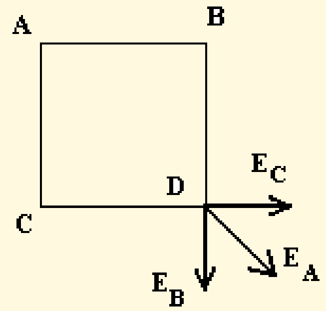

Figure 3 de problemas
Representación de los campos debidos a cada carga en el punto "D"

<u>*Datos*</u>

Lado del cuadrado (a) = 20 cm = 0.02 m
Valor de cada carga (q) = 3×10^{-9} C

El valor del campo creado por cada carga será: $\vec{E} = K_E \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$ *, siendo "r" la distancia de la carga al punto en el que queremos calcular el campo, y* $\vec{u}_r$ *un vector unitario en esa dirección que al ser cargas positivas, tendrá por sentido el saliente de la carga.*

Los vectores campo generados por las cargas tendrán la posición representada en la figura. Por tanto al calcular el campo total generado por la distribución debemos componer los tres campos.

Para calcular su módulo tendremos en cuenta:

- *La distancia desde el vértice "D" a los vértices "B" y "C" será igual al lado del cuadrado (a), el módulo del campo debido a ambos será el mismo.*
- *Al ser un cuadrado, la distancia entre los vértices opuestos ("A" y "D"), será:* $a\sqrt{2}$

Los campos serán: $\vec{E}_C = K_E \dfrac{q}{a^2}\vec{u}_{CD}$, $\vec{E}_B = K_E \dfrac{q}{a^2}\vec{u}_{BD}$, $\vec{E}_A = K_E \dfrac{q}{\left(a\sqrt{2}\right)^2}\vec{u}_{AD}$

Al ser los módulos de los campos $\vec{E}_B$ *y* $\vec{E}_C$ *iguales, su suma formará un ángulo de* $\pi/4$ *con cada uno de ellos, o lo que es lo mismo tendrá la misma dirección y sentido que el debido a la carga colocada en el vértice "A", es decir según el vector* $\vec{u}_{AD}$ *. Por tanto el vector campo, que será la suma vectorial de los tres campos que hemos calculado, será el campo debido a la carga situada en "A" más la suma de los campos debidos a las cargas situadas en "B" y "C" que llevará el mismo sentido que aquella.* $\left|\vec{E}_B + \vec{E}_C\right| = 2\left|\vec{E}_B\right| \cos\dfrac{\pi}{4} = 2\left(K_E \dfrac{q}{a^2}\right)\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *. Por tanto el campo en el punto "D"* $\left(\vec{E}_D\right)$ *será:* $\vec{E}_D = K_E \dfrac{q}{a^2}\left(\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}\right)\vec{u}_{AD}$

$$\underline{\vec{E}_D = 1{,}9\ K_e \frac{q}{a^2}\vec{u}_{AD}}$$

Campo eléctrico creado por una distribución continua de cargas.

Si necesitamos conocer el campo debido a una distribución continua de cargas, razonaremos de manera similar a como hicimos para determinar la fuerza debida a una distribución de cargas no puntuales. Tomamos una carga elemental (dq) ***que de nuevo podemos considerar como una carga puntual***, calculamos el valor del campo debida a ella y aplicando el principio de superposición, sumamos los efectos de todas las posibles cargas elementales en las que subdividimos la distribución continua, es decir realizamos una suma continua (integración) de las contribuciones. Desde el punto de vista formal la solución es sencilla, y la expresamos como:

$$\vec{E} = K_e \int_\tau \frac{\rho\, d\tau}{r^2}\vec{u}_r\ ;\ \vec{E} = K_e \int_\Sigma \frac{\sigma\, ds}{r^2}\vec{u}_r\ ;\ \vec{E} = K_e \int_l \frac{\lambda\, dl}{r^2}\vec{u}_r$$

siendo ρ, σ y λ las densidades de carga volúmica, superficial y lineal respectivamente y llamando "τ, Σ y l" al volumen, la superficie y la línea sobre las que se distribuye la carga.

Problema 6.- Calcular el campo creado por una línea recta infinita uniformemente cargada con una densidad lineal de carga λ , en un punto que dista "a" de ella.

Que el punto diste "a" de la línea cargada define una perpendicular a ella que nos servirá de eje de referencia. Sabemos calcular el campo creado por una carga puntual, luego ***debemos convertir la línea cargada en una serie de puntos****, y con ayuda del teorema de superposición calcular así el campo creado por la distribución.*

Consideremos la carga puntual debida a un elemento de línea de longitud "dl", que dará lugar a un campo $d\vec{E}_1$ *cuyo valor es:* $d\vec{E}_1 = K_e \dfrac{\lambda\, dl}{R^2}\vec{u}_{r1}$ *; por otro lado, al ser infinita la distribución aparece una simetría de forma que por cada* *dl que consideremos en la mitad superior de la semirrecta cargada, existirá un “-dl” en la semirrecta negativa, que generará un campo del mismo módulo, si bien será distinta su dirección. Componiendo ambos campos tendremos:*

$d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2$;

$d\vec{E} = 2K_e \dfrac{\lambda\, dl}{R^2} \cos\alpha \;\; \vec{u}_\perp$ *, siendo* $\vec{u}_\perp$ *un vector unitario perpendicular a la línea.*

El campo, que estamos buscando será: $\vec{E} = \displaystyle\int 2K_e \frac{\lambda\, dl}{R^2} \cos\alpha \;\; \vec{u}_\perp$.

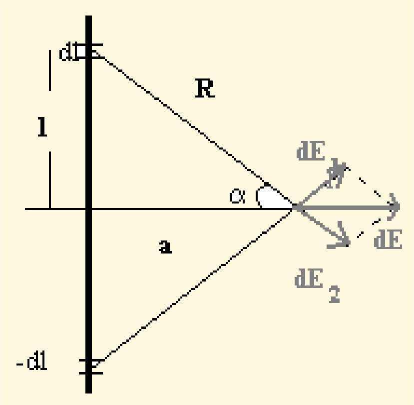

Figure 4 de problemas
Composición de los campos elementales debidos a los diferenciales de carga considerados.

Si más que mirar a la figura nos damos cuenta que: la distancia “R”, la altura “l” y el ángulo “ α ”, no son funciones independientes, y que únicamente “a” es constante y conocida. Teniendo en cuenta que: $\cos\alpha = \dfrac{a}{R}$, $\tan\alpha = \dfrac{l}{a}$ *, obtenemos:* $R = \dfrac{a}{\cos\alpha}$; $R^2 = \dfrac{a^2}{\cos^2\alpha}$ *; por otro lado:* $l = a \tan\alpha$ *, diferenciando, obtenemos:* $dl = a\dfrac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$ *, sustituyendo en el valor del módulo del diferencial de campo obtenemos:*

$dE = 2\,K_e \dfrac{\lambda\, a \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha \;\; a^2} \cos\alpha\; d\alpha$; $dE = \dfrac{2K_e\,\lambda}{a} \cos\alpha\, d\alpha$ *que ya sólo es función del ángulo de observación de la semirrecta, que variará desde 0 hasta* $\pi/2$ *, luego el módulo del campo será:* $E = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{2K_e\,\lambda}{a} \cos\alpha\, d\alpha = \frac{2K_e\,\lambda}{a} \left[\operatorname{sen}\alpha\right]_0^{\pi/2} = 2K_e \frac{\lambda}{a}$.

Finalmente, el campo eléctrico vendrá dado por:

$$\underline{\vec{E} = 2K_e \frac{\lambda}{a}\, \vec{u}_\perp}$$

Ley de Gauss

Mediante la ley de Coulomb hemos calculado el campo eléctrico debido a una carga y a una distribución discreta o continua de cargas (ya sea en volumen, superficie o línea), lo que podemos entender como una relación del campo con sus fuentes. Ahora trataremos de encontrar otra relación entre el campo eléctrico (concretamente su flujo) y las fuentes que lo generan.

Previamente vamos a recordar la definición de flujo de una magnitud vectorial a través de una superficie “S”, aplicado al caso de un campo eléctrico.

Consideremos un campo eléctrico en el espacio representado por sus líneas de campo y una superficie cerrada “S” cualquiera tal como se muestra en la figura 5. Dividamos la superficie en pequeñas porciones, lo suficientemente pequeñas para que podamos suponer cada una de ellas como una superficie plana, de forma que, en todos los puntos de cada una de ellas, el campo eléctrico no varíe apreciablemente ni en módulo, ni en dirección, ni en sentido. Sabemos que a cada superficie elemental que hemos construido le podemos asignar un vector superficie que será perpendicular a ella cuyo sentido será saliendo del volumen y módulo el área de al superficie.

Si tomamos uno de estos elementos de superficie, por ejemplo el j-ésimo, al que asignaremos el vector $\vec{s}_j$, el producto escalar del vector campo en él por su vector superficie $\vec{E}_j \cdot \vec{s}_j$, es un número al que llamamos flujo del vector campo a través de la porción de superficie s_j.

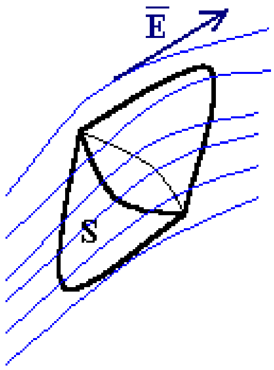

Figure 5
Representación de las líneas de campo que atraviesan una superficie cerrada

Sumando el flujo a través de todas las porciones, obtenemos el flujo total a través de la superficie "S", que será una magnitud escalar: $\phi = \sum_j \vec{E}_j \cdot \vec{s}_j$. Si las porciones las hacemos más y más pequeñas, la suma dejará de ser discreta para convertirse en continua, es decir en una integral de superficie. $\phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$.

Como ejemplo vamos a calcular el valor del flujo del campo creado por una carga puntual "q" a través de una superficie esférica, de radio "a", centrada en la carga.
El módulo del vector campo eléctrico en cada punto de la superficie esférica valdrá: $K_e \dfrac{q}{a^2}$, su dirección y sentido serán radiales.

Por otro lado, el vector superficie sabemos que es perpendicular en cada punto a la superficie, es decir, será radial, luego el producto escalar será el producto de los módulos de los vectores: $\phi = \int_{sup\,esfera} \vec{E} \cdot d\vec{s}$ =

$$\int_{sup\,esf} \left|\vec{E}\right| \cdot \left|d\vec{s}\right| = \int_{sup\,esf} K_e \frac{q}{a^2} \cdot ds = K_e \frac{q}{a^2} \cdot \int_{sup\,esf} d\vec{s}$$

$$= K_e \frac{q}{a^2} \cdot \left(4\pi\, a^2\right) = 4\pi\, K_e\, q.$$

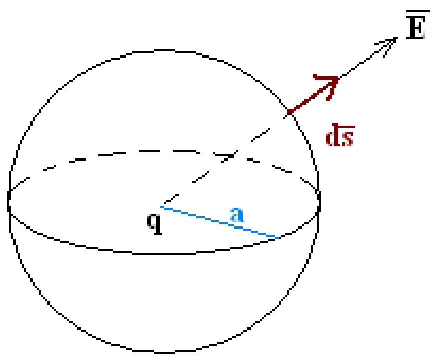

Figure 6
Rodeamos la carga "q" por una esfera de radio "a". En cada punto de la superficie, los vectores campo y superficie son radiales

Como si mantenemos la terminología que hemos empleado hasta ahora, nos va a aparecer el término 4π en muchas de las ecuaciones importantes del electromagnetismo, expresaremos la constante eléctrica como $\dfrac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}$, de manera que aparece una nueva constante "ε_0" a la denominamos **permitividad dieléctrica del vacío**, cuyas unidades serán las inversas a las de la constante eléctrica.

Con esta sustitución el flujo del campo eléctrico a través de una superficie esférica viene dado por: $\oint_{esfera} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$ que es el enunciado del **teorema de Gauss**

En el caso en que la superficie cerrada que consideremos rodeando la carga no sea esférica, podemos demostrar (ver desarrollo en el anexo I) que el flujo total a través de la superficie, será el mismo que a través de la superficie esférica si sólo existe la carga "q" colocada en su centro, lo que escribiremos como: $\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$

Por otro lado, si en lugar de una carga puntual tenemos una distribución de cargas, podemos sumar la contribución de cada carga al flujo total a través de la superficie cerrada, por lo que podemos escribir: $\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \dfrac{\sum_1^n q_i}{\varepsilon_0}$

Problema 7.- Tres cargas de 10^{-9}, 2×10^{-9}, y -10^{-9} C, están situadas respectivamente en los puntos (1,1,1); (1,2,2); (1,2,1) Calcular el flujo del campo creado por esta distribución a través de un cubo cuyos vértices están situados en los puntos (0,0,0); (3,0,0); (0,3,0); (0,0,3); (0,3,3); (3,3,3); (3,3,0); (3,0,0).

Aplicando el teorema de Gauss, sabemos que el flujo del campo eléctrico es la suma de las cargas encerradas en el volumen dividida por . Como las tres cargas se encuentran dentro del cubo a considerar, el flujo será:

$$\int_{cubo} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{+10^{-9} + 2\times 10^{-9} + (-10^{-9})}{\varepsilon_0} = \frac{2\times 10^{-9}}{8.85\times 10^{-12}} = 2.26 \times 10^2 \ C\ m$$

Acabamos de ver en un ejemplo que el cálculo del segundo miembro de la expresión del teorema de Gauss es en muchos casos fácil, vamos a emplear esta facilidad para calcular el campo eléctrico en un punto del espacio debido a una distribución de carga.

Como el vector campo se encuentra en el primer miembro de la ecuación como un factor del producto escalar de dos vectores, debemos pensar en una forma sencilla de realizar ese producto escalar, lo que nos lleva a la necesidad de elegir una superficie que pase por el punto y que el vector superficie sea para cada punto de ella perpendicular o paralelo al vector campo.

Como consecuencia de lo que acabamos de decir, debemos conocer cual será la "forma" (dirección y sentido) del campo en cada punto del espacio para elegir así la superficie adecuada que permita calcular $\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s}$, de modo que el teorema de Gauss sólo nos dará el módulo del vector campo eléctrico una vez que sepamos como es su dirección y sentido, lo que nos obliga a pensar en las simetrías del campo para encontrar la superficie adecuada al caso. Por tanto el Teorema de Gauss sólo será útil para calcular el campo eléctrico si existe algún tipo de simetría

Problema 8.- Calcular, empleando el teorema de Gauss, el campo creado por una línea recta infinita uniformemente cargada con una densidad lineal de carga λ , en un punto que dista "a" de ella.

Si queremos emplear el teorema de Gauss, para calcular el campo debemos buscar como superficie gaussiana una superficie cerrada que tenga la misma simetría que la distribución, para que así el módulo del vector campo sea el mismo en todos los puntos de la superficie gaussiana.

En este caso la línea recta infinita, la superficie con simetría que rodea esta distribución podría ser, en principio, un cilindro o un prisma recto, cuyo eje sea la línea cargada. Sin embargo, no tiene sentido considerar el prisma pues los puntos de las caras laterales no equidistan del eje, y en consecuencia el módulo del vector campo no puede ser el mismo, consideraremos, por tanto un cilindro cuyo eje sea la línea infinita cargada, y cuyo radio sea la distancia "a" a la que queremos calcular el campo.

El teorema de Gauss establece que: $\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \dfrac{q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$ *. Calculemos el valor de cada uno de los miembros.*

La integral a través de la superficie cerrada, será la suma del valor de la integral a través de cada base más la integral a través de la superficie lateral:

$$\oint_{cilindro} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{base\,1} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{base\,2} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{sup\ lat} \vec{E} \cdot d\vec{s} \ .$$

El campo creado por la distribución será normal a la línea, pues por cada elemento de carga que consideremos a lo largo de la línea podemos encontrar otro simétrico a él respecto de un segmento perpendicular a la recta que pase por el punto. Por tanto se anularán las componentes paralelas a la línea y quedarán solamente las componentes perpendiculares, como hemos visto en la solución del problema 6. En total, el campo será de la forma indicada en la figura $\left(\vec{E} = E\,\vec{u}_r\right)$ *.*

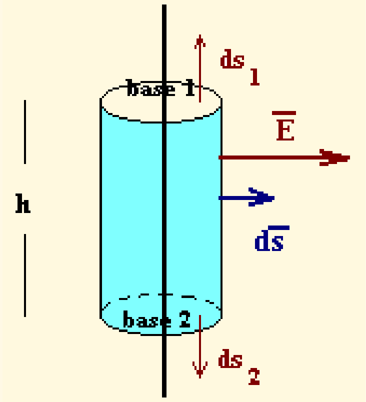

Figure 5 de problemas
Superficie cilíndrica que tomamos como superficie de Gauss

base 1

En la base "1", el vector superficie es normal a ella y dirigido hacia arriba $d\vec{s}_1 = ds\,\vec{u}_{\uparrow}$ *, como el vector campo es horizontal* $\vec{E} = E\,\vec{u}_r$ *, su producto escalar será nulo.* $\vec{E} \cdot d\vec{s}_1 = 0$ *.*

base 2

En la base "2", el vector superficie es normal a ella y dirigido hacia abajo $d\vec{s}_2 = ds\,\vec{u}_{\downarrow}$ *, como el vector campo es horizontal* $\vec{E} = E\,\vec{u}_r$ *, su producto escalar será nulo.* $\vec{E} \cdot d\vec{s}_2 = 0$ *.*

Superficie lateral

En cada punto el vector superficie irá dirigido según el radio que le une al correspondiente punto del eje $d\vec{s}_l = ds\,\vec{u}_r$ *, luego será paralelo al campo:* $\vec{E} \cdot d\vec{s} = \left|\vec{E}\right| \cdot \left|d\vec{s}\right|$ *.*

Por tanto sólo tendremos que calcular la integral extendida a la superficie lateral: $\int_{sup\ lat} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{sup\ lat} E \cdot ds$ *, pero dado que todos los puntos de la superficie lateral equidistan del eje, el módulo del vector campo será constante, y teniendo en cuenta el valor de la superficie lateral del cilindro , obtenemos:* $\int_{sup\ lat} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot (2\pi a\,h)$ *.*

Calculemos ahora el segundo miembro de la ecuación, es decir, la carga encerrada por la superficie gaussiana. Si la distribución es uniforme, la carga encerrada será la que tenga el tramo de línea que está incluida en la superficie cilíndrica que hemos considerado, por tanto: $\lambda\ h$ *. Igualando los dos miembros, obtenemos:* $E\left(2\pi\, a\, h\right) = \dfrac{\lambda\, h}{\varepsilon_0}$ *; es decir,* $E = \dfrac{1}{2\pi\,\varepsilon_0}\dfrac{\lambda}{a}$ *. Como ya sabemos la dirección y el sentido del campo podemos escribir:*

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\,\varepsilon_0}\frac{\lambda}{a}\,\vec{u}_r$$

Que coincide con el valor obtenido por integración directa cuando sustituimos el valor de la constante eléctrica, $K_e = \dfrac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}$ *en la expresión obtenida:* $\vec{E} = 2\,K_e\,\dfrac{\lambda}{a}\,\vec{u}_r \;=\; 2\dfrac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\dfrac{\lambda}{a}\,\vec{u}_r$

Potencial eléctrico

Dada la gran similitud formal que hemos comprobado que existe entre la expresión del campo gravitatorio y el eléctrico, vamos a ver ahora, si ese parecido nos permite también hablar de un potencial para el caso eléctrico. De ser así podremos trabajar con un campo escalar del que derive el campo eléctrico con la ventaja que supone poder operar con el potencial (una única función de la posición) en vez de hacerlo con el campo vectorial (tres funciones de la posición para poder conocer en cada punto el módulo la dirección y el sentido), y cuando necesitemos conocer el campo vectorial lo podemos calcular a partir de este potencial.

Veamos que ocurre cuando nos desplazamos dentro de un campo eléctrico para buscar una expresión a partir de la que se pueda definir una función escalar relacionada con el campo eléctrico. Supongamos que nos desplazamos desde un punto “A” a otro “B”siguiendo una línea. En cada uno de los puntos de esta línea el campo tiene un valor “ $\vec{E}$ ” que se puede considerar constante en una diferencial de camino “ $d\vec{l}$ ”. Llamaremos circulación del vector campo eléctrico a la suma de los productos $\vec{E}\cdot d\vec{l}$, de forma que la circulación a lo largo de toda la línea es $\int_{\text{linea}} \vec{F}\cdot d\vec{l}$.

Para calcular esta integral de línea vamos a establecer en primer lugar un camino que, en principio es muy rebuscado pero que será muy útil para poder buscar fácilmente la integral a lo largo de cualquier curva.

Trazamos dos rectas que partiendo de la carga creadora del campo, pasen por los puntos “A” y “B”, como se muestra en la figura 7 y dibujamos el arco de circunferencia con centro en la carga, limitado por las rectas. El camino que vamos a considerar esta formado por dos tramos, el primero parte de “A” y sigue el arco de circunferencia, con centro en la carga, hasta el punto “C”, que se encuentra en la recta determinada por el punto “B” y la carga. El segundo tramo va de “C” a “B” siguiendo la recta que los une.

Para calcular la circulación del campo entre los puntos "A" y "B", por el camino indicado, tendremos que calcular la circulación en los dos tramos, y sumar los resultados obtenidos.

Tramo A-C

Para calcular la circulación $\int_A^C \vec{E}\cdot d\vec{l}$ debemos saber como son los vectores campo y "camino" en el tramo.

El campo en todos los puntos de este tramo, tendrá el mismo módulo $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_A^2}$, ya que todos los puntos equidistan de la carga en el radio del arco, el sentido vendrá dado por un vector unitario radial $\vec{u}_r$, que será distinto en cada punto y estará dirigido hacia el infinito si la carga es positiva.

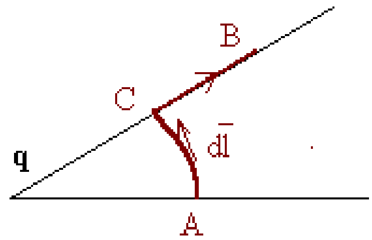

Figure 7
Para ir desde el punto "A" al punto "B", trazamos un arco con centro en la carga que pase por "A", lo que nos define el punto "C"

El "desplazamiento" en cada punto será un vector de módulo "dl" y el sentido será tangente a la trayectoria y dirigido hacia "C".

El producto escalar de los vectores campo y "camino" será el producto de dos vectores perpendiculares (siempre el radio y la tangente son perpendiculares), luego la circulación en este tramo será nula: $\int_A^C \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$

Tramo C-B

Aquí el vector campo será: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r$, siendo r la distancia del punto considerado a la carga, y $\vec{u}_r$ un vector unitario contenido en la semirrecta "qB" y dirigido hacia el infinito.

El vector "camino" será: $d\vec{l} = dr\,\vec{u}_r$, siendo $\vec{u}_r$ el mismo vector que nos daba el sentido del campo y dr la variación sufrida por el "desplazamiento" que lo será a lo largo de la línea por la que nos movemos.

En todo este ramo los vectores campo y "camino" son paralelos, luego su producto escalar , será igual al producto de los módulos, por tanto: $\int_C^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_C^B \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} =$

$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_C^B \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{r}\right]_C^B = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_c}\right)\right]$, teniendo en cuenta como hemos definido el punto "C", r_C y de r_A, son la misma magnitud (ambos son el radio del arco centrado en la carga que pasa por ambos puntos), como el punto "A" es el definido inicialmente por el problema que habíamos planteado, la circulación del campo eléctrico, en este tramo, la podemos escribir: $\int_C^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_A}-\dfrac{1}{r_B}\right)$.

La circulación del campo entre "A" y "B" por este camino, valdrá la suma de los resultados obtenidos en los dos tramos en que lo hemos descompuesto.

$$\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_A^C \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_C^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right).$$

Vamos a calcular ahora la circulación del campo desde "A" hasta "B" siguiendo otro camino, si bien vamos a elegir un camino similar al anterior (figura 8). Ahora, trazamos una tercera línea que parte de la carga, y se encuentra entre las correspondientes a los puntos "A" y "B", y trazamos dos arcos de circunferencia, uno que pase por "A" y llegue a la nueva línea y otro que paso por "B" y llegue también a la nueva línea. Los extremos de estos arcos definirán en este nueva línea los puntos "D" , "E" y "F" respectivamente. El camino que consideramos ahora está formado por 4 tramos: "AD" , "DE" , "EF" y "FB", y debemos calcular la circulación en cada uno de ellos y sumar los resultados obtenidos.

Siguiendo los razonamientos análogos al caso anterior, se llega a los siguientes resultados:

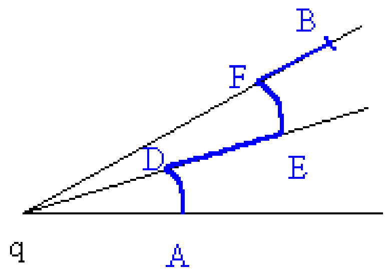

Figure 8
Ahora el camino para ir desde "A" al punto "B", lo haremos definiendo los puntos "D", "E" y "F" con arcos de circunferencias de centro en la carga

<u>Tramo A-D</u>

El campo es radial y tiene el módulo constante e igual a:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_A^2}$$

El "camino" será, en cada punto un vector tangente a la circunferencia y dirigido hacia "D", luego perpendicular al campo.

$$\int_A^D \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

<u>Tramo D-E</u>

El vector campo vale en cada punto: $\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\vec{u}_r$, y es paralelo a la recta determinada por DE, y por tanto al vector "desplazamiento" con lo que el producto escalar de los vectores campo y "camino", será el producto de los módulos, luego:

$$\int_D^E \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_D^E \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} \quad = \quad \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_D^E \frac{dr}{r^2} = \; = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{r}\right]_D^E \quad = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\left(\frac{1}{r_E}-\frac{1}{r_D}\right)\right] \quad =$$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_D}-\frac{1}{r_E}\right).$$

Tramo E-F

Igual que en el tramo "A-D", los vectores campo y "camino" son perpendiculares, por tanto $\int_E^F \vec{E}\cdot d\vec{l} \;= 0$

Tramo F-B

Igual que en el tramo D-E, teniendo en cuenta los nuevos puntos inicial y final luego:

$$\int_F^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_F^B \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_F^B \frac{dr}{r^2} \; = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{r}\right]_F^B \; = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_F}\right)\right] \; =$$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_F}-\frac{1}{r_B}\right).$$

En total, la circulación del campo entre "A" y "B" por este camino, valdrá:

$$\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} \; = \int_A^D \vec{E}\cdot d\vec{l} \; + \int_D^E \vec{E}\cdot d\vec{l} \; + \int_E^F \vec{E}\cdot d\vec{l} \; + \int_F^B \vec{E}\cdot d\vec{l} \; = 0 + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_D}-\frac{1}{r_E}\right) + 0 +$$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_F}-\frac{1}{r_B}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_D}-\frac{1}{r_E}\right) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_F}-\frac{1}{r_B}\right).$$

En la figura puede comprobarse que la distancia entre la carga y cada uno de los puntos "A" y "D" (r_A y r_D) es la misma: ($r_A = r_D$), ocurriendo igual con las distancias entre la carga y cada uno de los puntos "E" y "F" ($r_E = r_F$). Sustituyendo estos valores en la expresión de la circulación tenemos:

$$\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} \; = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_E}\right) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_E}-\frac{1}{r_B}\right); \; \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} \; = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)$$

que es el mismo resultado que habíamos obtenido yendo por el otro camino.

A partir de este resultado podemos comprobar que podemos acercarnos a la forma de una curva cualquiera tanto como queramos, sin más que trazar más radios que partan de la carga. Por tanto, el resultado que hemos obtenido es generalizable para cualquier camino que tomemos para ir de un punto a otro. Podemos decir que la circulación del campo no depende del camino es decir que el *campo eléctrico es conservativo.*

La expresión que hemos obtenido en el cálculo de la circulación para ir de “A” a “B” del campo eléctrico nos servirá para determinar el potencial eléctrico en los puntos del campo. Si asimilamos directamente la circulación entre dos puntos con la diferencia de potencial entre ellos, debida a una carga puntual, tendríamos que:

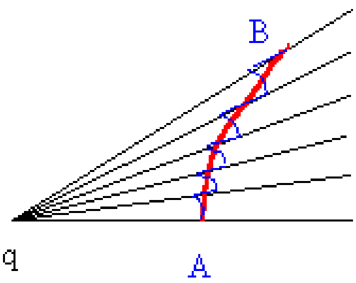

Figure 9
Nos podemos hacer a la forma de un camino cualquiera con tramos de radios y de circunferencias de centro en la carga

- *El potencial eléctrico en un punto varía con la inversa de la distancia a la carga. Lo que significa que si la carga es positiva, a mayor distancia a la carga, menor potencial en el punto.*
- *La expresión obtenida no nos permite hablar de potencial en un punto, sólo podemos hablar de diferencia de potencial entre dos puntos del espacio.*
- *Para el potencial creado por una carga puntual, podremos hablar de potencial en un punto si tomamos como origen de potencial un punto muy distante de la carga, en nuestro caso* $r_A \to \infty$ *(aunque esto solamente puede hacerse en el caso en que no existan cargas en el infinito). En este caso el potencial creado por una carga positiva en un punto cercano “B” resultaría negativo. Para subsanar esta circunstancia se define el potencial eléctrico como la circulación del campo cambiada de signo.*

Por tanto, la variación de potencial entre dos puntos A y B del campo, creado por una carga puntual, vendrá dada por:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right)$$

y el potencial en un punto: $V(\vec{r}) = \dfrac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0 r}$

Potencial creado por una distribución de cargas.

Si el campo está creado por una distribución discreta o continua de cargas, podremos aplicar el principio de superposición para obtener el potencial. En el caso de una distribución discreta, cada una de ellas estará situada en un punto caracterizado por su vector de posición $\vec{r}'_i$. En total tendremos para la diferencia de potencial entre los puntos A y B:

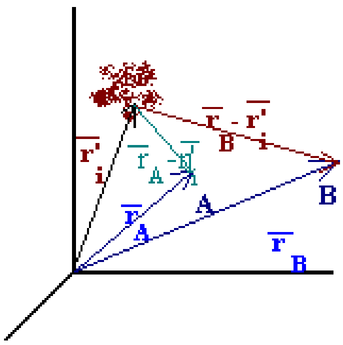

Figure 10
La posición de las cargas vendrá dada por los vectores $\vec{r}'_i$

$$V_B - V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\sum_{i=1}^{i=n} q_i\left(\frac{1}{\left|\vec{r}_B - \vec{r}'_i\right|} - \frac{1}{\left|\vec{r}_A - \vec{r}'_i\right|}\right)\right)$$

Si no existe carga en el infinito, y lo podemos tomar como origen de potenciales $\left(r_A \to \infty, V(r_A) = 0\right)$ y podemos escribir que el potencial en un punto será: $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\left|\vec{r} - \vec{r}'_i\right|}\right)$.

En el caso de una distribución continua de carga, las podemos "discretizar" considerando como carga puntual la encerrada en un volumen elemental ($d\tau'$), de forma que dq = $\rho\, d\tau'$, con lo que la suma discreta se convertirá en continua, la distribución de potencial será:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\tau'} \frac{\rho\, d\tau'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|}$$

Por tanto, en general, el campo electrostático es un campo conservativo, que deriva de un potencial que calcularemos como: $V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$.

Como consecuencia de todo lo anterior, hemos visto que el campo electrostático se puede describir por una función escalar $V(\vec{r})$ que esta definida en todo el espacio excepto por una constante. La descripción del campo por un potencial presenta la ventaja de simplificar los cálculos a la hora de conocer sus acciones.

Problema 8.- Determinar si el campo vectorial $\vec{a}(\vec{r}) = (x^2 + yz)\,\vec{i} + (y^2 + zx)\,\vec{j} + (z^2 + xy)\,\vec{k}$ puede representar un campo electrostático determinando la distribución de potencial correspondiente.

El campo vectorial dado está determinado en todos los puntos del espacio, por tanto puede existir carga en el infinito, y no podemos hablar de potencial en un punto, sino de diferencia de potencial entre dos puntos. Para ver si podemos encontrar una expresión para esta diferencia de potencial veremos si podemos encontrar una expresión de V_A - V_B*, que vendrá dada por:*

$V_A - V_B = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$ *, siendo* $d\vec{l}$ *un vector cambio de posición cualquiera, pues la diferencia de potencial no puede depender del camino que empleemos parar llegar desde un punto a otro. Por tanto podemos escribir:*

$d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$ *;con lo que:*

$\vec{E}\cdot d\vec{l} = \left((x^2 + yz)\vec{i} + (y^2 + zx)\,\vec{j} + (z^2 + xy)\,\vec{k}\right)\cdot\left(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}\right)$ *, y la distribución de potenciales será:*

$$V_A\text{-}V_B = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} \;=-\int_A^B (x^2+yz)dx+(y^2+zx)dy+(z^2+xy)dz =$$

$$= -\left[x^3+xyz+y^3+xyz+z^3+xyz\right]_B^A$$

Esta expresión permitirá calcular la diferencia de potencial entre dos puntos.

Dipolo eléctrico

A menudo nos vamos a encontrar una asociación de cargas sencilla formada por dos cargas eléctricas iguales, pero de signo contrario, separadas una distancia pequeña respecto de la de observación. Esta asociación de cargas recibe el nombre de dipolo eléctrico y su estudio suele resultar interesante en el estudio de la materia.

El dipolo se caracteriza por su **momento dipolar** que es un vector que tiene por módulo el producto de la carga por la distancia que separa las cargas, dirección la de la recta que une las cargas y sentido desde la carga negativa hacia la positiva.

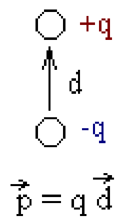

Figure 11
Esquema de un dipolo

Dado que las dimensiones del momento dipolar son “carga × distancia” las unidades en el Sistema Internacional (SI) serán culombios × metro (C × m). Existe una unidad práctica el Debye, cuyo origen está ligado a la primera utilidad que se dio al estudio de los dipolos: el conocimiento de la materia. Su relación con la unidad del SI es: 1Debye = 3.33×10^{-30} C × m .

El dipolo crea un campo eléctrico resultante del creado por cada una de las dos cargas. Las expresiones matemáticas del campo eléctrico y el potencial creados por el dipolo en un punto, haciendo la aproximación que supone que la distancia de observación es muy grande comparada con la que separa las cargas, lo que permite un desarrollo en serie de la expresión del potencial, son para el potencial eléctrico y el campo:

$$V = \frac{\vec{p}\cdot\vec{u}_r}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\ , \text{ para } \ r >> d$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^5}(\vec{r}-\vec{r}\,') - \frac{\vec{p}}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}\right]$$

Como puede apreciarse, estas expresiones son bastante diferentes a las obtenidas en el caso de cargas puntuales. La diferencia más significativa es que el potencial es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del dipolo al punto (no inversamente proporcional como ocurría en otros casos), y el campo inversamente proporcional al cubo de la distancia (y no al cuadrado). Esto nos hace comprender por que, en ningún caso, puede considerarse el dipolo como una carga puntual y es preciso tener en cuenta su momento dipolar.

Acción de un campo eléctrico sobre un dipolo

Particularmente interesante resulta el caso de un dipolo rígido (el conjunto de las dos cargas mantiene su distancia), cuando se encuentra en el seno de un campo electrostático.

Consideremos un dipolo, como el representado en la figura (la carga positiva en el punto "A", la negativa en "B", separadas una distancia "d"), de momento dipolar $\vec{p} = q \cdot \vec{d}$. Cuando se encuentra en el seno de un campo electrostático $\vec{E}$, cada carga se verá sometida a la acción de una fuerza de valores: $\vec{F}_+ = (+q)\,\vec{E}(A)$, $\vec{F}_- = (-q)\,\vec{E}(B)$, siendo $\vec{E}(A)$ y $\vec{E}(B)$ los campos existentes en las posiciones de las cargas positiva y negativa respectivamente. La fuerza resultante será:

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q\left[\vec{E}(A) - \vec{E}(B)\right]$$

Al ser el dipolo rígido, estas dos fuerzas están aplicadas en puntos diferentes, con lo que aparecerá un par de fuerzas, cuyo momento resultante (tomando momentos respecto del punto "B"), será:

$$\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F} = q\,\vec{d} \times \vec{E}(A) = \vec{p} \times \vec{E}(A)$$

En total, si el campo no es uniforme, el dipolo se verá sometido por una parte a la acción de una fuerza de arrastre (resultante de las fuerzas), que lo desplazará en sentido de los campos crecientes, y por otra parte, al ser de momento no nulo producirá un giro que lo orientará en el sentido del campo.

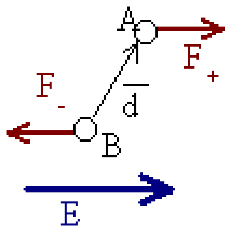

Figure 12
El campo eléctrico ejerce fuerzas de distinto sentido sobre cada carga del dipolo

Si el campo que actúa es uniforme ($\vec{E}_0$), la fuerza resultante será nula $\vec{F} = q\left[\vec{E}_0 - \vec{E}_0\right] = \vec{0}$, y el momento (que será independiente del origen de momentos) será: $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}_0$. Es decir un campo uniforme no desplazará al dipolo, si bien lo hará girar orientándolo en el sentido del campo actuante.